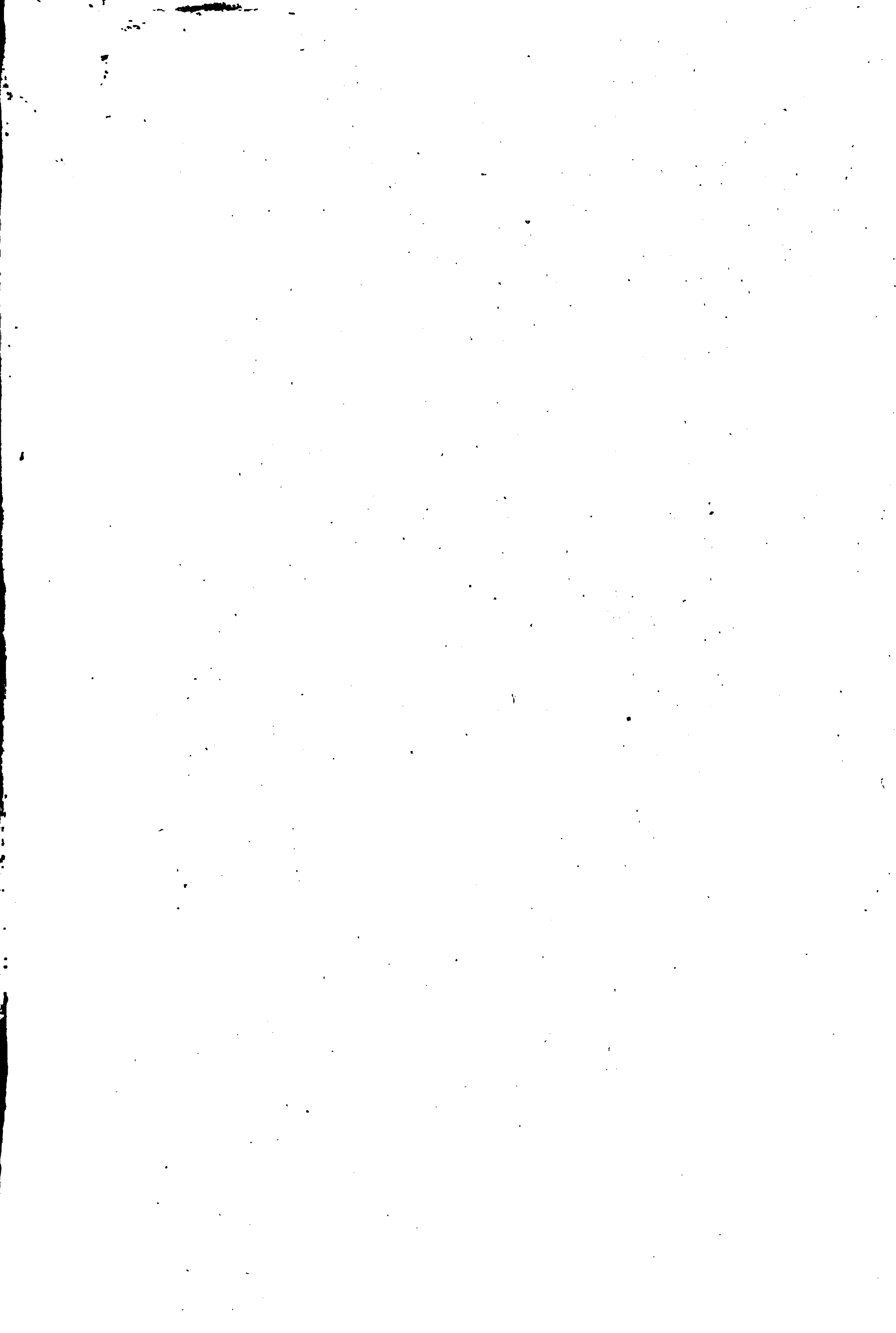
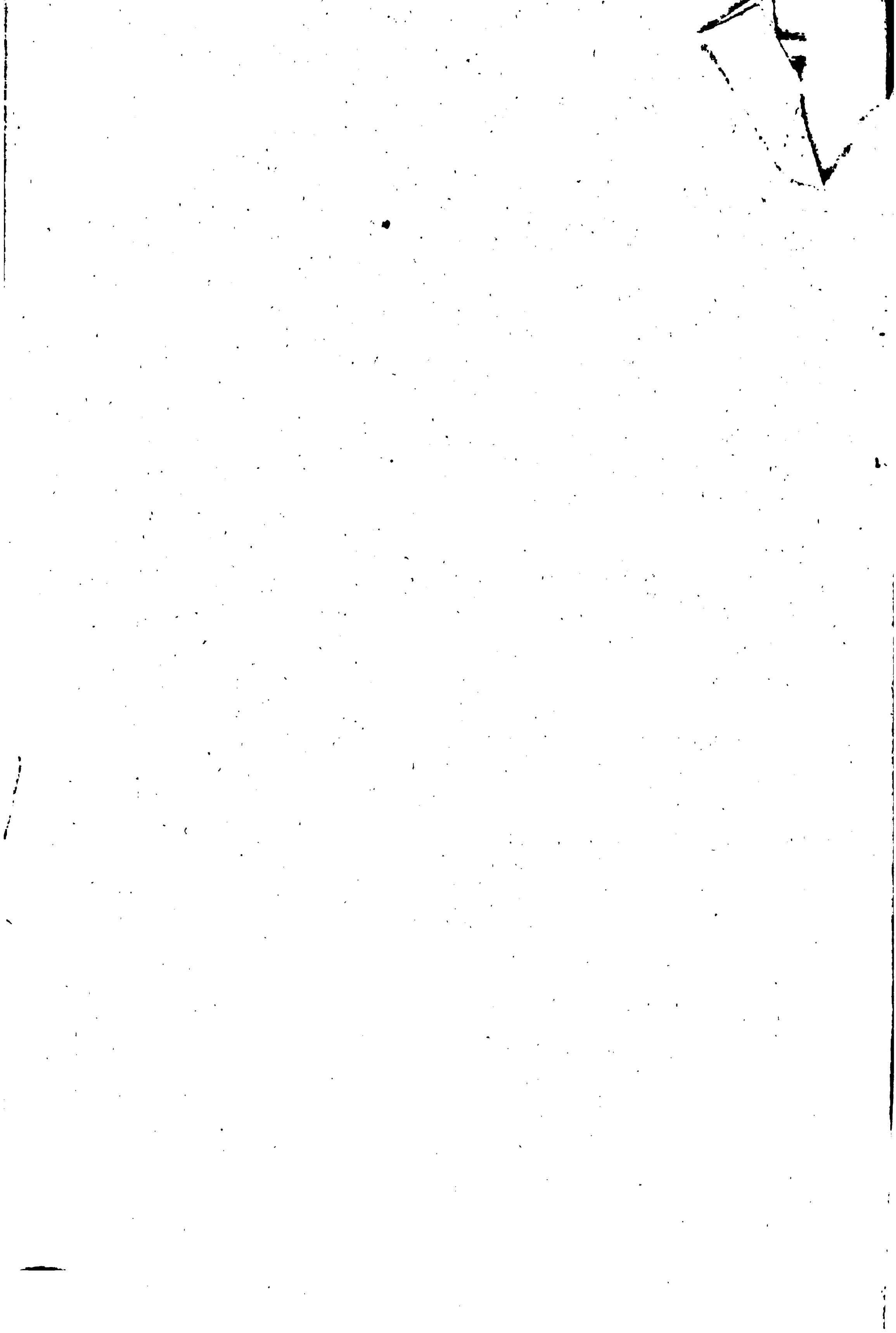
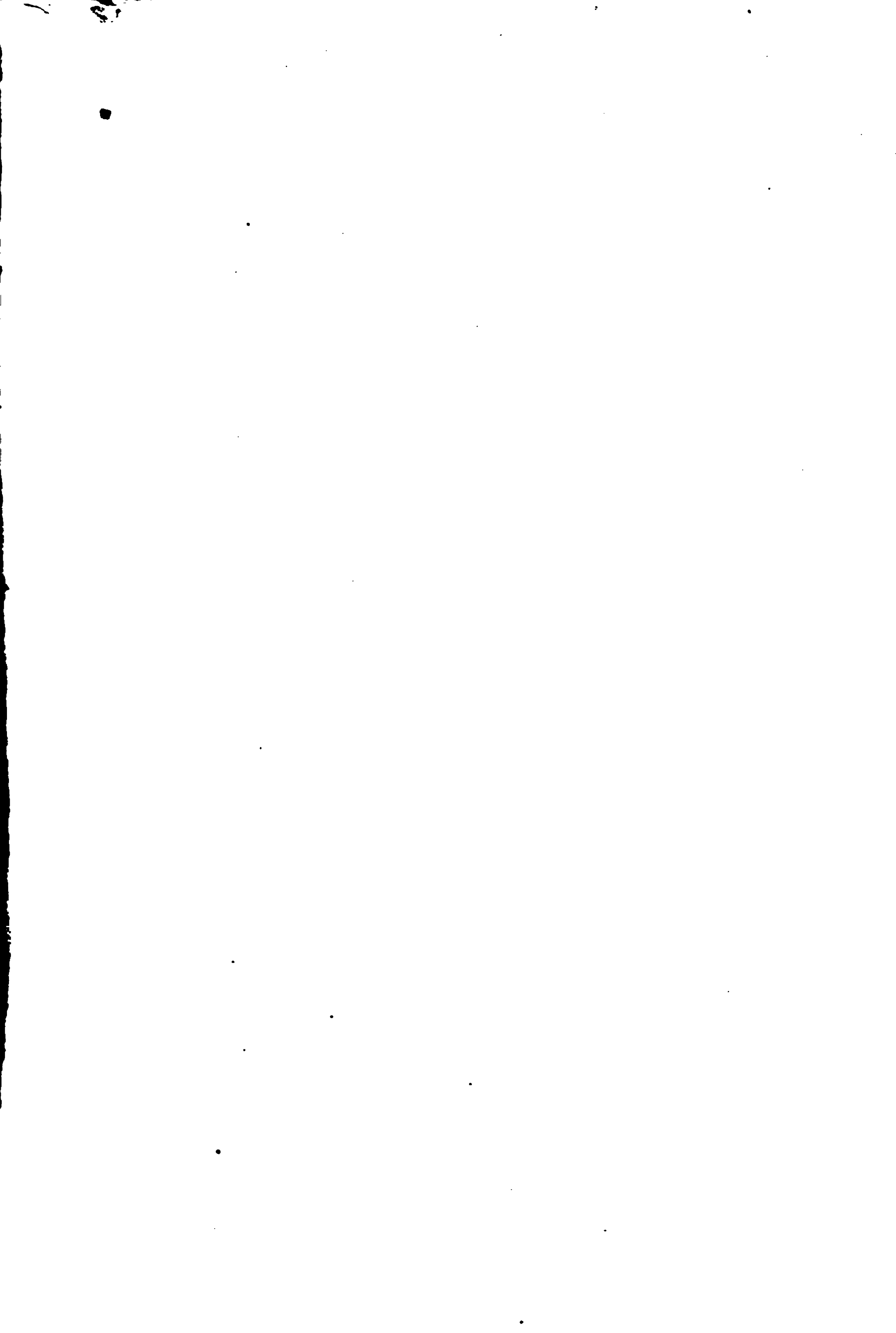
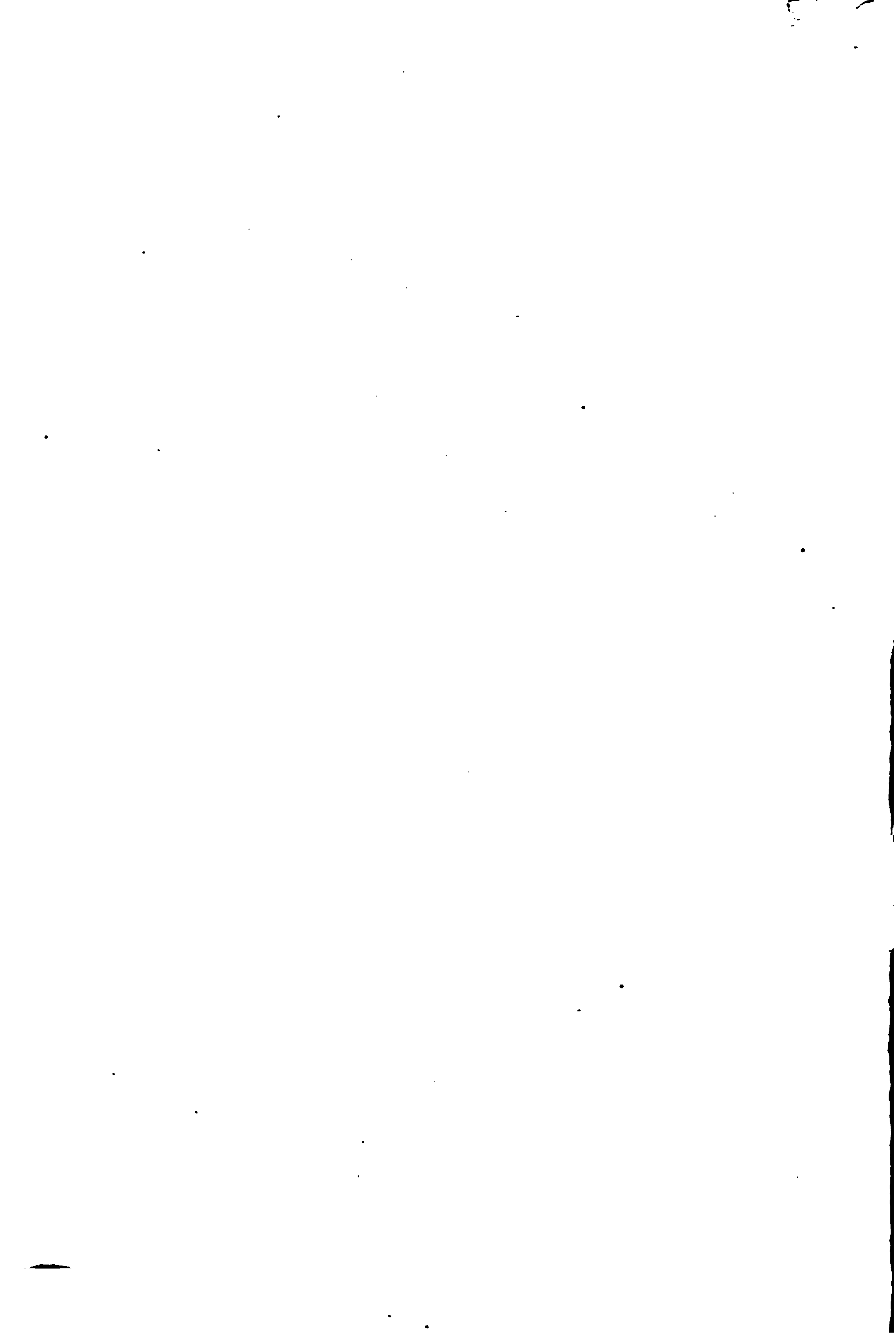

1904
ROBERT WHEELER
WILLSON







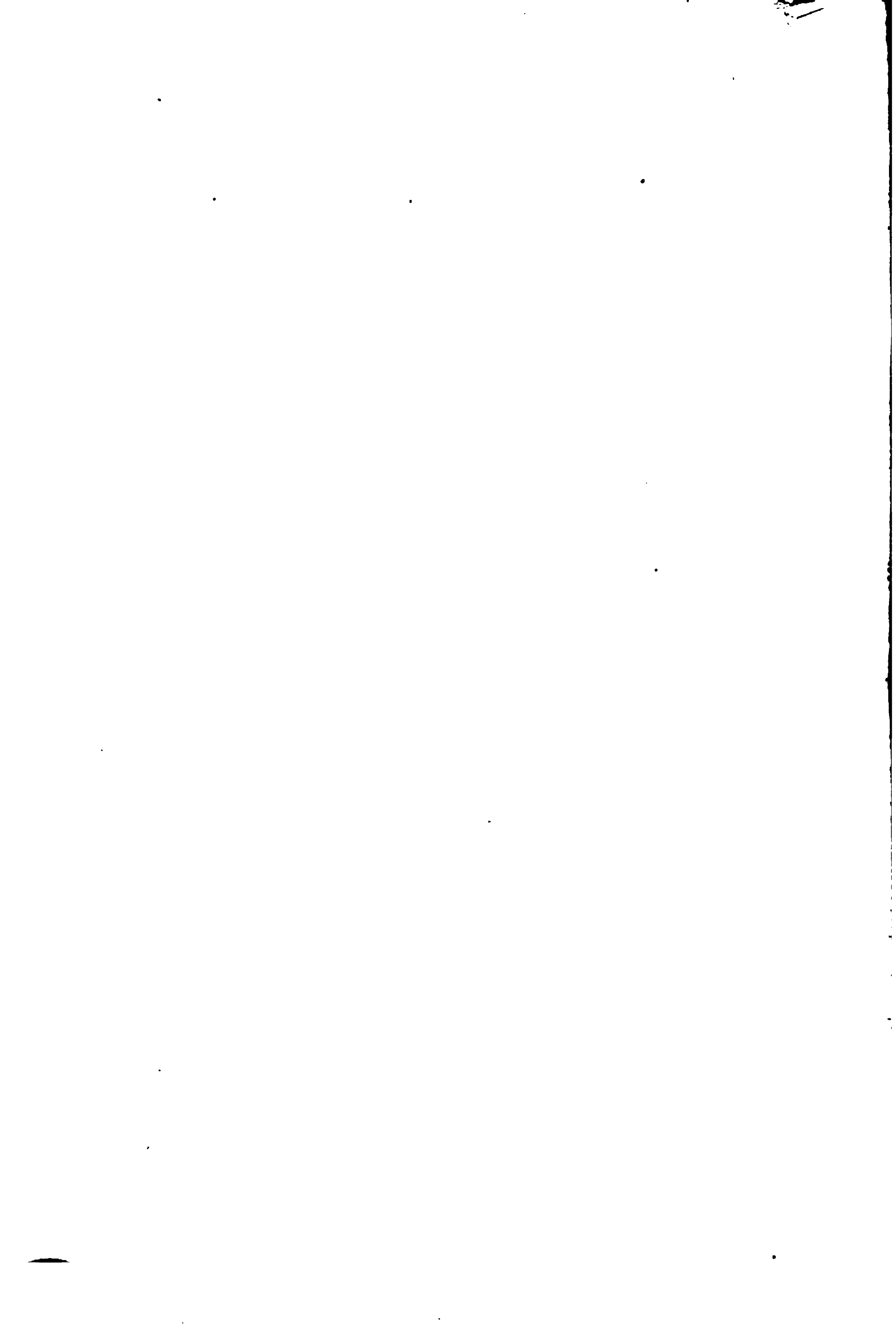


Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

In zwei Bänden.





Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

Von

Dr. Rudolf Wolf,
Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

In zwei Bänden.

Dritter Halbband.

Zürich
Druck und Verlag von F. Schulthess
1892.

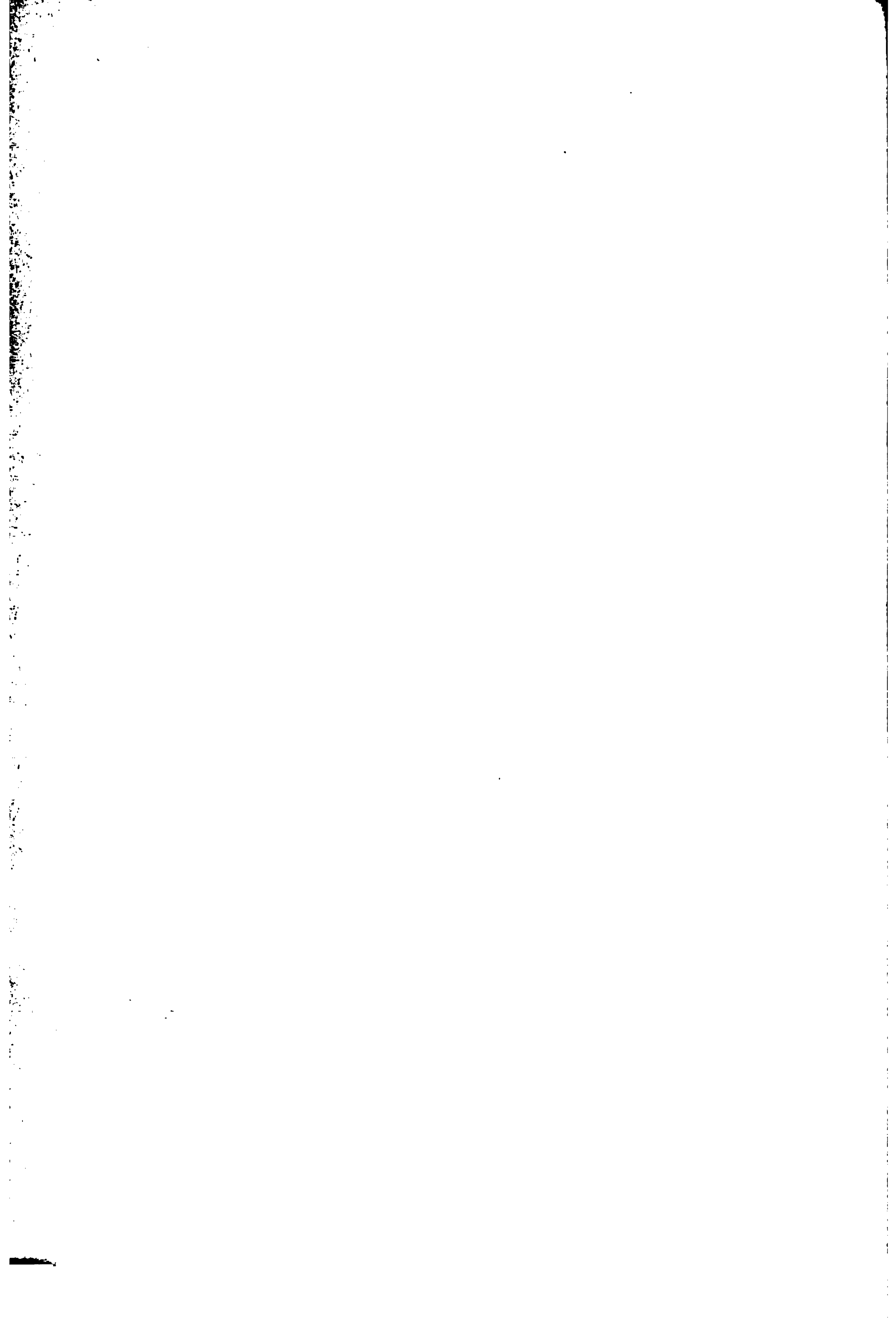
Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur

in vier Büchern.

Drittes Buch:

Theorie der Instrumente und Messungen.



XIII. Die Theorie der Instrumente.

Dans les sciences il n'y a jamais rien de plus aisé que ce qu'on a fait hier, et rien de plus difficile que ce que l'on fera demain. *(Biot.)*

---

321. Lot, Setzwage und Kanalwage. — Um ihre Aufgabe auf dem einzig zuverlässigen Wege, nämlich durch Messung und Berechnung, lösen zu können, bedarf die Astronomie vor allem aus zweckmässiger Instrumente zur Bestimmung von Längen-, Richtungs- und Zeit-Unterschieden, und es ist daher angegeben, sich in erster Linie mit den in älterer und neuerer Zeit angewandten Hilfsmitteln dieser Art, soweit es nicht in den zwei ersten Büchern schon beiläufig geschehen ist, bekannt zu machen[a]. — Ich beginne mit den ältern Mitteln um die Lage gegen den Horizont zu untersuchen und allfällig zu berichtigen, und habe da zunächst zu erwähnen, dass neben dem unzweifelhaft schon im höchsten Altertume bekannten **Lote** (Bleilot, Senkblei) und der wohl ebenfalls sehr frühe aus ihm abgeleiteten **Setzwage** (Bleiwage)[b], auch häufig, und noch von den spätern Arabern, zur Untersuchung der Horizontalität einer Fläche etwas Flüssigkeit auf dieselbe gegossen und dann nachgesehen wurde, ob sich letztere gleichmässig auf ersterer ausbreite[c]. — Die auf dem Principe der kommunizierenden Röhren beruhende, fast ausschliesslich zu Gefällsbestimmungen verwendete **Kanalwage** (Wasserwage) kömmt hier nur darum in Betracht, weil sie früher, wie übrigens auch die Setzwage, häufig als „Libella" bezeichnet und darum noch in der neuern Zeit wiederholt mit der sofort zu besprechenden Röhrenlibelle verwechselt wurde[d].

Zu 321: *a.* Aus der grossen betreffenden Litteratur erwähne ich vorläufig: „José **Zaragoza** (Alcalà bei Valencia 1627 — Madrid 1678; Jesuit; Prof. math. Madrid), Fabrica y uso de varios instrumentos mathematicos. Madrid 1675 in 4., — Nicolas **Bion** (1653? — Paris 1733; Landkarten- und Globenhändler in Paris), Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques. Paris 1713 in 8. (auch 1716 und später; deutsch durch Doppelmayr, Nürnberg 1717 und später; engl. durch E. Stone,

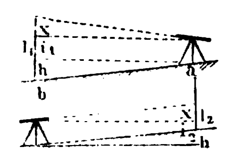
London 1758), — John **Robertson** (1712 — London 1776; Vorsteher einer math. Schule in London), Treatise on mathematical instruments. London 1757 in 8., — Pierre-Charles **Le Monnier** (Paris 1715 — Héril bei Baïeux 1799; Prof. phys. und Akad. Paris; vgl. Cuvier in Mém. de l'Inst. I 3), Description et usage des principaux instruments d'astronomie. Paris 1774 in fol., — Enno Heeren **Dirksen** (Hamswerum in Ostfriesland 1792 — Paris 1850; Prof. math. und Akad. Berlin), Historiæ progressuum instrumentorum, mensuræ angulorum accuratiori inservientium, adumbratio. Gottingæ 1819 in 4., — W. **Simms**, On the principal mathematical instruments. London 1836 in 8. (7. ed. 1849), — **Vizcarrondo**, Tratado de la descripcion y manejo de varios instrumentos de astronomia y navegacion. Cadix 1846 in 8., — C. F. **Schneitler**, Die Instrumente der höhern und niedern Messkunst. Leipzig 1848 in 8. (2. A. 1852), — Karl **Engelbreit**, Die Instrumente der Geodäsie. Nürnberg 1852 in 8., Atl. in fol., — Philipp **Carl** (Neustadt a. d. Aisch 1837 — München 1891; Prof. phys. München), Die Principien der astronomischen Instrumentenkunde. Leipzig 1863 in 8., — Georg Christian Konrad **Hunäus** (Goslar 1802 — Hannover 1882; Prof. geod. Hannover), Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie. Hannover 1864 in 8., — Handbuch der nautischen Instrumente. Hydrographisches Amt der Admiralität. Berlin 1882 in 8. (2. A. 1890), — Ernst **Gerland** (Kassel 1838 geb.; Doc. Bergakademie Klausthal), Beiträge zur Geschichte der Physik (Leopoldina; Heft 18 von 1882), — Leopold **Löwenherz** (Czarnikau bei Posen 1847 geb.; Dir. techn. Abteil. der phys. Reichsanstalt in Berlin), Zur Geschichte der Entwicklung der mechanischen Kunst (Z. f. Instr. 1882—87), — Alfred **Westphal** (Lentesdorf bei Neuwied 1850 geb.; Mitglied des k. geodät. Inst. in Berlin und Red. Zeitschr. f. Instr.), Die geodätischen und astronomischen Instrumente zur Zeit des Beginnes exacter Gradmessungen (Z. f. Instr. 1884), — Arthur **Breusing** (Osnabrück 1818 geb.; Dir. Seefahrtschule Bremen), Die nautischen Instrumente bis zur Erfindung des Spiegelsextanten. Bremen 1890 in 8., — etc." — *b.* Lot und Setzwage zu beschreiben dürfte unnötig sein; dagegen mag noch angeführt werden, dass im Almagest (Ed. Halma I 316) das Senkblei (fil-à-plomb, plumb-line) als „κάθετος μόλυβδος = heruntergelassenes Blei" aufgeführt wird, — dass nach **Houzeau** dem „Erzinventierer" **Hooke** auch das Verdienst zukömmt „de plonger le poids d'un fil-à-plomb dans un liquide, afin d'en diminuer les mouvements", — und dass nach „Barth. **Scultetus**, Von allerley Solarien. Görlitz 1572 in fol." zur Zeit für die Setzwage auch die Namen „Bleyscheidt, Alpharium, etc." gebräuchlich waren. — *c.* Vgl. „**Sédillot**, Prolégomènes des tables astronomiques d'Oloug-Beg. Paris 1847—1853, 2 Vol. in 8." — *d.* Wenn Francesco **Patricio** in seinem „Pancosmios. Ferrara 1591 in fol." von einem mit Hilfe einer „libella æquissima" ausgeführten Nivellement spricht, so hat man ohne Zweifel ebenfalls an eine solche Kanalwage zu denken.

322. Die sog. Röhrenlibelle. — Gegenwärtig sind Lot, Setzwage und Kanalwage fast ganz durch die sog. **Röhrenlibelle** (Libella, Niveau à bulle d'air, Spirit level) verdrängt, welche der französische Gelehrte Melchisedec **Thévenot** um 1660 erfand, im folgenden Jahre in einem Briefe an Viviani beschrieb, und sodann auch in einem anonymen Schriftchen, das den Titel „Machine nouvelle pour la conduite des eaux, pour les bâtimens, pour la navigation et pour la plupart des autres arts. Paris 1666 in 8." besass,

zur allgemeinen Kenntnis brachte [a]. — Für die Theorie der Libelle auf die folgenden Nummern verweisend, habe ich noch beizufügen, dass die erwähnte Verdrängung keineswegs sofort statt hatte, sondern das neue Hilfsmittel anfänglich mit einigem Misstrauen aufgenommen wurde, zumal seine Ausführung ziemlich lange höchst unvollkommen blieb [b]. Erst als es nach und nach gelang, letztere wesentlich zu verbessern [c], fand die Libelle mehr und mehr Eingang, und man kann etwa den Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts als die Epoche bezeichnen, zu der sie sich unter den Präcisionsinstrumenten einbürgerte und zu einem der vielgebrauchtesten Hilfsapparate wurde [d].

Zu 322: *a.* Als ich 1857 im Journal des Savans (1666 XI 5) eine Reproduktion des längst vergessenen Schriftchens auffand, glaubte ich dasselbe, und damit die Erfindung der Libelle, aus verschiedenen Gründen (vgl. Zürch. Viert. 1857) dem in Paris lebenden Mechaniker **Chapotot** zuschreiben zu sollen. Da jedoch der anonyme Verfasser erwähnt hatte, er habe seine Erfindung der Roy. Society und der Akademie in Florenz mitgeteilt, so erliess ich später (Bull. Bonc. 1869), um ganz sicher zu gehen, noch eine öffentliche Aufforderung, zunächst in Florenz, betreffende Nachforschungen anzustellen, — in London war kaum etwas zu erwarten, da nach andern Vorkommnissen anzunehmen war, es habe **Hooke** die Mitteilung abgefangen, um sich dann alsbald (wie es auch wirklich geschah) selbst als Erfinder produzieren zu können. Dieser Aufruf hatte die gute Folge, dass sich Prof. **Govi** für die Sache interessierte, den erwähnten Brief auffand und überhaupt die wirkliche Urgeschichte der Libelle definitiv feststellte (vgl. Bull. Bonc. 1870 und Zürch. Viert. 1871). Überdies gelang es dem unermüdlichen **Boncompagni**, das Originalschriftchen aufzufinden; auch zeigte sich, dass die **Chapotot** von seinen Zeitgenossen zugeschriebene und mich irre führende Erfindung in einer neuen Abart des damals für „nivellements à distance“ beliebten, jetzt mit Recht längst vergessenen „Niveau pendule“ bestand. — *b.* Die Hauptstelle des Schriftchens von **Thévenot** lautet wie folgt: „C'est un **niveau d'air** beaucoup plus juste et plus commode que les niveaux ordinaires. La construction en est aisée: On choisit un tuyau de verre qui ayt les costez paralleles, dont le diamètre puisse recevoir le petit doigt et qui soit environ sept ou huit fois plus long que large. Après avoir fermé ce tuyau par un des bouts, on y met quelque liqueur, et ayant laissé un peu moins de vuide dans le tuyau qu'il n'a de diamètre, on le bouche ou le scelle par le feu. De toutes les liqueurs l'esprit de vin est le plus propre pour cet instrument, parce qu'il ne fait point de sédiment et qu'il ne gèle jamais.“ Man sieht hieraus, wie unrichtig, ja lächerlich die in „Guido **Schreiber** (Rastatt 1799 geb.; Prof. prakt. Geom. Karlsruhe bis 1851, wo er entlassen wurde), Praktische Geometrie. Karlsruhe 1842 in 4.“ enthaltene Notiz ist: „Anfänglich nahm man Wasser zum Füllen der Röhre, und so lag die Ideenverbindung nahe **Es flattert um die Quelle — Die wechselnde Libelle** (Göthe), — daher denn der Name des Instrumentes“. Ferner ist anzuführen, dass die von **Thévenot** beigegebene Kupfertafel nicht nur die Libelle mit einer begrenzten und relativ kleinen Blase darstellt, somit die Angabe vollständig widerlegt, es habe erst **Hooke** den leeren Raum in dieser Weise reduziert, — sondern auch eine gefasste Libelle zeigt, sowie ihre Anwendung auf Höhenquadrant, Nivellierinstrument, etc. andeutet. Dagegen scheint allerdings die mechanische

Ausführung der vortrefflichen Ideen von **Thévenot** anfänglich ziemlich mangelhaft gewesen zu sein und der allgemeinen Aufnahme der Erfindung Eintrag gethan zu haben. — *c.* Während man sich zuerst darauf beschränkte, möglichst cylindrische Röhren auszusuchen, wurden letztere später, wie uns z. B. ein von **Repsold** 1817 V 12 an Horner geschriebener Brief (Not. 179) zeigt, im Innern noch sorgfältig ausgeschliffen. Ferner wurde (vgl. Berl. Jahrb. 1778) nach einem schon 1775 durch **Fontana** gemachten Vorschlage, wenigstens zum Füllen feinerer Libellen, Äther oder Naphta verwendet, — die Röhre vor dem Schliessen durch Erwärmen luftleer gemacht, — und der Schluss wohl auch, anstatt durch Zuschmelzen, durch eingeschliffene Glasstöpsel zu erhalten gesucht, wodurch man allerdings, aber nur auf Kosten ganz sichern Verschlusses, vor dem Zerspringen etwas gesicherter war. Die Libellenfassungen wurden namentlich durch **Reichenbach** und den ältern **Ertel** verbessert, und so z. B. für letztern die gute Idee beansprucht, bei den Libellen, wie bei den Lagern für horizontale Axen, das eine Ende vertikal, das andere horizontal verschiebbar zu machen. In der neuesten Zeit werden die durch C. **Reichel** in Berlin gelieferten Libellen sehr gerühmt. — *d.* Die Verbindung von Fernrohr und Libelle, aus der unser gegenwärtiges Nivellierinstrument hervorgegangen ist, soll schon 1684 der französische Ingenieur **Lebion** ausgeführt haben. Hat man nämlich ein auf einem Pyramidalstative ruhendes Fernrohr, welches eine zu seiner optischen Axe parallele, sog. Längslibelle trägt, so kann man leicht eine Folge von Höhendifferenzen bestimmen, da beim Einspielen der Libelle die Visierlinie horizontal sein soll: Gesetzt aber, letztere habe noch eine kleine Elevation, so wird sie, wenn das Instrument in a und eine Messlatte (Mire) in einem um h tiefern Punkte b aufgestellt wird, diese letztere in $l_1 = x + i_1 + h$ treffen, wo i_1 die Höhe des Okulares über a und x den durch jene Elevation verursachten Fehler bezeichnet; wechselt man sodann Instrument und Messlatte, so erhält man $l_2 = x + i_2 - h$, und es ergeben sich



$$2h = l_1 - l_2 - (i_1 - i_2) \qquad 2x = l_1 + l_2 - (i_1 + i_2)$$

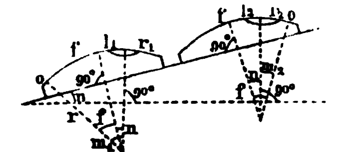
so dass x bestimmt, und mit Hilfe der Korrektionsschraube der Libelle gehoben werden kann. Ist aber letzteres geschehen, so kann man die Höhendifferenz zweier Punkte noch einfacher bestimmen, indem man das Instrument zwischen ihnen aufstellt, für beide Punkte die Latthöhe abliest und deren Differenz nimmt. — Für weitern Detail vgl. die Speciallitteratur wie z. B. „Sim. **Stampfer**, Theoretische und praktische Anleitung zum Nivelliren. Wien 1845 in 8. (7. A. durch Herr 1872)“, — wohl auch die von **Plantamour** und **Hirsch** gegebenen Aufschlüsse über das „Nivellement de précision de la Suisse“, für welches Emil **Kern** (Aarau 1830 geb.; Mechaniker in Aarau) ganz vorzügliche Instrumente geliefert hat und dessen Bedeutung aus 433 hervorgehen wird.

323. Theorie und Untersuchung der Libelle. — Setzt man eine Libelle auf eine um n geneigte Gerade auf, — wendet sie sodann um, — und liest in beiden Lagen an einer von dem einen Ende auslaufenden Längsteilung die Stände $l_1 r_1$ und $l_2 r_2$ der Blasenenden ab, so erhält man, wenn f den Stand der Blasenmitte für $n = 0$ und v den Winkelwert eines Teilstriches bezeichnet, die Formeln

$$n = \tfrac{1}{4}(l_1 + r_1 - l_2 - r_2)\cdot v \qquad f = \tfrac{1}{4}(l_1 + r_1 + l_2 + r_2)\cdot v \qquad \mathbf{1}$$

nach welchen n und f nach Bestimmung von v berechnet werden können[a]. Für letztere Bestimmung befestigt man die Libelle auf ein um eine Axe drehbares Fernrohr, bringt nach und nach durch Drehen des Fernrohrs das eine Blasenende mit verschiedenen Teilstrichen zum Einspielen, und liest jeweilen **entweder** an einem an der Axe befindlichen Teilkreise, **oder** an einer in bekannter Distanz aufgestellten Messlatte, die Stellung des Fernrohrs und damit die dem Wege der Blase entsprechende Drehung ab[b]. Je kleiner v ausfällt, desto empfindlicher ist die Libelle, und je weniger sein Wert variiert, wenn man ihn aus Ablesungen an verschiedenen Stellen bestimmt, desto zuverlässiger ist dieselbe[c].

Zu 323: *a.* Unter Voraussetzung, dass die Röhre wenigstens nach oben kreisförmig ausgeschliffen sei, folglich die Mitte der Luftblase beständig den höchsten Punkt einnehme, hat man offenbar für die beiden Lagen



$$n = m_1 - f = \tfrac{1}{2}(l_1 + r_1)\cdot v - f$$
$$n = f - m_2 = f - \tfrac{1}{2}(l_2 + r_2)\cdot v \qquad \mathbf{2}$$

woraus die 1 ohne weiteres hervorgehen, während die Länge eines Teilstriches

$$d = r \cdot v \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{3}$$

ist. Setzt man die Blasenlänge als konstant voraus, so muss $r_1 - l_1 = l_2 - r_2$ sein, und hiefür gehen die 1 in

$$n = \tfrac{1}{2}(l_1 - r_2)\cdot v \qquad f = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)\cdot v \qquad \mathbf{4}$$

über; aber diese scheinbar einfachern Formeln sind nicht zu empfehlen, da die Blase bei der geringsten Wärmeveränderung ihre Länge wechselt, also die Voraussetzung selten zutrifft. — *b.* So erhielt ich z. B. 1879 mit Hilfe des Zürcher-Meridiankreises, unter a die Kreisablesung, unter m die Stellung der Blasenmitte an der Libellenscale und unter l die Blasenlänge in Scalenteilen verstehend, bei einer Libelle, welche vom einen Ende aus in Pariserlinien geteilt war, folgende Serie korrespondierender Ablesungen:

a	m	l	a'	a — a'	Δa : Δm
"			"	"	
424,26	89,20	47,4	424,18	0,08	
					9,889
385,20	85,25	3	385,05	0,15	
					10,222
342,78	81,10	2	343,94	— 1,16	
					9,420
305,10	77,10	2	304,31	0,79	
					9,963
251,80	71,75	1	251,31	0,49	
					10,059
180,38	64,65	3	180,98	— 0,60	
					9,727
132,71	59,75	3	132,43	0,28	
					9,900
62,42	52,65	3	62,09	0,33	
					10,012
— 4,66	45,95	3	— 4,29	— 0,37	
					9,869
— 114,70	34,80	0	— 114,73	0,03	
Mittel		47,24		± 0,48	9,896

Der Bewegung $m_1 - m_{10} = 54{,}40$ der Blase entspricht somit der Stellungsunterschied $a_1 - a_{10} = 538'',96$ und es ist daher der Wert eines Libellenteiles angenähert $v = 9'',907$. Genauer kann man ihn unter Benutzung sämtlicher Ablesungen z. B. in der Weise finden, dass man, unter x die m = 60 entsprechende Ablesung verstehend, die Gleichung

$$a = x + (m - 60) \cdot v \qquad 5$$

für alle 10 Wertenpaare aufschreibt, und zur Bestimmung von x und v die Methode der kleinsten Quadrate (52) anwendet, wodurch man

$$a' = 134'',911 + (m - 60) \cdot 9'',9065 \qquad 6$$

und damit die in die Tafel eingetragene Vergleichung erhält. — Versteht man unter Δa oder Δm die Differenz zweier sich folgender a oder m, so erhält man die ebenfalls eingetragenen 9 Werte von $\Delta a : \Delta m = v$, die neuerdings zeigen, dass die untersuchte Libelle von grössern systematischen Fehlern frei, dagegen allerdings nicht sehr empfindlich ist, da eine Pariserlinie Ausschlag schon ganz gut für $v = 1''$ erhältlich ist. So erhielt ich 1866 bei einer für den Meridiankreis selbst bestimmten, ebenfalls in Pariserlinien geteilten Libelle nach derselben Methode vorerst $v = 1'',348$ und sodann nach Einlegen in die Fassung $v = 1'',213$, woraus zugleich die Regel hervorgeht, die definitive Bestimmung erst nach diesem Einlegen vorzunehmen. — Wendet man 3 auf die untersuchte Libelle an, d. h. setzt $d = 1'''$ P. und $v = 9'',907$, so folgt $r = 20820''' \fallingdotseq 145'$ P., während sich $d = 1^{mm}$, $v = 1''$ und $r = 206^{m}$ entsprechen würden. — *c.* Anhangsweise mag noch erinnert werden, dass man sich bei etwas empfindlichen Libellen namentlich auch vor einseitiger Erwärmung hüten muss, da die Blase immer gegen das wärmere Ende hin geht. Es scheint dieser Umstand zuerst von Anne-Jean-Pascal-Chrysostome **Duc-la-Chapelle** (Montauban 1765 — ebenda 1814; reicher Privatastronom zu Montauban in Tarn-et-Garonne) bemerkt und 1802 in der Conn. d. t. besprochen worden zu sein, — jedenfalls nicht erst von Giuseppe **Belli** (Callasca in Piemont 1791 — Pavia 1860; Prof. phys. Mailand, Padua und Pavia) in seiner 1829 in die Mem. Soc. Ital. eingerückten Note.

324. Die sog. Axenlibelle. — Soll die Libelle zum Nivellieren einer Axe dienen, so kann sie nur auf die immer etwas ungleichen Stahlzapfen, welche die Axe umhüllen, aufgesetzt oder an dieselben gehängt werden. Bezeichnet nun d die Länge der Axe, $\Delta r = r_2 - r_1$ die erwähnte Zapfen-Ungleichheit, α den halben Winkel der Libellen-Füsse oder Haken, a den halben Lagerwinkel, und setzt man

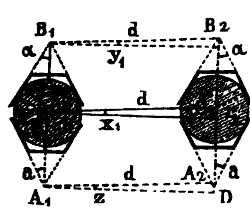
$$1 : m = d \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 1 : n = d \cdot \mathrm{Si}\,a \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 1$$

so ergeben sich die Gleichheiten

$$\Delta r = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2) : (m + n), \quad x_1 = y_1 - m \cdot \Delta r, \quad x_2 = y_2 + m \cdot \Delta r \qquad 2$$

wo y_1 und y_2 die vor und nach Umlegen der Axe in ihren Lagern aus den Libellen-Ablesungen (nach 323 : 1) ohne Rücksicht auf die Zapfen-Ungleichheit berechneten Werte, x_1 und x_2 aber die entsprechenden wirklichen Neigungen der Axe sind[a].

Zu 324: *a.* Aus der auf nebenstehender Seite folgenden Figur ergeben sich sofort die Beziehungen



$d \cdot Si\,x_1 = C_2A_2 + A_2D - C_1A_1 = \Delta r \cdot Cs\,a + d \cdot Si\,z$
$d \cdot Si\,y_1 = B_2C_2 + C_2A_2 + A_2D - B_1C_1 - C_1A_1 =$
$= \Delta r \cdot Cs\,\alpha + \Delta r \cdot Cs\,a + d \cdot Si\,z$

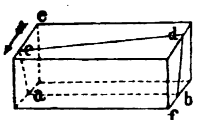
oder, da x, y, z nach vorläufiger Rektifikation des betreffenden Instrumentes nur ganz kleine Grössen sind, unter Benutzung der 1 sehr nahe

$$x_1 = z + n \cdot \Delta r \qquad y_1 = z + (m+n) \cdot \Delta r \qquad 3$$

während analog bei umgelegter Axe, da hiefür nur die r wechseln, also Δr das entgegengesetzte Zeichen annimmt,

$$x_2 = z - n \cdot \Delta r \qquad y_2 = z - (m+n) \cdot \Delta r \qquad 4$$

Aus Kombination der 3 und 4 gehen aber sofort die 2 hervor. — Bei der 323 : b erwähnten Libelle meines Meridiankreises erhielt ich vor dem Umlegen im Mittel aus sechs sehr wenig von einander differierenden Ablesungen bei je hoher, horizontaler und tiefer Lage des erst nach Nord, dann nach Süd gewendeten Okularendes: $l_1 = 29.9$, $r_1 = 64.3$, $l_2 = 60.2$, $r_2 = 26.0$, wo die l dem Ostende der Blase entsprachen, — auf analoge Weise nach dem Umlegen: $l_3 = 30.8$, $r_3 = 65.1$, $l_4 = 59.5$, $r_4 = 25.2$, — hieraus (323 : 4) $y_1 = 2''.426$, $y_2 = 3''.396$, — und endlich nach 1 und 2, da $d = 1110^{mm}$, $\alpha = 45^0$ und $a = 50^0$ war, $m = 262.80$, $n = 242.58$ und $\Delta r = -0^{mm}.0010$ oder $m \cdot \Delta r = -0'',263$. — Dass eine solche Bestimmung von Zeit zu Zeit, und namentlich jedesmal nach Erneuerung des Öles, zu wiederholen ist, braucht kaum gesagt zu werden; dagegen ist noch auf folgenden Umstand aufmerksam zu machen: Dreht man



ein Prisma ef in der Richtung des Pfeiles um ab, und ist cd nicht parallel ab, sondern c näher und d ferner, so sinkt c, während d steigt. Entsprechend wird, wenn die Axe der Libelle derjenigen des Instrumentes nicht parallel ist oder eine sog. **Lateralabweichung** hat, die Blase bei jeder kleinen Drehung der Libelle um die Aufsetzlinie sich dem **fernern Ende nähern**, — ein Vorgang, welcher ein sicheres Nivellieren unmöglich macht, aber, sobald er erkannt ist, nach seiner Ursache mit Hilfe der hiefür an der Fassung angebrachten seitlichen Korrektionsschrauben leicht beseitigt werden kann.

325. Die ersten Distanzbestimmungen. — Gegenüber blossen Distanzschätzungen war schon das Abschreiten oder Abfahren einer Distanz ein wesentlicher Fortschritt, besonders als sog. **Pedometer** oder **Hodometer** erfunden wurden, um das sichere Zählen der Schritte oder Radumläufe zu erleichtern [a]. Viel grössere Genauigkeit wurde dann allerdings erreicht, als man Messlatten, Messleinen, Messketten und dergleichen zur Anwendung brachte, und nach und nach die Konstruktion dieser Hilfsapparate, sowie die Manipulation mit denselben, zu verbessern wusste [b].

Zu 325: *a.* Schon im Altertum scheinen gewisse **Pedometer** (von πέδον = Boden, Erde, Land) oder **Hodometer** (von ὁδός = Weg, Strasse, Reise) in Anwendung gekommen zu sein, — möglicherweise (413) schon zur Zeit von **Eratosthenes** durch die egyptischen Wegmesser, jedenfalls aber vor **Vitruv**, da dieser in seiner „Architectura (lib. X, cap. 14)" von solchen spricht. Bei dem Wagen, welchen (416) **Fernel** bei seiner angeblichen Gradmessung benutzt

haben will, schlug bei jeder Umdrehung des Rades ein Hammer an eine im Wagen angebrachte Glocke, und es mussten die Schläge direkt gezählt werden, während bei dem von Levin **Hulsius** im „Vierdten Tractat der mechanischen Instrumenten. Franckfurt 1604 in 4." beschriebenen „Viator oder Wegzähler, so zu Fuss, zu Pferdt und zu Gutschen gebraucht werden kann" dieses Zählen bereits wie bei den neuern Apparaten dieser Art einer uhrähnlichen Vorrichtung anheimfällt, auf welche bei jedem Schritt oder Radumgang ein Zug ausgeübt wird. — *b.* Es ehrt die Araber, dass sie (414) bei ihrer Gradmessung bereits von Stäben Gebrauch machten. Beschaffenheit und Manipulation sind leider unbekannt, während man dagegen weiss, dass sich (416) **Snellius** eiserner und (418) **Picard** hölzerner Stäbe von je 12' Länge bedienten, welche längs einer gespannten Schnur direkt auf den Boden gelegt wurden. Überhaupt benutzten die Feldmesser im 16. und noch bis in das 17. Jahrhundert hinein, wie uns **Pühler** (1563), **Reinhold** (1574), **Reymers** (1583), **Zubler** (1607), etc., berichten, zu Längenmessungen meist „Messruten" von 10 oder 16 „schuch" Länge, zuweilen allerdings auch eine „wider sinns gedrehte, in öl gesotne und wol gewixte schnur". — Von unserer **Messkette** (Catena mensoria, chaîne d'arpenteur, catena da misurare, surveyors chain, Meetketting) fand ich die erste Erwähnung und Abbildung in „**Stevin**, Wisconstighe Ghedachtnissen van de Meetdaet. Leyden 1605 in fol. (pag. 48)"; dann aber scheint sie sich rasch auch in andern Ländern, und so namentlich durch Ed. **Gunter** in England, eingebürgert zu haben. **Norwood** bediente sich derselben (417) zu seiner Gradmessung, und noch gegen Ende des vorigen Jahrhunderts brachten General **Roy** in England und Professor **Tralles** in der Schweiz durch **Ramsden** konstruierte Stahlketten mit gutem Erfolge zur Verwendung.

326. Die ältern Basisapparate. — Der erste eigentliche Basisapparat war derjenige, welcher für die Gradmessung in Peru (421) mit grosser Umsicht konstruiert und mit dem sodann auch untadelhaft manipuliert wurde [a]. Ihm ähnlich, jedoch nach Konstruktion und Manipulation eher etwas unvollkommener, war der für die Gradmessung in Lappland (422) benutzte Apparat [b], und auch die zu Nachmessungen in Frankreich (423), zu einer Messung am Kap (424) und einigen spätern Basismessungen (425) verwendeten Systeme erreichten im allgemeinen kaum die Höhe ihres Vorbildes [c].

Zu 326: *a.* Der in Peru benutzte Apparat bestand aus drei hölzernen, 20-füssigen, verschieden bemalten Latten, welche am einen Ende einen horizontalen, am andern einen vertikalen Sägeschnitt besassen, in deren jedem eine Kupferlamelle so befestigt war, dass sie circa $1\frac{1}{2}$" vorragte, — und aus einer genügenden Anzahl von zum Tragen der Latten bestimmten Böcken (chevalets), die behufs Horizontalstellung der erstern etwas erhöht oder erniedrigt werden konnten. Beim Gebrauche wurden zuerst alle drei Latten in einer bestimmten Folge gelegt, — dann mit Hilfe einer gespannten Schnur und einer Libelle aligniert und nivelliert, — und hierauf sachte zur Berührung gebracht; nachher wurde die erste Latte abgehoben und vorgelegt, — u. s. f. Erlaubten die Böcke, infolge beständigen Steigens oder Fallens des Bodens, schliesslich nicht mehr, die vorgelegte Latte in das Niveau der übrigen zu bringen, so wurde unter Anwendung eines Senkels eine neue Lage begonnen, so dass also gewissermassen treppenförmig (par échelons) gemessen wurde.

Abends wurde die Endlage des Apparates sorgfältig versichert, und zwar erzählt „**Bouguer**, La figure de la terre. Paris 1749 in 4." in Beziehung hierauf: „Pour terminer le travail de chaque journée, et marquer avec précision le point où nous devions commencer le lendemain, nous faisions planter avec force dans la terre deux gros piquets à l'extrémité de la dernière perche; nous tendions de la tête de l'un à la tête de l'autre un fil horizontal, perpendiculaire à la direction de la base, lequel rasoit l'extrémité de la perche, et nous marquions sur la tête des piquets les points par lesquels passoit le fil". Überdies wurde Nachts der Apparat bewacht und ein für das hiezu beorderte Personal aufgestelltes Zelt diente zugleich dazu, einen Eisenstab, auf welchem die Normal-Toise sorgfältig abgetragen war und mit dem die Latten täglich wenigstens Ein Mal verglichen wurden, um ihre mit der Feuchtigkeit wechselnde Korrektion (équation) zu bestimmen, am Schatten halten zu können. — *b.* In Lappland kamen Latten von 30' Länge zur Verwendung, über deren Ajüstierung in „**Outhier**, Journal d'un voyage au Nord en 1736 et 1737. Paris 1744 in 4." folgendes mitgeteilt wird: „Nous avions porté de Paris une toise de fer, bien ajustée sur celles du Châtelet, avec un étalon aussi de fer, dans lequel la toise entrait bien exactement. On avait ajusté l'un à l'autre à Paris dans un tems que les thermomètres étaient à 14° au-dessus de zéro. Le 19 déc. 1736 nous conservâmes à cette même hauteur les thermomètres dans une chambre au moyen d'un bon feu. Nous fîmes cinq toises de bois de sapin, nous les armâmes à chacune de leurs extrémités d'un gros clou arrondi, que nous diminuâmes avec la lime, jusqu'à ce que la toise entrât bien exactement dans l'étalon. Nous poussâmes la précision jusqu'à l'épaisseur d'une feuille de papier". In ähnlicher Weise wurden sodann mit diesen fünf Toisen die grossen Latten in Übereinstimmung gebracht: Erstere wurden auf einer Unterlage aneinander gelegt und dann zwei Nägel eingeschlagen, zwischen die sie genau passten; dann wurden die grossen Stäbe ebenfalls armiert und an diesen Armaturen wieder so lange herumgefeilt, bis sie zwischen jene Nägel gelegt werden konnten. — Die Manipulation bei der Messung selbst scheint eine analoge wie in Peru gewesen zu sein; jedoch erfährt man nichts Genaueres über das Alignieren und Nivellieren der Stäbe, die Verwendung der „Supports", die Nachtversicherung der letzten Lage der Messlatten, die von Zeit zu Zeit vorgenommenen Untersuchungen der Länge der Latten und ihrer allfälligen Durchbiegung, etc., und hört bloss, dass lange nach beendigter Messung, nämlich 1737 V 1, eine Revision der Latten vorgenommen wurde, indem **Outhier** berichtet: „Mr Camus et moi avons remis à leur juste longueur de 5ᵗ les quatres perches qu'on avait fait venir d'Öfwer-Tornea et qui se trouvaient trop courtes chacune d'environ une demie ligne". — *c.* Zu der 1756 vorgenommenen Neumessung der Picard'schen Basis wurden (vgl. Mém. Par. 1761) mit Ölfarbe bemalte hölzerne und an beiden Enden mit Eisen beschlagene Stäbe verwendet. Da **Lemonnier** gefunden hatte, dass Temperaturwechsel auf diese Stäbe keinen merklichen Einfluss ausübe, während sie sich bei Befeuchtung etwas verlängerten, so bewahrte er sie an einem trockenen Orte auf; nichts destoweniger ergab sich ihm, als er sie 1761 nochmals mit dem früher gebrauchten Etalon von 40ᵗ verglich, dass sie sich in den 5 Jahren um volle $1^1/_2$''' d. d. oder um $^1/_{40}$ Procent **verlängert** hatten, so dass er ausrief: „Il semble qu'à mesure qu'on veut approcher de plus près de la précision, il naisse, pour ainsi dire, de nouveaux obstacles à surmonter, desquels on n'avait aucune idée". — Der einzige erhebliche Fortschritt in jener Zeit war, dass **Boscovich** bei seiner

Messung im Kirchenstaate mit der bisherigen Anwendung von Endmasstäben brach: Er legte auf seinen Holzlatten, die etwas mehr als 27 römische Spannen à $99^{1}/_{30}$''' P. hielten, entsprechend seinem Normalmasse drei Intervalle von je 9 Spannen durch Messinglamellen, auf denen je ein feiner Punkt markirt war, fest, — und brachte sodann beim Gebrauche die Latten nicht völlig zum Kontakte, sondern bestimmte mit Zirkel und Transversal-Masstab die Distanz der benachbarten Endpunkte.

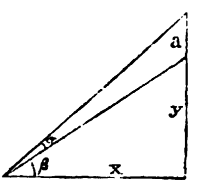
327. Die neuern Basisapparate. — Die neuern, d. h. die seit dem Ende des 18. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart konstruierten Basisapparate haben, mögen die eigentlichen Mass-Stäbe aus Eisen, Platin, Glas, etc. bestehen, das gemein, dass diese Stäbe auf sorgfältig konstruierte Stative zu liegen kommen, welche in horizontalem und vertikalem Sinne die für das Alignieren und Nivellieren wünschbaren Verschiebungen mikrometrisch auszuführen erlauben, — und dass Vorsorge getroffen ist, um die Temperatur der Stäbe fortwährend bestimmen, folglich deren Variationen in Länge eliminieren zu können [a]. Ferner werden die Stäbe, zur Verhütung von Verschiebungen, nicht zur wirklichen Berührung gebracht, sondern es wird jeweilen entweder ein kleiner Zwischenraum belassen und dieser mikrometrisch gemessen [b], — oder es wird, was entschieden noch vorzüglicher ist, das Ende des Stabes optisch fixiert und sodann der Stab nach Neulage verschoben, bis sein Anfang in optischem Kontakt mit dem Bilde des Endes steht [c]. — Für weitern Detail und andere Vorschläge muss auf die eigentliche Fachlitteratur verwiesen werden [d].

Zu 327: *a.* Die Temperatur der Stäbe wird entweder, wie z. B. bei dem durch **Schumacher** und **Repsold** für die dänische Gradmessung konstruierten, und später durch **Horner** und Joh. Georg **Oeri** (Zürich 1780 — ebenda 1852; Mechaniker in Zürich; vgl. Biogr. II) für die schweizerischen Vermessungen etwas modifizierten Apparate, direkt an eingelegten Thermometern abgelesen, — oder, wie z. B. an dem durch **Borda** und **Lenoir,** für die zur Grundlage des metrischen Systemes angeordneten Messungen, ausgeführten Apparate, aus der mikroskopisch abgelesenen Bewegung berechnet, welche das freie Ende eines Metallstabes (Kupfer von 0,0000 1717 Ausdehnung für 1° C.) macht, dessen anderes Ende auf dem eigentlichen Masstabe (Platin von 0,0000 0884 für 1° C.) festgeschraubt ist. — *b.* Unter Adoption dieser (326), schon durch **Boscovich** beliebten Methode, wurde bei ersterm der eben angeführten Apparate der Zwischenraum durch Einsenken des von **Reichenbach** zu diesem Zwecke vorgeschlagenen Messkeiles, — bei letzterm durch Vorschieben einer Zunge gemessen. — *c.* Der optische Kontakt, der mit Einem Stabe zu operieren erlaubt, wurde schon 1797 durch Joh. Georg **Tralles** (Hamburg 1763 — London 1822; Prof. math. et phys. Bern, dann Akad. Berlin; vgl. Graf in Bern. Biogr.) und Ferdinand Rudolf **Hassler** (Aarau 1770 — Boston 1843; Prof. math. West-Point und Superintendent der Coast Survey; vgl. Biogr. II und „Memoirs. Nice 1882 in 8.") in folgender Weise zur Anwendung gebracht: War der Stab, dessen Enden mit Spinnefaden markiert waren, und der auf seinem Stative auch in

der Längenrichtung verschoben werden konnte, zum ersten Male gelegt, so wurde über sein Ende ein, auf eigenem Stative am Boden ruhendes und nach allen Richtungen verschiebbares Mikroskop so aufgestellt, dass dessen festes Fadenkreuz damit coincidierte; dann wurde der Stab neu gelegt, so dass sein Anfang in dasselbe Kreuz fiel, — nunmehr das Mikroskop wieder über das Ende versetzt, — und so fort. Es kann darüber kein Zweifel bestehen, da nicht nur **Tralles** in seinem Voranschlage für 1797 unter den beabsichtigten geodätischen Arbeiten „die Wiedermessung der (1791 mit einer Ramsden'schen Stahlkette, vgl. 325, gemessenen) Hauptbasis (bei Aarberg) **nach einer Methode**, von welcher zu erwarten ist, dass alle ähnlichen Messungen an Genauigkeit übertroffen werden" aufzählt, — sondern sein damaliger Mitarbeiter **Hassler** in seinen „Papers on various subjects. Philadelphia 1824 in 4." nach Beschreibung des von ihm 1816 bei der amerikanischen Küstenvermessung gebrauchten Apparates mit optischem Kontakte, bei Erwähnung der Aarberger Basis ausdrücklich sagt: „This base was measured twice: first with a chain similar to that made by Ramsden for the english survey, — and secondly with an apparatus some what similar to that above described". Allerdings ist dann jener erste Apparat, dessen Princip 1810 auch von François **d'Aubuisson** de Voisins (Toulouse 1769 — ebenda 1841; Minen-Ingenieur) benutzt wurde, teils durch **Hassler** selbst, teils durch Ignacio **Porro** (Pignerol 1801 — Mailand 1875; Ingenieur) und namentlich durch Don Carlos **Ibannez** (Barcelona 1825 — Nizza 1891; Generaldirektor des span. geogr. Instit.) und **Brunner** noch ungemein vervollkommnet worden. — *d.* Vgl. **Delambre** et **Méchain**, Base du système métrique. Paris 1806—1810, 3 Vol. in 4., — **Schumacher**, Schreiben an Olbers über den Apparat zur Messung der Basis bei Braack. Altona 1821 in 4., — C. **Ibannez**, Base centrale de la triangulation géodésique d'Espagne. Tradu. par A. Laussedat. Madrid 1863 in 8., — A. **Westphal**, Basisapparate und Basismessungen (Z. f. Instr. 1885—88), — E. **Jäderin**, Geodätische Längenmessung mit Stahlbändern und Metalldrähten. Stockholm 1885 in 8., — etc."

328. Die sog. Distanzmesser. — Die Erläuterung der in der Astronomie zur Anwendung kommenden Methoden für indirekte Distanzbestimmung spätern Abschnitten vorbehaltend, erinnere ich hier nur beiläufig an die verschiedenen Hilfsmittel, welche man als **Distanzmesser** (Tachymeter) behufs rascher, wenn auch nur angenäherter Ermittlung der Entfernung eines sog. unzugänglichen Punktes erfunden hat[a].

Zu 328: *a.* Schon Ludwig **Wenz** (Basel 1695 — ebenda 1772; Prof. mech. und Stadtnotar in Basel) zeigte in seiner „Solutio famosissimi problematis geometrico-practici de invenienda distantia objecti remoti ope unicæ et cujus cunque, ut vocant stationis (Acta helv. IV von 1760)", dass, wenn man die beiden Höhenwinkel $(\alpha + \beta)$ und β zweier im Abstande a vertikal übereinander stehender Punkte messe, daraus die Horizontaldistanz x gefunden werden könne, indem man sofort



$$x \cdot \mathrm{Tg}\,(\alpha + \beta) - x \cdot \mathrm{Tg}\,\beta = a \qquad \mathbf{1}$$

erhalte, und somit x berechnen könne. Da in allen Anwendungen a gegen x klein ist und überdies β auf einen kleinen Winkel

reduziert werden kann, so ergiebt sich

$$x = a \cdot Ct\,\alpha \cdot Co^2\,\beta \qquad \text{und sodann} \qquad y = {}^1/_2 \cdot a \cdot Ct\,\alpha \cdot Si\,2\,\beta \qquad 2$$

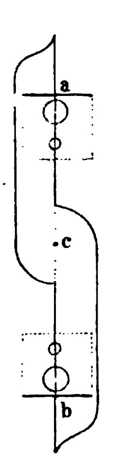
und man kann daher, bei Anwendung eines Fernrohrs mit zwei horizontalen Faden der Winkeldistanz α, durch Ablesung der zwischen die Faden fallenden Strecke a einer an dem zu bestimmenden Punkte aufgestellten Messlatte und des Höhenwinkels β, die gesuchten x und y leicht berechnen, ja sich sogar diese Rechnung bei Anwendung eines geeigneten Rechenstabes auch noch ersparen, wie dies des Nähern aus „Joh. **Wild**, Über die topographische Vermessung des Kantons Zürich, nebst Erklärung des dabei angewandten logarithmischen Rechenstabes (Verh. techn. Ges. Zürich 1847)" zu ersehen ist. — Auf andere Tachymeter kann ich hier nicht eintreten.

329. Die allgemeinen Principien der Winkelmessung. — Das Messen eines Winkels besteht im allgemeinen darin, dass man eine geeignete, alsbald näher in Betracht zu ziehende Vorrichtung, ein sog. **Winkelinstrument**, über dem Scheitel desselben **aufstellt**, — sodann gewisse bewegliche Teile des Instrumentes, sei es gleichzeitig, sei es successive, den beiden Objekten accomodiert, welche die Schenkel des Winkels markieren, oder, wie man sagt, nach diesen **visiert**, — nunmehr die Lage jeder dieser Visuren, sei es auf graphischem Wege fixiert, sei es, was das Gewöhnlichere ist, entweder an einer geradlinigen Scale oder an einer Kreisteilung **abliest**, — und endlich aus diesen Aufzeichnungen oder Ablesungen auf die Grösse des Winkels schliesst, sagen wir, denselben **berechnet**. Die Genauigkeit einer Winkelmessung wird somit wesentlich von der Sicherheit abhängen, mit welcher diese verschiedenen Operationen ausgeführt werden können, und diese Sicherheit wird ihrerseits an die Beachtung gewisser allgemeiner Principien gebunden, aber auch von dem Bau der einzelnen Instrumente abhängig sein. Das folgende wird in diesem Sinne erst das Allgemeine, dann das Specielle möglichst gedrängt abhandeln.

330. Die ältern Visiermittel. — Es gehört zu den vielen Verdiensten von **Hipparch**, der Winkelmessung grössere Sorgfalt zugewandt, und so z. B. behufs genauerer Visuren an den beiden Enden des über einem geteilten Kreise drehbaren Radius oder Durchmessers, als sog. **Absehen** oder **Diopter**, kleine prismatische Blättchen mit sich entsprechenden kreisrunden Öffnungen aufgesetzt zu haben[a]. Überdies hatte er den guten Gedanken, solche Diopter auch zur direkten Bestimmung kleiner Winkel zu verwenden, indem er das eine, das dem Auge zugewandte **Okulardiopter**, welchem er eine ganz kleine Öffnung gab, am Ende eines etwa vier Ellen langen Stabes fest aufstellte, — das andere oder **Objektivdiopter**, welches eine etwas grössere Öffnung erhielt, dagegen längs des Stabes ver-

schob, bis der Durchmesser des durch die beiden Öffnungen bestimmten Gesichtskegels der zu messenden scheinbaren Distanz entsprach, — und schliesslich aus dem dafür nötigen Abstande der beiden Diopter den gewünschten Winkel ableitete [b].

Zu 330: *a.* Der Name **Diopter** kömmt von *διόπτρα* = Werkzeug zum Durchsehen. **Ptolemäus** braucht im Almagest statt dessen meist die Bezeichnung *πρισμάτια κύκλων*, doch kömmt auch einmal (Alm. Halma I 339) dafür das Wort *διόπτρα* vor, das übrigens ja schon in der von **Heron** mutmasslich (65: a) noch früher verfassten Anleitung zum Feldmessen „*Ἥρωνος Ἀλεξανδρέως περὶ διόπτρας* (von Alex. Vincent mit franz. Übers. in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque impériale, Vol. 19 von 1858, publiziert)" als Benennung eines Instrumentes erscheint, das aus einem 4 Ellen langen, auf einer runden Scheibe drehbaren Stabe bestand, der an beiden Enden Absehen trug, welche aber allerdings, statt kreisrunden Öffnungen, kreuzweise Einschnitte gehabt haben sollen. Sonst kommen auch wohl statt Diopter die Namen pinna = Flosse (Vitalis: Lexicon 1668), pinnula (Köbel: Astrolabium 1532; daher pinnule), pinnacidia (Tycho: Epistolæ 1596), buco = Loch (Danti: Astrolabium 1578), Gesichtsblechlein mit Löchlein (Ritter: Astrolabium 1613), tabella = Bretchen (Köbel l. c.), assicella = Bretchen (Danti l. c.), etc., vor. — Von den Griechen gingen die Diopter zu den Arabern über, welche die mit ihnen erhältliche Visur dadurch wesentlich verschärften, dass sie dieselben nicht nur zum Niederlegen und Aufklappen mit Charnieren versahen, sondern in a und b auf einem um das Centrum c drehbaren Stabe von beistehender Gestalt, der in ihren Spitzen zugleich Indices darbietenden sog. **Alidade**, so aufsetzten, dass die Visierlinie einem wirklichen Durchmesser, der sog. **Linea fiduciæ** (von fiducia = Zutrauen), entsprach. In dieser Form finden wir dann auch die Dioptra von mehreren abendländischen Schriftstellern aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts (so von Köbel l. c.) beschrieben, — ja noch an einem 1599 durch Antonius **Gianin** in Rom verfertigten „Astrolabium planisphærium (360)" erscheint genau dieselbe Konstruktion, und zwar ist a b = 19^{cm}, während die beiden Diopter 22^{mm} Höhe auf 32^{mm} Breite haben, und der Durchmesser der obern Öffnung etwa $^2/_3$, derjenige der untern etwa 3^{mm} hält. — Früher wurde „Alhidade" geschrieben, in der Meinung, dass dies Wort aus „Al Hidad (der Zähler)" entstanden sei; in der neuern Zeit hat man dagegen (vgl. Zöppritz in 162) in einem von der Konstruktion des Astrolabiums handelnden arabischen Manuskript die bestimmte Angabe gefunden, dass das Wort „al-'idâda" eine Art „mastara" oder Lineal bezeichne, also sich auf den Diopterlineal beziehe und somit „Alidade" zu schreiben sei. Statt Alidade kommen auch die Bezeichnungen Radius visualis, Ostensor = Zeiger (Vitalis l. c.), Regula, Volvella (von volvo = ich drehe), Mediclinium = Mittellinie (Köbel l. c.), etc., vor. — In der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts wurden beim Okulardiopter die kreisrunden Öffnungen meistens durch Spalten, sog. **Rimulæ**, ersetzt, während das Objektivdiopter in ein Rähmchen überging, in dessen Mitte ein zum Lineal senkrechtes Metallblättchen oder Rosshaar eingesetzt wurde, das nunmehr mit der Rimula die Linea fiduciæ bestimmte. Ob die „Rimulæ pinnacidiorum", welche etwa 1583 Paulus **Wittichius** von Hveen nach Kassel brachte,



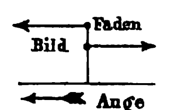
[illegible] Erfindung von **Tycho** [illegible] waren, muss [illegible]; dagegen mag noch angeführt werden, dass **Tycho** wenigstens bei einzelnen seiner grossen Quadranten [illegible] Diopter [illegible] arbeiten liess, das bei Nacht beleuchtet wurde, während die am [illegible], von zwei verschiedenen Beobachtern zu [illegible] [illegible] je zwei Spalten erhielten, welche um den Durchmesser des [illegible] von einander abstanden, — dass **Bürgi** dagegen der zur Einen [illegible], das [illegible] am Centrum [illegible]. — dass ferner [illegible] beiden Diopter [illegible] waren, dass das eine oben als Okular [illegible] das andere unten als [illegible] und dem als Objektiv dienen [illegible], so dass sie ein sog. **Amphidiopter** (von [illegible] = auf beiden Seiten) [illegible] und rückwärts zu gebrauchen bildeten, — und dass endlich **Brander** (vgl. Verz. [illegible]) solche Doppeldiopter verfertigte, bei welchen die Okulare durch Bohrungen, die Objektive dagegen durch Glasscheibchen mit eingeritzten Kreuzlinien dargestellt waren. — *b.* **Bürgi** konstruierte (vgl. Mitth. 45 von 1876) zu gewissen Zwecken, so z. B. um à la Hipparch scheinbare Durchmesser bestimmen zu können, ohne das Objektiv verschieben zu müssen, Diopter, bei welchen die Weite der Spalte messbar verändert werden konnte. Anhangsweise füge ich bei, dass auf der Scheibe von **Herons** Dioptra zwei kleine Zäpfchen angebracht waren, bis zu welchen successive der Stab gedreht werden musste, um einen rechten Winkel zu erhalten, und somit sein Instrument bereits die nachmals von den Geometern des Abendlandes vielgebrauchte, so z. B. von Johannes **Ardüser** (Lenz 1584 — Zürich 1665; Ingenieur Zürich; vgl. Biogr. IV) in seinen „Geometriæ theoricæ et practicæ XII Bücher. Zürich 1627 in 4. (2. A. in 14 B. 1646)" einlässlich behandelte **Kreuzscheibe** (Winkelkreuz, Equerre d'arpenteur) vertrat. Da ferner jene Scheibe, wie aus „Cantor, Die römischen Agrimensoren. Leipzig 1875 in 8. pag. 20" hervorgeht, mit einer kleinen Kanalwage horizontal gestellt werden konnte, auch der Stab auf und mit der Scheibe, also in vertikalem und horizontalem Sinne, drehbar war, so fehlte so ziemlich nur noch eine Kreisteilung, um die Dioptra als Vorläufer des Azimutalquadranten (319) betrachten zu können.

331. Das Fernrohr mit Fadenkreuz. — Nach Erstellung des Fernrohrs lag der Gedanke nahe, dasselbe auch an Instrumenten als Visiermittel anzubringen [a]; aber in erfolgreicher Weise geschah dies erst, als Will. **Gascoigne** etwa 1640 darauf verfiel, den Umstand zu benutzen, dass man in einem astronomischen Fernrohr neben dem reellen Bilde eines äussern Objektes auch jeden in die Bildebene gebrachten Gegenstand, wie etwa einen über letztere gespannten Faden, sehen, also die Linea fiduciæ der Alten z. B. durch die Verbindungslinie des optischen Mittelpunktes der Objektivlinse mit dem Schnitte zweier solchen Faden, dem sog. **Fadenkreuze**, ersetzen kann [b]. Dieses Procedere wurde jedoch anfänglich von andern kaum beachtet [c], und so kam es, dass Adrien **Auzout** [d] und Jean **Picard** dasselbe etwa 1667 nochmals erfinden und nunmehr definitiv in die Astronomie einführen konnten [e]. Da schon diese letztgenannten den schädlichen Einfluss der sog. **Fadenparallaxe** bemerkten und auch eine allfällige **Kollimation** in Betracht zogen [f], so blieb es der

neuern Zeit fast nur vorbehalten, das Material, die Anlage und die Beleuchtung der Fadennetze nach und nach zu vervollkommnen, was dann aber allerdings in ausgiebiger Weise gelang *g*.

Zu 331: *a.* Aus „Jean-Baptiste **Morin** (Ville-Franche in Beaujolais 1583 — Paris 1656; erst Arzt, dann Prof. math. Paris), Longitudinum scientia. Parisiis 1634 in 4." geht unzweifelhaft hervor, dass schon dieser Gelehrte dem Visieren mit dem Fernrohr nachhelfen wollte; aber da er nur „belgische" Fernröhren besass und diese einfach auf die, hiefür oben etwas ausgeschnittenen, Absehen seiner Instrumente auflegte, so kann er nur als Vorläufer dieser Neuerung, nicht als Erfinder derselben bezeichnet werden. Die für **Henrion** erhobenen Ansprüche beruhen wohl nur auf dem Umstande, dass man aus dem Titel seiner Schrift „L'usage du Mécomètre. Paris 1630 in 8." glaubte schliessen zu dürfen, er behandle in derselben eine mikrometrische Vorrichtung, während er nur ein etwas abgeändertes Astrolabium beschrieb, das weder Fernrohr noch Mikrometer besass. — *b.* Aus den Briefen von Will. **Gascoigne** an Will. Crabtree und Will. Oughtred folgt unumstösslich, dass er nicht nur schon 1640 seine Fernröhren mit mikrometrischen Vorrichtungen versah (391), sondern auch an seinem Höhenquadranten ein Fernrohr anbrachte, in dessen Focus ein Haar (hair, thread) gespannt war, welches er Nachts mit einer Lampe (a candle in a lantern) sichtbar zu machen wusste. Vgl. „**Derham**, Extracts from Mr. Gascoigne's and Mr. Crabtree's Letters, proving Mr. Gascoigne to have been the inventor of the telescopic sights of mathematical instruments (Ph. Tr. 1717), — Correspondence of scientific men of the 17. century. Oxford 1841, 2 Vol. in 8. (I 33—59), — **Grant**, History of physical Astronomy. London 1852 in 8. (p. 451 f.), — etc." — *c.* Es scheint, dass die Erfindung von **Gascoigne** lange Jahre ausserhalb England ganz unbekannt blieb, und so dürften Francesco **Generini** (Florenz 1593? — ebenda 1663; Bildhauer, Kupferstecher, Wasserbaumeister und Mechaniker), in dessen Nachlass sich (vgl. Zach in Zeitschr. f. Astr. IV 3—10) ein „Brevissimo discorso del telescopare gli strumenti geometrici" vorfand, und Cornelio **Malvasia** (Bologna 1603 — Pamano bei Bologna 1664; General in päpstlichen Diensten), der 1662 in seinen Ephemeriden behauptete, schon „lange Jahre" ein im Focus des Fernrohrs stehendes Netz aus Silberfaden (393) zu gebrauchen, ebenfalls ein gewisses Anrecht auf selbstständige Erfindung haben. — *d.* Adrien **Auzout** (Rouen 1640? — Rom 1691) gehörte zu den ersten und vorzüglichsten Mitgliedern der Pariser Akademie, wurde aber schon 1668 durch eine Intrigue beseitigt, worauf er in Florenz und Rom privatisierte. — *e.* Ob **Huygens**, der (vgl. dessen „Systema Saturnium" von 1659 und unsere 393) schon vor 1659 sein Fernrohr mit einer mikrometrischen Vorrichtung versehen und vielleicht zu ähnlichen Zwecken auch Faden eingezogen hatte, seine beiden Kollegen **Auzout** und **Picard** zu einer solchen Neuerung veranlasste, weiss man nicht genau, — gewiss ist dagegen (vgl. „Le Monnier, Histoire céleste. Paris 1741 in 4., p. 11" und unsere 391), dass letztere von 1667 hinweg ihre Instrumente mit Fernröhren versahen, welche teils Fadenkreuze, teils Mikrometer besassen, und dass sodann dieser Gebrauch, wenigstens bei den grössern Instrumenten der Astronomen, bald ziemlich allgemein wurde. Nur **Hevel**, dem es nicht recht klar geworden zu sein scheint, dass das Fadenkreuz keineswegs ein einzelner Punkt ist, sondern eine sichere Visierlinie bestimmt, hielt unentwegt an seinen, ungefähr nach Art der Bürgi'schen konstruierten, Dioptern fest, und als ihm **Hooke** etwa

1669 zur Empfehlung des Fernrohrs als Visiermittel seine „Description of the dioptric telescope" zusandte, antwortete er, dass er seine Beobachtungen für ebensogut als die von Hooke mit dem Fernrohr gemachten halte. Dies verdross **Hooke** und er sprach sich 1674 in sog. „Animadversiones" in so arroganter Weise über den im Vorjahre erschienenen ersten Teil der „Machina coelestis" aus, dass sich **Hevel** ernstlich beleidigt fühlte und die Roy. Society ersuchte, den Sachverhalt durch eines ihrer Mitglieder prüfen zu lassen. Die Wahl fiel auf den jungen **Halley,** der hierauf mit Hooke'schen Instrumenten nach Danzig reiste und dort von 1679 V 26 bis VII 18 an der Seite von Hevel vergleichende Beobachtungen anstellte, deren unerwartetes Resultat darin bestand, dass Halley erklären musste, **es beobachte Hevel mit blossem Auge und seinen Dioptern ebensogut als er mit seinem Fernrohr.** Für weitern Detail auf „**Hevel**, Annus climactericus. Gedani 1685 in fol." und die Ph. Tr. von 1685 verweisend, bemerke ich noch, dass somit die Diopter, dank dem scharfen Auge und der seltenen Beobachtungsgabe von **Hevel**, ihren Rückzug in ehrenvollster Weise antreten konnten. — *f.* Auf die **Kollimation** werde ich in 350 näher eintreten; dagegen mag schon hier in Beziehung auf die, eine sichere Visur verhindernde **Fadenparallaxe,** bemerkt werden, dass dieselbe entsteht, wenn die Fadenplatte nicht genau mit der Bildebene des Objektives zusammenfällt.



Es wird nämlich in diesem Falle offenbar, wenn man das Auge vor dem Okulare hin- und herbewegt, der Faden oder das Bild mit dem Auge zu gehen scheinen, je nachdem die Fadenplatte ferner oder näher als die Bildebene ist. Sobald man aber hierüber ins klare gekommen, hat es keine Schwierigkeit, diese Fehlerquelle zu verstopfen, da an jedem Instrumente schon durch den Mechaniker dafür gesorgt wird, dass man die Fadenplatte etwas verschieben kann. — *g.* Die Fadenkreuze von **Auzout** und **Picard** bestanden (wie bei Gascoigne) aus Haaren (cheveux), — während **La Hire** die Verwendung von feinen Glasfaden empfohlen haben soll, — **Rost** 1727 entweder einen „subtilen Seidenfaden", oder ein „Menschenhaar", oder noch besser (mit Malvasia) einen „silbernen Drat" angewandt wissen wollte, — **Brander** häufig (vgl. seine „Beschreibung des Planisphærium astrognosticum æquatorialis. Augsburg 1775 in 8." und unsere 300 : a), statt Faden, Gläser mit eingeritzten Linien verwendete, — und endlich Felice **Fontana** (Pomarolo im Tirol 1730 — Florenz 1805; Prof. phys. Pisa, dann Dir. Mus. Florenz) in seinem „Saggio del real gabinetto di fisica et di storia naturale. Roma 1775 in 4." die Einführung von Spinnefaden beliebte. Von letzterm Vorschlage nahm **Brander** (vgl. Verz. 259) alsbald Notiz, — namentlich aber wurde er von **Rittenhouse** (vgl. dessen Schrift von 1786 in 166 : a), sowie etwas später von **Troughton** und **Zach** sehr lebhaft begrüsst, und man liest z. B., wie mir Guillaume **Bigourdan** (Sittels in Tarn et Garonne 1851 geb.; Obs. Toulouse und Paris) freundlichst mitteilte, in dem Beobachtungsbuche von **Flaugergues** im Mai 1805 die bezügliche Note: „M. le Baron de Zach, lors de son passage à Donzère, me conseilla de garnir mes instruments avec des fils d'araignée qui sont bien plus fins que ceux de cocons et beaucoup plus élastiques, et il m'enseigna la manière de les placer: il faut pour cela les coller par les deux bouts aux branches d'un compas; on écarte ensuite ces branches peu à peu jusqu'à ce que le fil soit tendu au point d'être près de se rompre; on l'applique alors sur le diaphragme et le fixe avec du mastic". Es verbreitete sich sodann diese Anwendung der Spinnefaden in unserm Jahrhundert fast allgemein, teils wegen derer relativ grosser Dauer-

haftigkeit, teils namentlich auch wegen ihrer fast beliebig zu wählenden Feinheit. In Beziehung auf letztere kann z. B. angeführt werden, dass nach **Struve** beim Pulkowaer Refraktor die Faden des Mikrometers bei einer Focaldistanz von 22,55 Fuss einen scheinbaren Durchmesser von 0",32 oder also einen wahren Durchmesser von $0{,}011^{mm} = 11^{\mu}$ besitzen, und **Wolfer** entsprechend für die Faden des Positionsmikrometers am Zürcher Achtfüsser den scheinbaren Durchmesser gleich 0",949 oder den wahren Durchmesser gleich $11{,}5^{\mu}$ fand. — Für die gegenwärtig bei den verschiedenen Instrumenten gebräuchlichen Kombinationen von festen und beweglichen Faden auf deren später folgende Beschreibung verweisend, bleibt noch zu erwähnen, dass die Faden bei Nacht in geeigneter Weise, wie es schon **Gascoigne** anstrebte, sichtbar gemacht werden müssen. Es wird dies entweder nach dem Vorschlage von **Römer** dadurch erreicht, dass man mit einem durchbrochenen Vorsteckspiegel durch das Objektiv, oder noch besser nach **Ramsden** (vgl. Piazzi im Journ. d. Sav. 1788) durch die hohle Drehaxe und einen in ihrem Durchschnitte mit der optischen Axe angebrachten, etwas drehbaren Spiegelring, der in neuerer Zeit wohl auch zu Gunsten centrischer Beleuchtung durch eine Kombination von kleinen Prismen und Spiegeln ersetzt worden ist, das Gesichtsfeld mässig beleuchtet, wobei die Faden als dunkle Linien auf hellem Grunde erscheinen, — oder endlich nach dem Vorschlage von M. A. **Pictet** (vgl. Bibl. univ. 1827) durch eine Seitenöffnung an der Okularröhre Licht auf die Faden wirft, die sich sodann als helle Linien vom dunkeln Hintergrunde abheben. Bei Beobachtung sehr heller Gestirne (Sonne, Venus, etc.) ist umgekehrt eine angemessene Abblendung notwendig, welche meist durch Vorsetzen farbiger oder berusster Gläser erreicht wird, wie solche (vgl. Delambre IV 681 und Apians Astronomicon) schon vor Erfindung des Fernrohrs durch die holländischen Seefahrer und durch Peter **Apian** benutzt wurden.

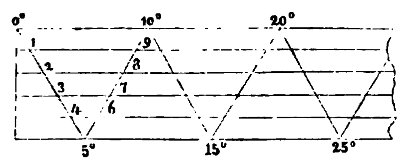
332. Die graphische Bestimmung der Winkel. — In den ältesten Zeiten waren die Begriffe von wahren und scheinbaren Grössen oder Abständen noch nicht recht ausgeschieden, sonst würde man nicht Feuerkugeln nach ihrer Grösse mit Pflaumen, Heubündeln u. s. f. verglichen, — Mond und Sonne als Scheiben von Ein Fuss Durchmesser beschrieben, — Distanzen von Sternen in Ellen angegeben haben, — etc., und man hätte es nicht schon als einen grossen Fortschritt zu bezeichnen, dass letztere etwas später zuweilen in Mondbreiten ausgedrückt wurden. Erst nachdem man sich über jenen Unterschied klar geworden war, konnte die Rede von Winkelabständen sein und das Bedürfnis entstehen, dieselben darzustellen, zu vergleichen und zu messen. Aus diesem letztern ging sodann zunächst die sog. **Schmiege**[a] und aus dieser nach und nach der sog. **Messtisch** mit **Diopterlineal** hervor[b], nach dessen späterer Vervollkommnung sich in Verbindung mit dem durch Tob. **Mayer** eingeführten **Principe der Multiplikation** auch ein Mittel ergab, auf graphischem Wege einen Horizontalwinkel mit grosser Annäherung zu bestimmen[c].

Zu 332: *a.* Die dem Zirkel verwandte **Schmiege** (le récipiangle, l'équerre fausse) bestand aus zwei, um einen Punkt oder Kopf drehbaren Stäben oder Schenkeln. Beim Gebrauche wurde der Kopf ans Auge gesetzt; sodann richtete man die Schenkel durch Öffnen oder Schliessen auf die beiden Winkelobjekte und erhielt so direkt den Winkel. Letzterer wurde dann nachher in der Regel auf ein Brett abgetragen, — aus dem Scheitel ein beliebiger Hilfskreis beschrieben, — und auf diesem die durch den Winkel bestimmte Sehne in der Weise herumgetragen, wie es schon früher (57) auseinander gesetzt wurde. — *b.* Da besonders häufig Horizontalwinkel zu messen waren, so fand man es später ratsam, dem Brette ein Stativ zu geben, mit dem es horizontal gestellt werden konnte, — die Schmiege durch ein Diopterlineal zu ersetzen, — und die Visierlinien direkt längs diesem zu ziehen; d. h. es entstand der sog. **Messtisch** (die Mensel, la planchette), welcher sich bei den Geometern mit Recht bis in die Gegenwart erhalten hat. — Die Geschichte dieses nützlichen, aber eben nach und nach aus einem unansehnlichen Anfange hervorgegangenen Instrumentes, lässt sich kaum mit Sicherheit feststellen; denn obschon es Thatsache ist, dass bereits **Stevin** 1605 in seinen „Wisconstige Gedachtenissen (II 30)" das Princip des Messtisches aussprach, und auch das in „**Schwenter,** Beschreibung des nutzlichen geometrischen Tischleins von Joh. Prætorio erfunden. Nürnberg 1619 in 4. (auch 1627 als Tractat III von dessen Geom. pract.)" enthaltene Zeugnis, es habe sein Lehrer Johannes **Prätorius** (Joachimsthal 1537 — Altdorf 1616; Mech. Nürnberg, dann Prof. math. Wittenberg und Altdorf) die nach ihm benannte „mensula prætoriana" spätestens 1611 in einer gewissen Vollkommenheit in die Praxis eingeführt, als durchaus glaubwürdig bezeichnet werden muss, so ist nicht zu vergessen, dass auch noch andere berechtigte Ansprüche vorhanden sind: Nicht nur geht aus „Johan **Sems** en Jan-Pietersz **Dou**, Practyck des Landmetens. Amsterdam 1600 in 4. (und später; auch deutsch durch Seb. Curtius 1616)" ziemlich unzweifelhaft hervor, dass verschiedene holländische Feldmesser schon vor Stevin einen rohen Messtisch benutzten, sondern es geschah solches ohne nachweisbaren Zusammenhang nicht minder frühe in der Schweiz, da Leonhard **Zubler** (Zürich 1563 — ebenda 1609; Mech. und Ratsherr Zürich) in seiner „Fabrica et usus instrumenti chorographici, das ist newe, planimetrische Beschreibung u. s. f. Basel 1607 in 4. (auch lat. durch J. C. Waser)" angiebt, es sei ihm „nit zu wissen dass dergleichen einfaltiges und doch nutzliches Instrument in den Truck kommen", sondern ihm die Idee durch Philipp **Eberhard** (Zürich 1563 — ebenda 1627; Steinmetz und Stadtdachdecker in Zürich) mitgeteilt worden, ja noch der etwas spätere **Ardüser** (vgl. 330 : b), ohne etwas von Stevin und Prätorius zu wissen, die betreffenden Operationen auf einem mit Papier überspannten, auf einem Stuhl „nach dem Horizont" gelegten Brett auszuführen lehrt. — *c.* Ein näheres Eingehen auf die successive Ausbildung des für den Topographen noch jetzt unentbehrlichen Messtisches und die damit auf graphischem Wege lösbaren Aufgaben, unter welchen die Pothenot'sche (vgl. 67) hervorragt, wäre hier kaum gerechtfertigt, und es mag einzig noch folgendes beigefügt werden: Sucht man, z. B. mit Hilfe der schon von **Schwenter** erwähnten **Einlotzange,** den über dem Scheitel des zu messenden Winkels stehenden Punkt des Tisches auf, — visiert von diesem nach dem einen Winkelpunkte und dann nach dem andern, — stellt nun durch Drehen des Tisches das Diopterlineal wieder auf den ersten Punkt zurück, und visiert nochmals auf den zweiten, — dreht dann wieder den Tisch, etc., bis nach n solchen Doppeloperationen die letzte

Visur einen Winkel von etwas mehr als b Umdrehungen mit der ersten bildet, so hat man, wenn c die Distanz der dem Radius r entsprechenden Punkte der ersten und letzten Visierlinie, a aber den zu messenden Winkel bezeichnet,

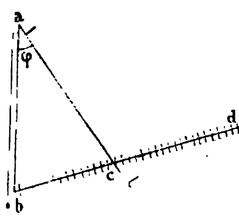
$$n \cdot a = b \cdot 360^0 + \text{Ast}\,(c : r) \qquad 1$$

woraus sich a mit Hilfe einer Sehnentafel oder des durch Tob. **Mayer** eingeführten **geradlinigen Transporteurs** (vgl. Fig., in welcher zum Auftrage der Sehnen von 5°, 10°, etc. ein Decimeter für r = St 60° angenommen wurde) bei Vermeidung konstanter Fehler offenbar um so genauer bestimmen lässt, je grösser n ist. Das hiebei in Anwendung gekommene „Princip der Multiplikation" wurde in „Tob. **Mayer**, Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum geometricum (Comm. Gott. II von 1752)" zuerst ausgesprochen.



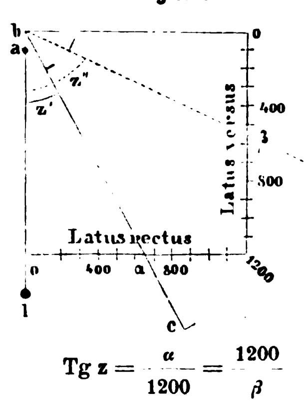
333. **Die Instrumente mit Gerad-Teilungen.** — Der **Schmiege** machten nach und nach andere, etwas grössere Genauigkeit bietende, mit Längs- oder Kreis-Teilungen versehene Vorrichtungen zum Winkelmessen Konkurrenz, und zwar dürfte von denjenigen mit **Gerad-Teilung** die älteste das von **Ptolemäus** beschriebene und für alle Zeiten wegen dem von ihm durch **Coppernicus** (263) gemachten Gebrauch ehrwürdige **Triquetrum** (Regula Ptolemaica, parallaktischer Lineal) sein [a]. Dann folgte etwa das schon bei den Arabern auftauchende und offenbar mit ihrer Entwicklung der Goniometrie (62) zusammenhängende, im Abendlande durch **Purbach** beliebte und daher oft nach ihm benannte **Quadratum geometricum** [b]. Endlich erscheint, spätestens von der ersten Hälfte des 15. Jahrhunderts hinweg, neben ihnen der allerdings erst durch **Regiomontan** und den in der Nautik davon gemachten Gebrauch zu grösserm Ansehen gekommene **Jakobsstab** (Baculus astronomicus, Gradstock, arbalèstrille, cross-staff) [c].

Zu 333: *a.* Das **Triquetrum** bestand aus einem lotrecht und drehbar aufgestellten Stabe ab, um dessen obern Endpunkt a sich ein Stab ac mit Diopteru drehte, welcher in der Distanz ac = ab eine Schlaufe besass, durch die ein ebenfalls um b drehbarer und mit einer Teilung versehener Stab $bd = ab \cdot \sqrt{2}$ ging, so dass, wenn c und d zusammengebracht wurden, ac eine horizontale Lage erhielt. Beim Gebrauche wurde ac mit Hilfe der Diopter auf den Punkt, dessen Höhe bestimmt werden sollte, eingestellt, dann der Stand von c an der Scale abgelesen, und schliesslich der dem Komplemente der Höhe gleiche Winkel φ entweder in einer Sehnentafel aufgeschlagen oder nach der Formel



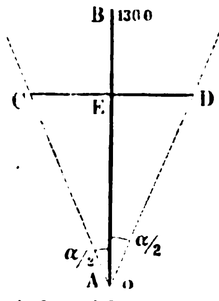
$$\varphi = 2 \cdot \text{Asi}\,\frac{bc}{2 \cdot ab} \quad \text{aus welcher} \quad d\varphi = \frac{d\,(bc)}{ab \cdot \text{Co}\,{}^1\!/_2\,\varphi \cdot \text{Si}\,1''} \qquad 1$$

folgt, berechnet. Bei dem Triquetrum, das sich **Coppernicus** selbst aus Holz verfertigt hatte und das später von **Tycho** als Reliquie aufbewahrt und (Astr. mech. C) beschrieben wurde, mass ab nach Ptolemäischer Vorschrift 4 Ellen und bd hatte 1414 mit Tinte aufgetragene Teile, von welchen 1000 auf ab gingen; es ist daher kaum zu weit gegriffen, wenn man bei diesem Instrumente den aus Einstellung, Teilung und Ablesung resultierenden Fehler $d(bc) = 1$ (circa 1''' Par.) setzt, wofür nach 1 (für $\varphi = 90^0$) der Maximalfehler $d\varphi = 292'$ folgt, und man darf daher (vgl. 263) die Genauigkeit einer Messung wohl kaum auf 5' taxieren. Noch ist beizufügen, dass bei dem von **Ptolemäus** selbst beschriebenen Triquetrum bd noch keine Teilung besass, sondern ab sexagesimal abgeteilt war und jeweilen bc an dieser Scale abgemessen wurde, welche erst **Regiomontan** auf bd verlegte. — *b.* Das **Quadratum geometricum** war ein wirkliches, später meist auf einer Messingtafel dargestelltes Quadrat, dessen eine Seite mittelst einem in a aufgehängten Lote l vertikal gestellt wurde, während zwei andere Seiten, über welche sich der um b drehbare Diopterlineal bewegte, je in 12 Hauptteile (Hunderter) à 10 Unterabteilungen (Zehner) geteilt waren, somit erlaubten, die einer Visur entsprechende Ablesung α am sog. **Latus rectus** oder β am sog. **Latus versus** zu machen, aus welcher nachher die Zenitdistanz z nach einer der Formeln



$$\operatorname{Tg} z = \frac{\alpha}{1200} = \frac{1200}{\beta} \qquad \operatorname{Si} z = \frac{\alpha}{\sqrt{1200^2 + \alpha^2}} = \frac{1200}{\sqrt{1200^2 + \beta^2}} \qquad 2$$

berechnet werden konnte. Es wurde schon von den Arabern eingeführt und auf ihren Planisphärien (360) angebracht; dagegen mag **Purbach**, der dasselbe in seinem „Libellus de quadrato geometrico (Norimbergæ 1516 in fol.; auch 1544 als Anhang zu den Scripta Regiomontani)“, unter Beigabe einer nach 2'' berechneten Tafel, behandelte, der erste gewesen sein, welcher dieses Quadrat als selbständiges Instrument und in grösserm Masstabe ausführte und dadurch spätere veranlasste, ihm seinen Namen beizulegen. — *c.* Der von **Regiomontan** konstruierte und (389) benutzte, von ihm nicht benannte, dagegen später meist als **Baculus astronomicus** bezeichnete Messapparat bestand nach der Beschreibung, welche er in seiner Schrift „De Cometæ Problemata XVI (in den eben erwähnten Scripta Regiomontani abgedruckt)“ von demselben gab, aus einem viereckigen, hölzernen, mit einer Längenscale von 1300 Teilen versehenen Stabe AB von mindestens 5 Ellen Länge, an welchen sich verschiedene Querstäbe CD, sog. „Regulellæ“, anstecken liessen, die je nach ihrer Länge Scalen von 10 bis 210 ebensolchen Teilen trugen; bei A, C und D befanden sich Absehen (claviculi subtiles aut acus). Sollte eine Winkeldistanz gemessen werden, so wurde ein ihrer Grösse angemessener Querstab angesteckt, — das Instrument bei A an das Auge gehalten, — der Querstab so lange verschoben, bis AC und AD die Distanz zwischen sich fassten, — sodann AE abgelesen, — und schliesslich der Winkel α entweder nach



$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2} CD : AE \qquad 3$$

mit Hilfe einer Tangententafel (Tabula fecunda in 63) berechnet, oder auch in einer eigens dafür konstruierten Tafel aufgeschlagen. So z. B. hatte **Regiomontan** am Morgen des 9. September 1471, wo ihm Mars fast in der Mitte zwischen γ Orionis und α Geminorum zu stehen schien, den Querstab 210 für erstern Stern und Mars auf 674, für letztern Stern und Mars aber auf 662 zu stellen, was nach 3, aber allerdings, wegen Unsicherheit von AE um mindestens einen Teil, nur auf etwa 3′ genau, den Distanzen 17° 42′ und 18° 2′ entsprach. — Der Baculus von **Regiomontan** kömmt, abgesehen von dessen grössern Dimensionen, mit dem zur Zeit von den Feldmessern und Seeleuten viel gebrauchten **Jakobsstabe** überein, der entschieden schon lange vor ihm existierte; denn wenn man auch jetzt mit Recht über die in „**Ramus**, Meetkonst in XXVII boeken vervat. Ut het Latijn in't Neerduyts overgheset by Dirck Hendricxz **Houtman.** Oversien, verrijcht en verklaert door Will. **Snellium.** Amsterdam 1622 in 4.“ unter der Aufschrift „Kruys is een winckelhaeck met oneven (ungleichen) beenen“ enthaltene Anmerkung „Tis een seer oudt Instrument, ende wordt ghemenlij de stock Jacobs (Baculus Jacob) ghenoemt, ghelijck of se wel eer van den H. Patriarch Jacob ghevonden waer“, und ähnliche Stellen bei andern ältern Schriftstellern lächelt, ja höchstens (unter der Annahme, dass früher die Teilung in einer Folge von farbigen Streifen bestanden habe) mit **Bartsch** und **Schickard** in dem Namen eine Reminiscenz an Genesis 30:37 findet, so ist nicht zu übersehen, dass **Günther** (vgl. Bibl. math. 1885) in einem Codex der Münchner-Bibliothek, welcher in den Jahren 1445—50 von Theodorich **Ruffo**, Lektor des Minoriten-Klosters Groneberg, zusammengestellt wurde, eine Abhandlung „De baculo geometrico“ entdeckte, welche bereits den Jakobsstab der Geometer beschreibt und auch den Namen „Baculus Jacob“ kennt, — ja dies Instrumentchen sogar (vgl. seinen „Martin Behaim“ in dem 1890 erschienenen Bd. 13 der Bayer. Bibl.) seither schon in einer bereits 1342 aus dem Hebräischen ins Lateinische übersetzten Schrift des 1370 verstorbenen spanischen Juden **Levi** ben Gerson erwähnt fand; denn hiedurch ist offenbar des Bestimmtesten erwiesen, dass der Jakobsstab schon um die Mitte des 14. Jahrhunderts existierte, — ferner ziemlich wahrscheinlich gemacht, dass **Regiomontan** denselben in Wien, wo auch **Ruffo** unter **Johannes** von Gmünden studiert zu haben scheint, kennen lernte, — und überdies die frühere Vermutung widerlegt, es möchte sein Name mit dem Vornamen von Jakob **Köbel** oder Cobilinius (Heidelberg 1470? — Oppenheim 1533; Studiengenosse von Coppernicus in Krakau, dann Stadtschreiber in Oppenheim) zusammenhängen, der von demselben in seiner „Geometrey. Mainz 1535 in 4.“ handelte, sowie die Annahme, dass **Johannes**, der sich allerdings als Erfinder und Verfertiger mathematischer Instrumente auszeichnete, auch der Jakobsstab zu verdanken sei; dagegen habe ich noch anzuführen, dass **Ruffo** für den Querstab die Bezeichnung „Volvella“ benutzte, während er sonst wohl auch „Hammer (marteau, martello = martolojo = martologio, vgl. 63:a)“ genannt worden sein soll. Vgl. auch die früher (321:a) erwähnte Schrift von **Breusing,** welche in mehreren Einzelnheiten von meiner Darstellung etwas abweicht.

334. Die Instrumente mit Kreisteilungen und die ältern Teilmethoden. — Bei der grossen Mehrzahl der zu Winkelmessungen bestimmten Instrumente kommen geteilte Kreise zur Verwendung. Theoretisch kann nun allerdings die Teilung der Umdrehung oder eines Kreises in beliebiger Weise vorgenommen, mit

unbegrenzter Genauigkeit ausgeführt und bis ins Unendliche fortgesetzt werden, — praktisch dagegen kann man nicht über eine gewisse Grenze hinauskommen, welche selbstverständlich vom Radius, ausserdem aber wesentlich auch von dem bei Ausführung der Teilung angewandten Verfahren abhängt. Letzteres bestand in der frühern Zeit fast ausschliesslich in der sog. **Handteilungsmethode** mit Hilfe des Zirkels, welche schon die Araber anwandten [a], nachher **Bürgi** merklich verbesserte [b], und sodann namentlich **Graham** unter Beiziehung einer Sehnentafel noch weiter zu vervollkommnen wusste [c], während der von **Hooke** gemachte Vorschlag, dieselbe durch eine **mechanische Teilmethode** zu ersetzen, nicht den von ihm erwarteten praktischen Erfolg hatte [d].

Zu 334: *a.* Wie die Griechen bei der Teilung von Kreisen vorgingen, weiss man nicht; dagegen ist es ziemlich sicher, dass die Araber den Kreis zuerst durch zwei zu einander senkrechte Durchmesser in Quadranten zerlegten und dann diese Grundteilung noch mit einem Zirkel verifizierten. Nachher gingen sie zur Teilung des Quadranten in seine 90 Grade über, und zwar wieder mit dem Zirkel, — also wohl erst mit dem Radius in $^1/_3$, und dann durch Versuch successive in $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$, — immer wieder die betreffende Öffnung des Zirkels durch wiederholtes Auftragen prüfend. In Unterabteilungen gingen sie in der Regel auf 20′, bisweilen auf 10′, selten auf 5′; die Angabe, dass sie die Teilung ausnahmsweise bis auf Sekunden fortgeführt haben, scheint auf Missverständnis der Thatsache zu beruhen, dass sie (191) aus Beobachtungen an hohen Gnomonen die Schiefe der Ekliptik bis auf Sekunden ableiteten. — *b.* Im Abendlande wurde anfänglich die Teilmethode der Araber beibehalten, ja noch **Bürgi** gebrauchte dieselbe; nur übertraf wohl der von ihm dafür „in Stahl ausgeführte" Zirkel die ähnlichen Hilfsmittel der frühern erheblich, und überdies hatte er den Takt, von der Sechsteilung auszugehen. In der Einleitung zu dem Hessischen Sternverzeichnisse liest man nämlich (vgl. Mitth. 45 von 1878): „Die Einteilung in Grade ergiebt sich von selbst, da der Radius einen Bogen von 60° abschneidet, welcher durch Halbierung einen solchen von 30°, dann von 15° verschafft; letzterer wird in 3, dann in 5 Teile zerlegt und so 1° erhalten. Zur Prüfung nimmt man z. B. einen Bogen von 5° in den Zirkel, setzt etwa den ersten Fuss auf das Ende des ersten Grades, sieht, ob der andere auf das Ende des 6. Grades trifft, etc. Um den Bogen des Quadranten zu erhalten, fügt man dem Bogen von 60° noch seine Hälfte zu, u. s. f." — *c.* Die Teilmethode, welcher sich George **Graham** 1725 bei einem von **Halley** für Greenwich bestellten achtfüssigen Mauerquadranten bediente, bestand nämlich nach „**Lemonnier,** Description et usage des principaux instrumens d'astronomie. Paris 1774 in fol." wesentlich in folgendem: Er berechnete für den gegebenen Radius die Sehnen von 60°, 42° 40′, 30°, 15°, 10° 20′ und 4° 40′, mit welchen er auf verschiedene Weise die Punkte 30°, 60°, 85° 20′ und 90° festlegen konnte. Namentlich erhielt er so, da $85^0\,20' = 2 \times 42^0\,40' = 60^0 + 15^0 + 10^0\,20' = 90^0 - 4^0\,40'$ ist, den Punkt 85° 20′ mit grosser Sicherheit. Da nun $85^0\,20' = 2^{10} \cdot 5'$, so konnte er diesen Hauptbogen durch fortwährende Bisection von 5 zu 5′ abteilen. Den ihm so unter anderm bekannt gewordenen Bogen von 40′ trug er sodann über 90° hinaus ab, wodurch der noch zu teilende Rest auf $90^0\,40' - 85^0\,20' = 5^0\,20' = 2^6 \times 5'$

gebracht wurde, also auch noch dieser durch Bisection absolvierbar war. Zur Kontrolle teilte er ferner einen konzentrischen Quadranten nach voriger Weise in seine Drittel, und dann jeden von diesen durch Bisection in $2^5 = 32$ Teile, und erhielt so eine zweite Teilung, bei welcher jeder Teilstrich von dem folgenden um 56′ 15″ abstand, und jeder vierte Teilstrich mit einem Teilstriche der Hauptteilung coincidieren musste. — Diese sich praktisch ganz gut bewährende Methode wurde noch später von den **Bird**, **Brander**, etc. vielfach gebraucht. — *d.* Rob. **Hooke** proponierte nämlich 1674 in seinen „Animadversiones", mit Hilfe einer Schraube ohne Ende in den Rand eines Quadranten Zähne einzuschneiden, — entsprechend letztern auf dem Limbus Teilpunkte anzubringen, — und sodann den Abstand je zweier dieser Punkte aus der Anzahl der auf den ganzen Quadranten kommenden Schraubengänge zu bestimmen. Als dann 1688/9 **Tompion** und **Sharp** diesen Vorschlag bei einem durch **Flamsteed** für Greenwich bestellten Mauerquadranten praktisch verwerten wollten, bewährte er sich allerdings nicht sehr gut; aber immerhin gebrauchten noch später **Ramsden**, **Simms**, etc. mit Nutzen ähnliche Verfahren, um provisorische Teilungen zu erstellen und sich so die Anwendung anderer Methoden (vgl. 335) zu erleichtern.

335. Die neuern Teilmethoden. — Nach der Mitte des 18. Jahrhunderts erwarb sich der Herzog **v. Chaulnes** [a] das Verdienst, ein wesentlich neues Verfahren für die Kreisteilung vorzuschlagen, welches man als das **mikroskopische** bezeichnen könnte [b] und das wesentlich dazu beitrug, den monströsen Quadranten und Sectoren der frühern Zeit durch feingeteilte Vollkreise von mässigen Dimensionen wirksame Konkurrenz machen zu können [c]. Es bürgerte sich dann auch dieses Verfahren verhältnismässig rasch ein und bildet noch gegenwärtig, wenn auch im Laufe der Zeiten einzelne Modifikationen beliebt und manche bei andern Verfahren bewährte Manipulationen damit verquickt wurden, die Hauptgrundlage der für Erstellung und Prüfung von Originalteilungen angewandten Methoden [d].

Zu 335: *a.* Michel-Ferdinand d'Albert d'Ailly, Duc de **Chaulnes** (Paris 1714 — ebenda 1769) war Pair von Frankreich, Generallieutenant und Gouverneur der Picardie, aber auch Ehrenmitglied der Pariser Akademie. — *b.* Das neue Verfahren, welches **Chaulnes** 1765 III 23 der Pariser Akademie auseinander setzte und sodann teils in seinem „Mémoire sur quelques moyens de perfectionner les instrumens d'astronomie (Mém. Par. 1765)", teils in seiner damit grossenteils, aber doch nicht vollständig übereinstimmenden Schrift „Nouvelle méthode pour diviser les instrumens de mathématique et d'astronomie. Paris 1768 in fol." veröffentlichte, bestand wesentlich in folgendem: An dem wallartigen Rande der zu teilenden Scheibe wurden nahe diametral zwei mit Strichen versehene Metallstückchen a und b aufgeschraubt, und über dieselben zwei mit Fadenkreuz versehene Mikroskope A und B gestellt. Dann wurde die Scheibe gedreht, bis b unter A zu stehen kam und nun nachgesehen, ob auch a unter B eingetroffen sei. War letzteres nicht der Fall, so wurden b und B etwas verschoben, die Probe wiederholt, etc., bis alles genau klappte. Hierauf wurde B durch einen Reisser ersetzt, mit welchem nun somit Striche

eingegraben werden konnten, die dem jeweilen unter A stehenden Punkte oder Striche diametral gegenüberstanden. Waren einmal zwei, um 180° von einander abstehende Striche vorhanden, so wurden zwischen ihnen, nahe in Abständen von 60°, zwei neue Marken c und d angebracht und das Mikroskop B über c aufgestellt, während A und der Reisser stehen blieben, — dann B, c, d so lange verschoben, bis beim Drehen successive a und c, c und d, d und b je gleichzeitig unter den beiden Fadenkreuzen standen, also die Dreiteilung des Halbkreises vollzogen war, — worauf die Gegenstriche und sodann sie selbst mit dem Reisser gezogen wurden. Analog operierend wurde so fortgefahren, bis der Kreis von 10 zu 10° geteilt war, — nunmehr B auf circa 9° von A eingestellt, — wieder so lange korrigiert, bis AB in dem Bogen von 0 bis 90° genau 10 mal enthalten war, — somit die Gradstriche 9, 18, 27, ... eingegraben werden konnten. Zum Schlusse wurde B auf die Distanz 10° von A gebracht, womit sich dann offenbar alle noch fehlenden Gradstriche erhalten liessen. Um die allfällig noch wünschbare Unterabteilung der Grade zu erhalten, wurde auf einem Hilfsstabe eine entsprechende geradlinige Teilung ausgeführt, und nun dieser in solche Entfernung vom Teilkreise gebracht, dass ein um das Centrum des letztern drehbares Fernrohr bei Drehung um 1° von dem einen Ende des Stabes zum andern gelangte; dann stellte man das Fernrohr auf jeden Teilpunkt des Stabes ein und zog die betreffenden Striche. — **Chaulnes** sagt in seinem „Mémoire", er habe nach dieser Methode einen Kreis von 11 Zoll Radius so genau geteilt, dass kein Strich einen Fehler von 2 Sekunden haben könne, — eine Genauigkeit, mit welcher früher kaum Kreise von 8 bis 9 Fuss Durchmesser geteilt worden seien, auch abgesehen davon, dass bei so grossen Kreisen die Schwierigkeit in Konstruktion und Manipulation die scheinbare Zunahme der Genauigkeit grossenteils kompensiere. — *c.* Die Vorzüge von Vollkreisen, wie solche die Methode von **Chaulnes** im Gegensatze zu derjenigen von **Graham** für Originalteilungen förmlich fordert, wurden mutmasslich schon durch P. **Apian** (vgl. dessen durch Galgemair publizierte nachgelassene Schriften) und jedenfalls spätestens durch **Römer** erkannt, indem letzterer (Misc. Berol. III 277) sagte: „Ich ziehe einen Kreis von 4 Fussen einem Quadranten von 10 Fussen vor". Wie sehr ferner **Ramsden** und seine Schule dieselben würdigten, geht sowohl aus einem Briefe von **Piazzi** an Lalande (Journ. d. Sav. 1788), als aus der Schrift „Mor. **v. Brühl**, On the investigation of astronomical circles. London 1794 in 4. (deutsch in Hindenburgs Archiv von 1795)" sattsam hervor, ja letzterer hatte (Berl. Jahrb. 1792) schon 1789 aus London geschrieben: „Ein junger Künstler und Schüler des berühmten Ramsden, William **Cary**, verfertiget Circul von 1—2 Schuhen, die in Ansehung der Festigkeit, Genauigkeit der Eintheilung und leichten Berichtigung beträchtliche Vortheile über Quadranten von gleichem und auch grösserm Masse besitzen, und bei weitem nicht so hoch zu stehen kommen". — Es soll dadurch übrigens keineswegs bestritten werden, dass zu bestimmten Zwecken oder unter besondern Verhältnissen auch der Bau von Sectoren in Anwendung kommen darf, zumal bei solchen nötigenfalls (421) die eigentliche Teilung ganz wegfallen kann. — *d.* Für weitern Detail verweise ich auf: „John **Bird**, The method of dividing astronomical instruments. London 1767 in 4. (vgl. Kästner, Astr. Abh. 2), und: The method of constructing Mural-Quadrant. London 1768 in 4. (mit ersterm zusammen auch London 1785 in 4.), — **Ramsden**, Description of an Engine for dividing mathematical instruments. London 1777 in 4. (sehr selten, da die meisten Exemplare bei einem „accident"

verloren gingen; franz. durch Lalande, Paris 1790 in 4.; deutsch in Geisler), — John **Smeaton** (Austhorpe 1724 — ebenda 1792; erst Jurist, dann Mech. London), Observations on the graduation of astronomical instruments (Ph. Tr. 1786), — Joh. Leonhard **Späth** (Augsburg 1759 — München 1842; Prof. math et phys. Altdorf und München), Abhandlung zur Berechnung der Genauigkeit, mit welcher ein Mauerquadrant nach Bird und Brander getheilt werden kann. Leipzig 1788 in 4., — Joh. Gottlieb **Geisler** (Zittau 1753 — ebenda 1820; Litterat in Zittau), Über die Bemühungen der Gelehrten und Künstler, mathematische und astronomische Instrumente einzutheilen. Dresden 1792 in 8., — Ed. **Troughton**, An account of a method of dividing astronomical and other instruments by ocular inspection (Ph. Tr. 1809), — H. **Kater**, Improved method of dividing circles (Ph. Tr. 1814), — **Pictet**, Sur la manière à diviser et le théodolithe construit par M. Schenk à Berne (Bibl. brit. 1815), — Karl Philipp Heinrich **Pistor** (Berlin 1778 — ebenda 1847; Mech. Berlin), Nachricht über eine in Berlin erbaute Theilmaschine für Kreise. Berlin 1819 in 4., — G. **v. Reichenbach**, Berichtigung der von Herrn Mechanikus Liebherr in München abgegebenen Erklärung über die Erfindung meiner Kreistheilungsmethode (Gilb. Annalen 68 von 1821; Reichenbach giebt eine Beschreibung seiner Methode und hält gegenüber Liebherr seine Priorität fest, worin ihm auch Horner Recht gab, indem er 1821 VIII 11 an Gautier schrieb: „Il suffirait de voir les deux artistes l'un à côté de l'autre, pour distinguer le maître et le garçon".), — W. **Simms**, On a self acting circular dividing Engine (Mem. A. S. 15 von 1846), — Rapport sur les machines à diviser de **Perreaux** et de **Gambey** (Compt. rend. 1849), — Armand-Pierre **Séguier** (Montpellier 1803 geb.; Akad. Paris), Méthode suivie par feu Gambey pour diviser le grand cercle mural de l'observatoire de Paris (Compt. rend. 1869), — **Löwenherz**, Die Feintheilung von Kreisen (Z. f. Instr. 1882/3), — etc."

336. Die Teilmaschinen. — Schon **Chaulnes** dachte daran, dass, wenn man einmal eine gute Originalteilung erstellt habe, es möglich sein müsse, dieselbe mit Hilfe einer geeigneten Vorrichtung auf andere Kreise überzutragen, d. h. eine sog. **Teilmaschine** zu konstruieren [a], — und derselbe Gedanke wurde unabhängig von ihm auch durch andere verfolgt [b], so namentlich durch **Ramsden**, welchem es schon in den Siebzigerjahren des vorigen Jahrhunderts gelang, einen ganz vorzüglichen Hilfsapparat dieser Art zu erstellen [c]. Nach und nach folgten dann so ziemlich alle Präcisions-Mechaniker seinem Beispiele [d], ja es bildete bald die Güte der vorhandenen Teilmaschine ein Hauptkriterium für die Bedeutung einer mechanischen Werkstätte [e].

Zu 336: *a.* In seinem Mémoire von 1765 schlug nämlich **Chaulnes** vor, „une plate-forme" von 4' Radius zu konstruieren, welche man nach seiner Methode bis auf Halbsekunden (circa 3 μ) genau teilen könne, und sagte sodann: „Cette plateforme une fois divisée, l'on n'aurait plus d'autre opération à faire pour diviser tel instrument que l'on voudrait, que de le centrer sur la plateforme et de placer l'outil, qui porte le tracelet, sur le premier point: après quoi, en faisant tourner la plateforme sous le microscope qui en observerait les divisions, sans table, sans calcul et sans aucune espèce d'adresse, l'on

serait sûr de tracer toutes les divisions dans les points où elles devraient être et dans la plus parfaite exactitude". Dass **Chaulnes** somit einen vollständigen Begriff von der Möglichkeit und dem Nutzen einer Teilmaschine hatte, steht ausser Frage; ob er seine Idee auch praktisch verwirklichte, bleibt dagegen ungewiss. — *b.* Schon um 1740 konstruierte der Uhrmacher Henry **Hindley** zu York eine, allerdings zunächst zum Schneiden von Uhrrädern bestimmte Teilmaschine, von der man aber erst 1786 durch die erwähnte Abhandlung von **Smeaton** Kenntnis erhielt. — *c.* Ganz unabhängig von **Chaulnes** beschäftigte sich von 1760 hinweg auch **Ramsden** mit der Aufgabe, eine Teilmaschine zu erstellen, und hatte schon etwa nach drei Jahren einen ganz brauchbaren Apparat fertig, welcher später für 1000 Louisd'or an den Präsidenten **Saron** und nach dessen Ermordung für 25 Louisd'or an das „Dépôt des machines de l'école des mines" überging. **Ramsden** selbst betrachtete diesen ersten Apparat nur als eine Art Modell und baute sich nun erst in weitern zehn Jahren die berühmte Teilmaschine, für welche ihm der Board of Longitude, unter Bedingung, dass er die bereits erwähnte Beschreibung publiziere, einen Preis von 600 Guineen erteilte. Mit dieser neuen Maschine soll er so leicht gearbeitet haben, dass zur Teilung eines Sextanten die Zeit von 20^{m} ausreichte, und dass er sich anheischig machen konnte, jeden Sextanten für 3 Shilling zu teilen. — *d.* Auf unserm Kontinente baute sich mutmasslich zuerst und jedenfalls mit grossem Geschicke G. **v. Reichenbach** eine Teilmaschine; sodann folgten successive **Repsold** in Hamburg, Ulrich **Schenk** (Signau 1786 — Worblaufen bei Bern 1845; ein Schüler von Reichenbach) in Bern, **Gambey** in Paris, Karl Theodor Nathan **Mendelssohn** (Berlin 1782 — ebenda 1852; Sohn von Moses Mendelssohn und Lehrer von Pistor) in Berlin, etc. — *e.* Für weitern Detail vgl. die früher gegebene und namentlich in 335 : d ergänzte Litteratur.

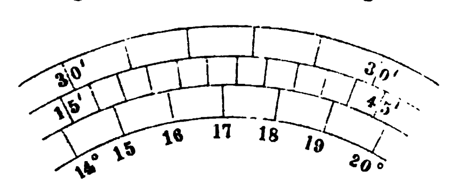
337. Das Teilungsmaterial. — Die Genauigkeit der Teilung hängt nicht nur von der Lage, sondern auch von der Beschaffenheit der Teilstriche, also nicht nur von der Teilmethode, sondern auch von dem Material ab, auf welches geteilt wird. Als so im Laufe der Zeiten die Instrumente erst aus Holz, dann aus Eisen und später fast ausschliesslich aus Messing gebaut wurden, war es jeweilen ein grosser Fortschritt, wenn die zu teilende Stelle eine Einlage von Elfenbein [a], Kupfer [b] oder Silber [c] erhielt, und so die Möglichkeit gegeben war, immer feinere Teilungen auszuführen [d].

Zu 337: *a.* Während **Coppernicus** bei seinem Triquetrum (338) die Teilstriche mit Tinte direkt auf dem Holze gezogen hatte, waren sie bei dem früher (57) erwähnten hölzernen Kreise von 1570 bereits auf einer Elfenbeineinlage angebracht. — *b.* So benutzte noch 1676 **Halley** auf St. Helena einen eisernen Sextanten von $5^1/_2$' Radius, bei welchem sich die Teilung auf einem Messingrande befand, während **Richer** und **Cassini** Instrumente mit kupfernen Limben besassen. — *c.* Als es von der Zeit Tychos und des Landgrafen hinweg immer mehr üblich wurde, die Instrumente aus Messing zu bauen, wurde die Teilung direkt auf diesem Metalle ausgeführt, und die noch vorhandenen Instrumente der **Ramsden**, **Cary**, etc. zeigen, dass so ganz hübsche Teilungen erhältlich waren; aber immerhin war es ein nicht unbedeutender Fortschritt, als **Reichenbach** zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts (vgl. Mon. Corr. 9

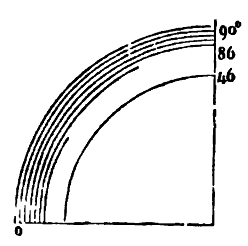
von 1804, p. 379) anfing, in den Rand seiner Kreise Silberstreifen einzulegen und auf diese zu teilen, — ein Verfahren, das übrigens auch **Fortin** nahe gleichzeitig angewandt haben soll. — *d.* Anhangsweise mag noch angeführt werden, dass **Brander** einzelne Instrumente aus einem dem Solenhofen'schen ähnlichen feinkörnigen Steine ausführte und auf diesem auch sehr schön zu teilen wusste (vgl. Verz. 259). — Ferner ist hervorzuheben, dass, während die englischen Künstler ihre Kreise aus einzelnen Stücken zusammensetzten und mit hohlen Speichen versahen, **Reichenbach** die Übung einführte, Kreis samt Speichen massiv in Einem Stücke zu giessen, um so eine homogene Masse zu erhalten, bei welcher die Verziehung durch Temperatureinflüsse auf ein Minimum reduziert war.

338. Die ältern Ablesemittel. — Genauere Teilungen auf besserem Material tragen nur dann reife Früchte, wenn die nötigen Hilfsmittel vorhanden sind, um die Stellung des Index an denselben mit entsprechender Sicherheit abzulesen. Diese Hilfsmittel wurden in älterer Zeit dadurch zu erhalten gesucht, dass man dem Teilkreise eine Anzahl konzentrischer Hilfskreise beigab und diese entweder in etwas abgeänderter Weise ebenfalls abteilte, um die Anzahl der Teilstriche ohne Überladung der Hauptteilung wesentlich vergrössern zu können [a], — oder wohl auch benutzte, um das schon längst bei geradlinigen Teilungen, namentlich bei den sog. verjüngten oder Transversal-Masstäben, mit gutem Erfolge angewandte Princip auch auf Kreise überzutragen [b].

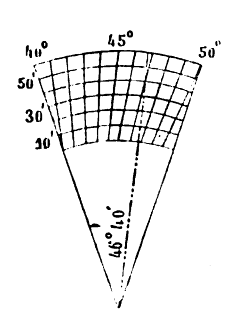
Zu 338: *a.* Nachdem man zu der Einsicht gekommen war, dass sich die Genauigkeit der direkten Ablesung weder durch Vergrösserung des Radius noch durch Vermehrung der Teilstriche hinlänglich steigern lasse, wandte man zunächst und in der That nicht ohne einen gewissen Erfolg das Verfahren an, einem in Grade geteilten Kreise noch zwei Hilfskreise beizugeben, von



welchen der äussere ebenfalls auf 1°, der innere auf $\frac{1}{2}$° geteilt war, — dabei diese neuen Teilstriche so versetzend, dass die erstern den Mitten, die zweiten den ersten und letzten Vierteln der Grade des Hauptkreises entsprachen, also die Ablesung auf 15' ermöglicht wurde. Schon diesem Verfahren lag implicite der fruchtbare Gedanke zu Grunde, man könne weitergehender Teilung **verschiedene Teilung desselben Bogens** substituieren und so direkt nicht mehr darstellbare Grössen als **Differenzen** sichtbar machen, und noch mehr war dies bei dem von **Nonius** in seiner Schrift „De crepusculis. Olyssipone 1542 in 4." gemachten Vorschlage der Fall, einem in 90 Grade geteilten Quadranten noch 44 konzentrische Hilfsquadranten beizugeben und diese der Reihe nach in 89, 88, 87, ... 46 Teile zu zerlegen. Wenn nun eine gewisse Richtung des beweglichen Radius mit keinem Striche der Hauptteilung zusammentreffe, so werde sie doch



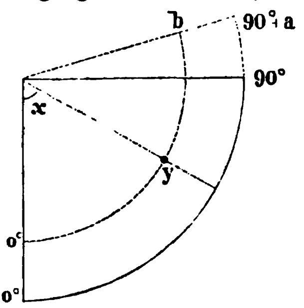
nahe mit einem der Hilfsstriche übereinstimmen, dessen Wert ja leicht berechnet werden könne. Praktischen Wert konnte jedoch derselbe kaum beanspruchen, da es gar nicht so leicht war, den nächsten Teilstrich auszumitteln, ja dieser (vgl. Delambre III 402 f.) in manchen Fällen nicht einmal eine grosse Annäherung darbot, — ferner dabei volle 45 verschiedene Teilungen auszuführen waren, von welchen manche (47, 53, 59, ...) sogar Primzahlen entsprachen. Es ist daher leicht zu begreifen, dass **Tycho** (vgl. Astr. inst. folio A) an dem ersten Versuche, den Vorschlag von Nonius wirklich auszuführen, mehr als genug hatte. — *b.* **Tycho** erzählt (l. c. folio G), dass er 1564 nach der Vorschrift von **Gemma** einen hölzernen Radius (Jakobsstab in 333) habe anfertigen lassen, und dass sodann sein Freund **Scultetus** auf demselben nach der Methode von Johannes **Hommel** (Memmingen 1518 — Leipzig 1562; Prof. math. Leipzig) sog. „puncta transversalia" angebracht habe. **Scultetus** selbst aber teilt auf folio B_2 seiner Gnomonik von 1572 (vgl. 195) nicht nur Näheres über die Methode, durch Transversalen „den Circulum in Minuten zutheilen" mit, sondern fügt ausdrücklich bei, dass dieselbe schon „vor zeiten in brauch gehabt die zwene fürtrefflichen Mathematici G. **Purbachius** und J. **Regiomontanus**", und hiemit klappt, dass sie auch durch Christoph **Pühler**, der um 1520 mit Peter Apian in Wien studierte, 1563 auf Blatt 97 seiner Geometrie ganz klar auseinandergesetzt wurde: Man hat nämlich nach letzterm zwei konzentrische Quadranten je in 90° zu teilen, sodann jeden Teilstrich des Innern mit dem folgenden des Äussern zu verbinden, und endlich, je nachdem man 20, 15, 12 oder (wie in Fig.) 10 Minuten ablesen will, 2, 3, 4 oder 5 Zwischenquadranten zu ziehen. — Statt dessen kann man auch, entsprechend dem bemerkenswerten Vorschlage von **Bürgi** (vgl. Mitth. 33 von 1873), nachdem man wie zuvor einen Teilstrich der innern Teilung mit dem folgenden der äussern verbunden hat, von diesem letztern auf den nunmehr folgenden der innern übergehen, u. s. f., und sich die Zwischenkreise dadurch ersparen, dass man auf dem beweglichen Radius eine entsprechende Teilung anbringt, — oder, wie es **Tycho** wenigstens auf einzelnen seiner Instrumente ausführen liess, einfach da Punkte aufsetzt, wo die Bürgi'schen Zickzack-Transversalen von den Hilfskreisen getroffen würden. — Da Thomas **Digges** (Bristol 1530? — London 1595; wie sein etwa 1573 verstorbener Vater Leonard, Militär) in seiner Schrift „Alæ seu scalæ mathematicæ. Londini 1573 in 4." die Einführung der Transversalen dem kurz zuvor verstorbenen englischen Mechaniker Richard **Chansler** zuschreibt, so ist es möglich, dass letzterer ebenfalls unabhängiger Erfinder war, jedenfalls aber nicht **Digges** selbst, wie man nach „N. **Lockyer**, The movements of the earth (Nature 1883)" glauben könnte. Die Hauptsache bleibt natürlich, dass durch die Zuhilfenahme der Transversalen die Genauigkeit der Ablesungen wesentlich gehoben wurde und derselben ein grosser Teil der Fortschritte gutzuschreiben ist, welche die messende Astronomie im 17. Jahrhundert machte, — benutzte ja noch **Richer** bei seinen berühmten Beobachtungen in Cayenne (441) einen 6-füssigen Oktanten, dessen direkt in Minuten geteilter kupferner Limbus mit Hilfe von Transversalen 10" gab. — Zum Schlusse mag noch erwähnt werden, dass strenge genommen, wie z. B. der spanische Instrumentenmacher Joh. **Ferrerius** hervorhob, und man übrigens auch in Kassel wusste,



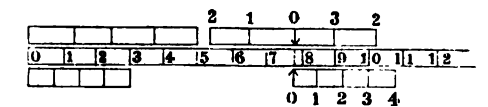
statt geradlinigen Transversalen, durch das Centrum gehende Transversalkreisbogen angewandt werden sollten, — dass aber praktisch dadurch nichts Besseres erreicht würde.

339. Der Vernier. — Im Laufe des 17. Jahrhunderts machte der von Pierre **Vernier** eingeführte „Secteur mobile", d. h. ein mit dem Index verbundener, also mit ihm an dem geteilten Kreise herumgeführter Hilfsbogen, auf welchem n ± 1 Teile der Hauptteilung in n Teile abgeteilt, und somit Differenzen sichtbar gemacht werden, welche $^1/_n$ eines Teiles der Hauptteilung und seinen Vielfachen entsprechen, den Transversalen immer grössere Konkurrenz, um letztere schliesslich ganz aus dem Felde zu schlagen [a]. Diese früher fälschlich „Nonius", jetzt fast allgemein **Vernier** genannte, auch auf geradlinige Scalen übergetragene Hilfsteilung [b] bildet noch immer, wenn auch bei grössern Kreisen meist in Verbindung mit dem sofort zu beschreibenden Ablesemikroskope, unser Hauptmittel um sichere und genaue Ablesungen zu erhalten [c].

Zu 339: *a.* Pierre **Vernier** machte nämlich in seiner Schrift „La construction, l'usage et les propriétés du quadrant nouveau de mathématiques. Brusselles 1631 in 8.", für deren Detail ich auf Mitth. 33 von 1873 verweise, den Vorschlag, einem geteilten Quadranten einen beweglichen Hilfssector beizugeben, auf welchem ein n + 1 Teilen der Hauptteilung entsprechender Bogen nur in n Teile zerlegt sei; speciell wählte er für einen in Halbgrade geteilten Quadranten von ein Fuss Radius einen Hilfsbogen, dessen Länge 31 Halbgrade betrug, und teilte denselben nur in 30 Teile, so dass ein Hilfsteil um $^1/_{30}$ länger als ein Hauptteil war, also vergleichungsweise eine einzelne Minute gegeben wurde, und man bei irgend einer Stellung des Index nur zwei zusammenfallende Striche der beiden Teilungen aufzusuchen brauchte, um zu wissen, wie viele Minuten man dem abgelesenen Halbgrade beizufügen habe. — Schon Jean-Bapt. **Morin** zog in seiner „Longitudinum scientia. Parisiis 1634 in 4." den neuen Vorschlag beifällig in Betracht, und mehr und mehr befreundeten sich auch andere damit, so dass die Transversalmethode immer seltener zur Verwendung kam und im 18. Jahrhundert nur noch ausnahmsweise (vgl. Verz. 40 und 304) gebraucht wurde. — *b.* Wenn auch der Grundgedanke von **Vernier** demjenigen von **Nonius** verwandt war, so ist es doch offenbar ganz unzulässig, in dem unpraktischen Vorschlage dieses letztern die Berechtigung finden zu wollen, dem so nützlichen Hilfsbogen des erstern den Namen „Nonius" beilegen zu wollen, während ihm der Name „Vernier" ganz gut steht, jedenfalls noch eher mit „Clavius" vertauscht werden könnte. **Clavius** teilte nämlich in seiner „Geometria practica. Roma 1604 in 4." (auch Opera II) mit, dass Jak. **Curtius**, mit welchem er zur Zeit, wo dieser als kaiserlicher Legat beim Papste in Rom stand, viel verkehrte, die theoretisch ganz hübsche Idee gehabt habe, den Vorschlag von Nonius dadurch zu verbessern, dass man jeden Hilfsquadranten um a verlängere und



sodann $90^0 + a$ in b Teile zerlege, so dass der Teilstrich y der Hilfsteilung dem Winkel $x = 1/b \cdot (90^0 + a) \cdot y$ entspreche, — wobei er successive $a = 1^0, 2^0, 3^0$, etc., dagegen beständig $b = 90$ annahm. Nachdem **Clavius** sodann noch angeführt hatte, dass der bequemern Teilung wegen $b = 2^7 = 128$ vorzuziehen sein dürfte, teilte er die bemerkenswerte Idee mit, dass man auch statt dessen bei geradlinigen oder Kreisteilungen $^1/_n$ eines Teiles und dessen Vielfache darstellen und abschätzen könne, wenn man $(n + 1)$ solcher Teile in n zerfälle und die so erhaltene Hilfsteilung an die Hauptteilung anlege. Er wurde so zum entschiedenen Vorläufer von **Vernier**; aber doch immerhin nur zu einem Vorläufer, da bei **Clavius** die gerade praktisch so wertvolle Verbindung des Hilfsbogens mit dem beweglichen Radius noch fehlt, sowie das Ersetzen des Index durch den Nullpunkt der Hilfsteilung. — Anhangsweise ist noch anzuführen, dass auch in „Benedict **Hedræus** (Westmanland 1608? — Upsala 1659; Prof. math. Upsala), Nova et accurata astrolabii structura. Lugd. Bat. 1643 in 8." die Erfindung von **Vernier** besprochen wurde, aber ohne ihn zu nennen, und dass somit einzelne, wie z. B. **Hevel**, in Hedräus den Erfinder vermuteten. — *c.* Früher wurden meist in Übereinstimmung mit **Vernier** $(n + 1)$ Teile in n abgeteilt, — in neuerer Zeit in der Regel $(n - 1)$ in n, da in letzterm Falle der Vernier mit der Teilung läuft, wie aus der beistehenden Figur (mit Teilung $^5/_4$ und $^3/_4$; gemeinsame Ablesung $7^3/_4$), welche zugleich die üblichen Bezifferungen veranschaulicht, sattsam erhellt.



— Bei in Viertelgrade geteilten Kreisen wählt man gewöhnlich für den Vernier $^{14}/_{15}$, bei in Sechstelsgrade geteilten $^{59}/_{60}$, etc., — hütet sich überhaupt vor zu grossen Werten von n, da bei solchen das sichere Aufsuchen der zusammenfallenden Striche erschwert und eine geringere Genauigkeit als durch Konsultieren der vorgehenden und nachfolgenden Striche erhalten wird. — Für geradlinige Teilungen ist vorzugsweise $^9/_{10}$ gebräuchlich; wie aber in die deutsche Ausgabe von Thomson und Taits „Natural philosophy" der Passus Aufnahme finden konnte: „Wenn Längen bis zu Zehnteln eines Teiles der Scale bestimmt werden sollen, so müssen 10 Teile des Vernier gleich 9 Teilen der Scale sein, **daher der Name Nonius**", ist mir unbegreiflich. — **Brander** suchte die bei aufliegenden oder sog. „fliegenden" Verniers die Ablesung unsicher machende Parallaxe dadurch zu vermeiden, dass er die Verniers auf Glas einritzte und somit auf die Teilung selbst legen konnte. — Die schon von **Cary** und **Reichenbach** eingeführten „Blenden" ermöglichen eine gleichförmige Beleuchtung.

340. Das Ablesemikroskop. — Nachdem anfänglich die Alidade eine ihr gegebene Stellung nur durch Reibung beibehielt, kam nach und nach der Gebrauch in Übung, sie durch eine Klemme in derselben festzuhalten, und bald wurde sodann mit dieser noch eine Schraube von engem Gange, eine sog. **Mikrometerschraube,** verbunden, um nach vollzogener, meist eine kleine Verschiebung bewirkender Klemmung, die eigentliche Feinstellung zu ermöglichen. Sobald diese Schraube da war, lag aber der Gedanke nahe, dieselbe mit einem geteilten Kopfe, einer „Trommel", zu versehen, um messbare Bewegungen ausführen zu können, und hiedurch war ein neues

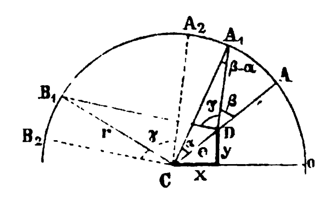
Ablesemittel geschaffen [a], welches später bei grossen und feingeteilten Kreisen noch in der Weise zweckmässig abgeändert wurde, dass man über denselben zusammengesetzte Mikroskope aufstellt, in deren Bildebene sich ein Rähmchen befindet, welches einen zum Kreise radialen Doppelfaden besitzt und mittelst einer Schraube messbar verschoben werden kann [b]. Dass diese, anfänglich von einzelnen mit Misstrauen aufgenommene Neuerung [c], einen wesentlichen Fortschritt bezeichnet, wird jetzt kaum mehr in Abrede gestellt, — jedoch ist es allerdings notwendig, auf alle Nebenumstände zu achten, wenn nicht die grössere Genauigkeit der Ablesung illusorisch werden soll [d].

Zu 340: *a.* Um bei irgend einer Stellung des Index seinen Abstand x von dem vorhergehenden Teilstriche zu erhalten, hatte man nur nötig, sich die ihr entsprechende Trommelstellung c zu merken, — dann durch Drehen der Schraube einmal zum vorhergehenden und einmal zum nachfolgenden Teilstriche zu gehen, — beide mal die Stellungen a und b an der Trommel abzulesen, — und endlich, wenn d den bekannten Abstand der beiden Teilstriche bezeichnet, x aus der Proportion $x : d = (c - a) : (b - a)$ zu berechnen, was besonders leicht geht, wenn d und $(b - a)$ schon bei Konstruktion des Instrumentes in ein einfaches Verhältnis gebracht werden. — In der That wurde dieses Mittel schon durch **Hevel** neben Transversalen und Vernier mit Erfolg benutzt, — dann wieder durch **Louville** in seiner „Application du micromètre à la lunette du quart de cercle astronomique (Mém. Par. 1714)", sowie durch G. **Graham** und T. **Mayer** beliebt, — und noch gegen Ende des vorigen Jahrhunderts durch **Cary** angewandt. — *b.* Beim Ablesemikroskope ist die Manipulation wesentlich dieselbe, wie bei der einfachen Mikrometerschraube, nur dass sie sich genauer ausführen lässt und dass namentlich das gewünschte einfache Verhältnis leichter erhältlich ist, da sich nun der Faden nicht über die Teilung selbst, sondern nur über ein Bild derselben bewegt, und dieses Bild durch Verschieben des Mikroskopes vergrössert oder verkleinert werden kann. — Nachdem schon **Römer** (vgl. 377 : a) die Nützlichkeit angedeutet, wurden solche Ablesungsmikroskope namentlich durch den Duc de **Chaulnes** und durch **Ramsden** ausgeführt. So z. B. befanden sich bei dem $2^1/_2$-füssigen Azimutalkreise, welchen letzterer 1797 für die von **Tralles** in der Schweiz (vgl. Gesch. der Verm.) beabsichtigten trigonometrischen Messungen lieferte, zwei Ablesemikroskope, bei welchen auf ein Interval ($^1/_6{}^0$ auf Messing) 10 Schraubengänge gingen, während die Schraubentrommel 20 Teile hatte, so dass 3″ abgelesen werden konnten. — Bei 20- und mehrzölligen Kreisen, bei welchen die Feinteilung auf 2′ getrieben ist, wählt man in der Regel ein Mikroskop, dessen Schraube 2 Umdrehungen nötig hat, um das Bild der 2′ zu durchlaufen, und giebt der Trommel 60 Teile, so dass man an der letztern einzelne Sekunden ablesen, ja noch deren Zehntel abschätzen kann. Am bequemsten ist es, dabei die Trommel so zu stellen, dass an ihr Null abgelesen wird, wenn der bewegliche Faden auf dem Index im Gesichtsfelde des Mikroskopes steht, während ihre Bezifferung derjenigen des Kreises entgegenläuft. — Andrew **Graham** (Fermanagh in Irland 1815 geb.; Obs. Markree-Castle und Cambridge E.) hat an einem Meridiankreise von Troughton und Simms von 914^{mm} Durchmesser mit einem Mikroskope von 60-facher Vergrösserung 100 Ein-

stellungen auf denselben Teilstrich gemacht und daraus den wahrscheinlichen Fehler einer Einstellung gleich 0",1 ≕ $^1/_4\,\mu$ gefunden. — *c.* Während **Bessel** schon 1815 an Gauss schrieb: „Es kann nichts vollkommneres geben als die mikroskopischen Ablesungen", hatte er noch 1817 Olbers mitzuteilen: „Ich habe, was mir leid thut, nicht durchsetzen können, dass **Reichenbach** (für den bei ihm bestellten 3-füssigen Meridiankreis) Mikroskope statt den Nonien nimmt". — *d.* So muss z. B. der sog. „Error of runs" berücksichtigt, d. h. für jede Beobachtungsreihe der momentane Wert eines Trommelteiles bestimmt und in Rechnung gebracht werden. Vgl. dafür z. B. „Ladislaus **Weinek** (Ofen 1848 geb.; Dir. Obs. Prag), Der Mikroskop-Run (A. N. 2605 von 1884)".

341. Die Excentricität und ihre Elimination. — Die Differenz der Ablesungen an einem geteilten Kreise giebt offenbar nur dann ein richtiges Mass für den Stellungsunterschied des Fernrohrs, wenn der Drehpunkt des letztern keine merkliche Excentricität zum Kreise hat, und es gehört zu den vielen Verdiensten von Tob. **Mayer**, dass er nicht nur auf diesen **Excentricitätsfehler** aufmerksam machte, sondern auch zeigte, dass derselbe im Mittel aus den Ablesungen an zwei einander diametral gegenüberliegenden Stellen nahezu verschwindet [a].

Zu 341: *a.* Bezeichnet A denjenigen Stand des Index, bei welchem sein Drehpunkt D und der Mittelpunkt C des geteilten Kreises mit ihm in einer Geraden liegen, — A_1 den Stand, welchen er an der Teilung nach einer Drehung um β einnimmt, — A_2 denjenigen, welchen er einnehmen sollte, um diese Drehung wirklich zu verzeigen, — und e die (gegenwärtig bei sorgfältig konstruierten Instrumenten nie $^1/_{100}$''' P. ≕ 20 μ betragende) Excentricität, so hat man



$$\text{Si}(\beta-\alpha):\text{Si}\,\beta = e:r \qquad \text{oder} \qquad A_2 - A = \beta - \alpha ≕ \frac{e\cdot\text{Si}\,\beta}{r\cdot\text{Si}\,1''}$$

und somit

$$A_2 = A_1 + \frac{e\cdot\text{Si}(A_2-A)}{r\cdot\text{Si}\,1''} = A_1 + x'\cdot\text{Si}\,A_2 - y'\,\text{Co}\,A_2 \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$x' = \frac{x}{r\cdot\text{Si}\,1''} \qquad y' = \frac{y}{r\cdot\text{Si}\,1''}$$

Entsprechend erhält man für einen zweiten Index

$$B_2 = B_1 + \frac{e\cdot\text{Si}(B_2-A)}{r\cdot\text{Si}\,1''} = B_1 + x'\cdot\text{Si}\,B_2 - y'\cdot\text{Co}\,B_2 \qquad \mathbf{2}$$

so dass, wenn die Distanz der beiden Indices $\gamma = B_2 - A_2 = 180^0 + \varepsilon$ ist, wo ε eine kleine Grösse bezeichnet,

$$\frac{A_2+B_2}{2} = \frac{A_1+B_1}{2} + e\cdot\frac{\text{Si}(A_2-A)+\text{Si}(B_2-A)}{2r\cdot\text{Si}\,1''} ≕ \frac{A_1+B_1}{2} - \frac{e\cdot\varepsilon}{2r}\cdot\text{Co}(A_2-A) \qquad \mathbf{3}$$

wird. Während also nach 1 der von der Excentricität herrührende Maximalfehler einer einzelnen Ablesung

$$M = \pm\frac{e}{r\cdot\text{Si}\,1''} \qquad \text{z. B. für } e = 10\cdot\mu \text{ und } r = 0^m,1 \qquad M = \pm\,20'',16$$

beträgt, so ist nach 3 derjenige des Mittels zweier an nahe diametralen Stellen gemachten Ablesungen nur

$$m = \pm \frac{e \cdot \varepsilon}{2r} \qquad \text{z. B. für obige Werte und } \varepsilon = 30'' \qquad m = \pm 0'',0015$$

und kann daher vernachlässigt werden. Es wird somit die Excentricität durch eine solche Kombination, und überhaupt bei Anwendung einer Anzahl über den Kreis gleichförmig verteilter Ablesestellen, sehr nahe eliminiert.

342. Die Bestimmung der Excentricität. — Statt den Einfluss der Excentricität zu eliminieren, kann man auch die Grösse und Richtung der letztern zu bestimmen suchen und sodann erstern berechnen [a]. Da nun das hiefür dienliche Verfahren zugleich wertvolle Anhaltspunkte für die Beurteilung des untersuchten Kreises giebt [b], so ist dasselbe auf jedes Winkelinstrument wenigstens Ein Mal in Anwendung zu bringen [c].

Zu 342: *a.* Versteht man nämlich unter D die durch Einstellung und Ablesung beliebig oft erhältliche Grösse $B_1 - A_1 - 180^0$, benutzt 341 : 1, 2, und vertauscht in den die kleinen Faktoren x' und y' enthaltenden Gliedern die A_2 und B_2 mit A_1 und $180^0 + A_1$, so erhält man

$$D = \varepsilon + 2x' \cdot \text{Si}\, A_1 - 2y' \cdot \text{Co}\, A_1 \tag{1}$$

Ersetzt man in dieser Beziehung A_1 successive durch α und $180^0 + \alpha$, so erhält man

$$D_1 = \varepsilon + 2x' \cdot \text{Si}\,\alpha - 2y' \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad D_2 = \varepsilon - 2x' \cdot \text{Si}\,\alpha + 2y' \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad D_1 + D_2 = 2\varepsilon \tag{2}$$

Man kann somit aus jeden zwei diametralen Einstellungen und Ablesungen, unabhängig von der Excentricität, einen Wert von ε finden, und, indem man das Mittel aus mehreren solchen Bestimmungen nimmt, diese Grösse genau ermitteln und von D abrechnen. Sodann ergeben sich aus den sämtlichen 1 die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma (D - \varepsilon) \cdot \text{Si}\, A_1 &= 2x' \cdot \Sigma\, \text{Si}^2 A_1 \qquad\qquad - 2y' \cdot \Sigma\, \text{Si}\, A_1 \cdot \text{Co}\, A_1 \\ \Sigma (D - \varepsilon) \cdot \text{Co}\, A_1 &= 2x' \cdot \Sigma\, \text{Si}\, A_1 \cdot \text{Co}\, A_1 - 2y' \cdot \Sigma\, \text{Co}^2 A_1 \end{aligned} \tag{3}$$

welche zur Bestimmung von x' und y' hinreichen und sich, wenn z. B. 12 Einstellungen von 30^0 zu 30^0 gemacht werden, noch bedeutend vereinfachen, da sich in diesem Falle zu jedem Werte von A_1 auch sein Komplement und sein Supplement vorfindet, folglich $\Sigma\, \text{Si}^2 A_1 = 6 = \Sigma\, \text{Co}^2 A_1$ und $\Sigma\, \text{Si}\, A_1 \cdot \text{Co}\, A_1 = 0$ wird. Sind aber einmal x' und y' berechnet, so lassen sich Richtung und Grösse der Excentricität nach

$$A = \text{Atg}\,\frac{y}{x} = \text{Atg}\,\frac{y'}{x'} \qquad \text{und} \qquad e = \frac{y}{\text{Si}\, A} = \frac{y' \cdot r \cdot \text{Si}\, 1''}{\text{Si}\, A} \tag{4}$$

ohne Schwierigkeit finden, und mit Hilfe dieser Werte kann sodann nach 341 : 1 der Einfluss der Excentricität auf jede beliebige Ablesung ermittelt, also diese korrigiert werden. — So z. B. erhielt **Encke** an einem 14-zölligen Kreise von Pistor die Wertepaare

$A_1 =$	0°	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330°
D =	6",7	-5,5	-14,6	-15,8	-14,0	-17,5	-19,5	-8,5	0,6	5,9	4,2	4",5

und hieraus ergeben sich successive für dieses Instrument

$$\Sigma D = -73'',5 \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{12}\,\Sigma D = -6'',1 \qquad x' = -5'',01 \qquad y' = -4'',11$$

$$A = 219^0 \qquad e = 0''',00264\, P = 6 \cdot \mu \qquad M = 6'',48$$

und sodann nach 1

$$D' = -6'',1 - 10'',02 \cdot \text{Si}\, A_1 + 8'',22 \cdot \text{Co}\, A_1 \qquad 5$$

— *b.* Berechnet man nach 5 rückwärts die sämtlichen zwölf D', so erhält man

D' = 3'',6 -2,9 -10,3 -16,5 -20,0 -19,7 -15,8 -9,3 -1,9 4,3 7,8 7'',5

so dass wirklich im grossen Ganzen die D durch die erhaltene Excentricität gefordert werden, aber doch immer noch für D — D' die beträchtlichen Werte

3'',1 —2,6 —4,3 0,7 6,0 2,2 —3,7 0,8 2,5 1,6 —3,6 —3'',0

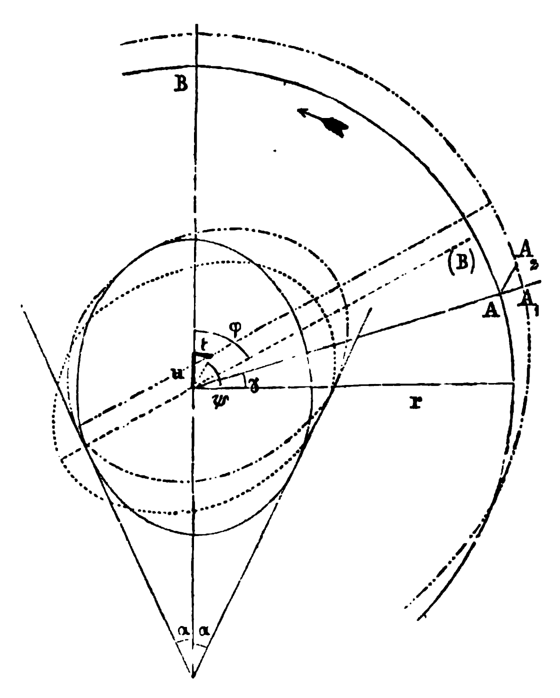
übrig bleiben, welche eine Kritik des Instrumentes ergeben, indem sie wohl (vgl. 344—45) zunächst als Teilungsfehler aufzufassen sind. — *c.* Besitzt ein Kreis nur Eine Ablesungsstelle, was zwar bei Vollkreisen kaum mehr, dagegen bei allen Sectoren (346) und dann namentlich beim Spiegelsextanten (352) vorkömmt, so kann die Excentricität natürlich nicht auf die in a erläuterte Weise bestimmt werden; da aber nach 341 : 2, 1

$$B_2 - A_2 = B_1 - A_1 + ax' - by' \quad \text{wo} \quad a = \text{Si}\, B_1 - \text{Si}\, A_1 \quad b = \text{Co}\, B_1 - \text{Co}\, A_1 \qquad 6$$

aus den Ablesungen bestimmbare Zahlen sind, so hat man in diesem Falle nur zwei anderweitig gut bestimmte Winkel ($B_2 - A_2$) mit ihren an dem zu untersuchenden Instrumente erhaltenen scheinbaren Massen ($B_1 - A_1$) zu vergleichen, um nach 6 zwei zur Bestimmung von x' und y' dienliche Gleichungen aufschreiben zu können.

343. Der Einfluss der Axengestalt. — Besitzen die Zapfen, auf welchen die Axe eines Vertikalkreises in den Lagern ruht, auch nur eine ganz geringe, am Niveau kaum erkennbare Ellipticität, so werden dadurch die Ablesungen merklich beeinflusst, indem während einer Umdrehung des Kreises der Mittelpunkt desselben zweimal eine kleine, von der Excentricität und dem Lagerwinkel abhängige Ellipse durchläuft, deren grosse Axe in die Bisectrix des letztern fällt, wodurch natürlich auch die Lage des Kreises gegenüber dem feststehenden Index systematisch etwas modifiziert wird[a].

Zu 343: *a.* Schon 1814 hob **Bessel** in einem Briefe an Olbers diesen Umstand beiläufig hervor und gab für den speciellen Fall eines Lagerwinkels von 90°, obschon er sich über die Natur der Bewegung des Kreismittelpunktes nicht ganz klar wurde, den hier in Betracht kommenden Effekt ganz richtig an. Durch seine Notiz angeregt, habe ich mich sodann wiederholt mit dieser Frage beschäftigt und dieselbe noch neuerlich (Mitth. 72 von 1888) dem oben mitgeteilten entsprechend in allgemeinerer Weise beantwortet. — Geht man, um den Einfluss der Axengestalt zu übersehen, von derjenigen Lage des Kreises aus, bei welchem die nach einem gewissen Teilstriche B gerichtete grosse Axe 2a des Zapfens den Lagerwinkel 2α halbiert oder vertikal steht, so wird ein um γ von der Horizontalen abweichender Index auf $A = B - (90^\circ - \gamma)$ weisen. Dreht man sodann den Kreis um φ, so sollte man, wenn die Teilung im Sinne des Pfeiles beziffert ist, die Ablesung $A_2 = A + \varphi$ erhalten, wird aber, da infolge der Ellipticität der Mittelpunkt des Kreises in den Punkt (u, t) gehoben wird und somit ein tieferer Punkt an den Index zu stehen kömmt, nur $A_1 = A_2 - \Delta A$ ablesen, wo (s. Fig. auf folgender Seite)



$$\Delta A \cdot r \cdot \mathrm{Si}\,1'' = \sqrt{u^2+t^2} \cdot \mathrm{Si}(\psi-\gamma),\quad \mathrm{Tg}\,\psi = \frac{u}{t},\quad \mathrm{Si}\,\psi = \frac{u}{\sqrt{u^2+t^2}},\quad \mathrm{Co}\,\psi = \frac{t}{\sqrt{u^2+t^2}} \qquad 1$$

ist. Benutzt man somit die l. c. abgeleiteten Werte

$$u = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Co}\,2\alpha}{4 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}(1-\mathrm{Co}\,2\varphi) = U \cdot r \cdot \mathrm{Si}\,1''(1-\mathrm{Co}\,2\varphi) \quad \text{wo} \quad U = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Co}\,2\alpha}{4 r \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,1''}$$

$$t = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2} \cdot \mathrm{Si}\,2\varphi \quad = T \cdot r \cdot \mathrm{Si}\,1'' \cdot \mathrm{Si}\,2\varphi \qquad T = \frac{a e^2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha}{2 r \cdot \mathrm{Si}\,1''} \qquad 2$$

und führt nach oben

$$\varphi = A_2 - A = A_1 + \Delta A - B - \gamma + 90^0 \quad \text{oder} \quad 2\varphi = 2(A_1 - B - \gamma) + 180^0 \qquad 3$$

ein, so erhält man successive

$$A_2 - A_1 = \frac{1}{r\,\mathrm{Si}\,1''} \cdot (u \cdot \mathrm{Co}\,\gamma - t \cdot \mathrm{Si}\,\gamma) =$$
$$= U\,[1 + \mathrm{Co}\,2(A_1 - B - \gamma)] \cdot \mathrm{Co}\,\gamma + T \cdot \mathrm{Si}\,2(A_1 - B - \gamma) \cdot \mathrm{Si}\,\gamma \qquad 4$$

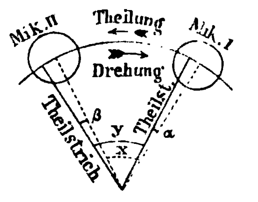
und somit eine Formel, nach welcher man den Einfluss der Ellipticität berechnen kann, sobald einmal die Konstanten U, T und B bekannt sind. Um diese letztern zu finden, kann man aber z. B. in der Weise vorgehen, dass man an den, entsprechend 342 für $\gamma = 0$ und $\gamma = 180^0$ erhaltenen D die Differenz der sich nach 4 in diesen beiden Fällen ergebenden Korrektionen, nämlich die Grösse $2\,U \cdot [1 + \mathrm{Co}\,2(A_1 - B)]$, anbringt, — aus den nunmehr nach 342 : 1 gebildeten 12 Gleichungen neben den x' und y' auch die U und B bestimmt, — und nach der aus 2 folgenden Proportion $T : U = 2\,\mathrm{Si}^2\alpha : \mathrm{Co}\,2\alpha$ schliesslich noch T berechnet. Besitzt man auch $\gamma = 90^0$ und $\gamma = 270^0$ entsprechende Ablesungsstellen, so kann entsprechend ein zweites System von Gleichungen gebildet und daraus zur Probe T und B neuerdings ermittelt werden.

344. Die Elimination zufälliger Teilungsfehler. — Die kleinen Differenzen, welche durch die vorhergehenden Untersuchungen unerklärt bleiben, zeigen in der Regel keinen systematischen Gang mehr und sind wohl zunächst durch kleine Unrichtigkeiten einzelner Teilstriche veranlasst [a]. Um den Einfluss solcher zufälliger Teilungsfehler unschädlich zu machen, reicht es bei kleinern Kreisen vollständig hin, das schon früher (332) erwähnte **Multiplikationsverfahren** anzuwenden, oder wohl noch besser das sog. **Repetitionsverfahren**, welches letztere darin besteht, dass man einen Winkel bei verschiedenen Stellungen des Limbus misst, also mit den Ablesestellen die beeinflussenden Teilungsfehler wechselt, folglich erwarten kann, dass dieselben sich im Mittelwerte nahezu eliminieren werden [b].

Zu 344: *a.* Ich verweise auf die in 342 : b erhaltenen Zahlen. — *b.* Beide Verfahren setzen mehr oder weniger Vollkreise voraus, sowie die Möglichkeit, den Limbus zu drehen. — Als historische Notiz füge ich bei, dass **Lalande** (Journ. d. S. 1791) sagt: „Nous devons annoncer qu'à l'Observatoire de Paris on a fait au solstice d'été 1790 l'essai d'un cercle qui n'a que 15″ de diamètre et qui, en multipliant les observations sur tous les points de la circonférence, a donné la hauteur solsticiale avec la précision d'une seconde: c'est à M. **Borda** à qui nous avons l'obligation de cette heureuse tentative; l'on n'avait point encore fait un aussi bon usage de l'idée ingénieuse que Tobie **Mayer** avait eue et qu'il consigna en 1752 dans les Mém. de Gott. Cependant M. **Bugge**, dans ses Observations publiées à Copenhague, dit que depuis 1762 il s'était servi, pour la carte du Seeland, de cette multiplication des angles".

345. Die Bestimmung der Teilungsfehler. — Bei grössern Kreisen und in Fällen, wo der Bau des Instrumentes die für Anwendung der obigen Verfahren nötigen Manipulationen nicht gestattet, ist es notwendig, die Fehler der einzelnen Teilstriche zu bestimmen, um dieselben in Rechnung bringen zu können. Es lässt sich diese Bestimmung entsprechend den früher besprochenen Teilungsverfahren in verschiedener Weise durchführen, jedoch wohl am besten, indem man über dem zu untersuchenden Kreise zwei Ablesemikroskope in der Weise aufstellt, dass deren Distanz jeweilen einem gewissen Teile des Kreises oder eines schon bekannt gewordenen Bogens des letztern entspricht [a].

Zu 345: *a.* Fällt nämlich der Nullstrich des Kreises in das erste, der Teilstrich $Z = 360^0 : n$ in das zweite Mikroskop, und misst man mit den beweglichen Faden die Distanzen α und β, um welche diese Striche im Sinne der Teilung von dem betreffenden Index abstehen, so erhält man die Gleichung



$$y = x - \alpha + \beta \qquad 1$$

in welcher x die Distanz der beiden Mikroskope,

y diejenige der beiden Teilstriche bezeichnet. Eine entsprechende Beziehung ergiebt sich, wenn man bei unverändertem Stande der Mikroskope durch Drehen des Kreises den Teilstrich Z in das erste, folglich den Teilstrich 2 Z in das zweite Mikroskop bringt, — dann 2 Z und 3 Z, — etc., bis der Kreis erschöpft ist. Die Summe aller dieser n Gleichungen 1 giebt aber offenbar die neue Gleichung

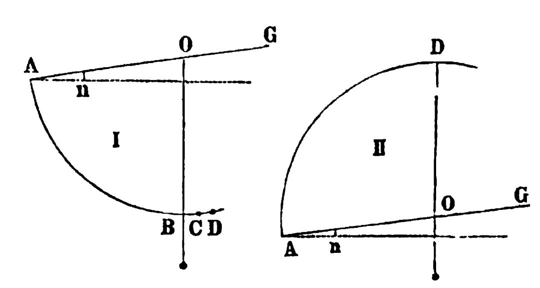
$$360^\circ = n \cdot x - \Sigma \alpha + \Sigma \beta \qquad 2$$

aus welcher man x, und sodann nach den 1 die Werte aller einzelnen y berechnen, folglich durch Vergleichung dieser letztern mit ihrem Nennwerte die Fehler aller benutzten Striche finden kann. Nachher nimmt man in ähnlicher Weise, sei es für andere Werte von n, sei es durch Anknüpfen an zwei der schon bekannten Teilstriche, weitere Bestimmungen vor, bis man hinlängliche Anhaltspunkte hat, um die übrigen Teilstriche direkt mit einem der Ablesemikroskope vergleichen zu können. — Für weitern Detail und zum Teil etwas abgeänderte Dispositionen vergleiche „C. A. **Peters**, Untersuchungen der Teilungsfehler des Ertel'schen Vertikalkreises der Pulkowaer Sternwarte (Mém. Pet. 1847), — Félix-Victor **Mauvais** (Romboz im Dép. du Doubs 1809 — Paris 1854, wo er sich, als Republikaner entsetzt, aus Verzweiflung erschoss; Obs. und Mitgl. des Bureau des long. Paris), Détermination des erreurs de division du cercle mural de Fortin à l'Observatoire de Paris (Compt. rend. 1853), — Ch. **Wolf**, Etudes des divisions du cercle méridien de Secrétan-Eichens (Ann. Obs. Par., Observat. 19), — Wilhelm **Schur** (Altona 1846 geb.; damals Obs. Strassburg, jetzt Dir. Obs. Göttingen), Bestimmung der Teilungsfehler des Repsold'schen Meridiankreises der Strassburger Sternwarte (A. N. 2532 von 1883), — Magn. **Nyrén**, Untersuchung der Repsold'schen Teilung des Pulkowaer Vertikalkreises. Petersburg 1886 in 4., — O. **Schreiber**, Untersuchung von Kreisteilungen mit zwei und vier Mikroskopen (Zeitschr. f. Instr. 6 von 1886), — etc.".

346. Die Höhenquadranten, Zenitsectoren und Höhenkreise. — Zu Gunsten der Messung von Höhenwinkeln wurden seit den ältesten Zeiten vielfach **Quadranten** konstruiert, welche in der Regel so aufgestellt waren, dass ihre Ebene in jeden Vertikal gebracht und an der Teilung die momentane Lage der Visierlinie gegen die aus der Lotrichtung abgeleitete Horizontale abgelesen werden konnte, — sei es, dass der Quadrant mit Hilfe des Lotes orientiert und die Visiervorrichtung mit einem drehbaren Radius verbunden war, — sei es, dass beide sich mit einander drehten und der Schnitt des Lotes mit der Teilung gewissermassen als Index diente [a]. — Zu speciellen Zwecken und namentlich in dem Falle, wo es sich ausschliesslich darum handelte, den Zenit des Beobachters gegen benachbarte Sterne festzulegen, wurde wohl auch der Quadrant auf einen kleinern Sector reduziert, da es in diesem Falle konstruktiv möglich war, den Radius und damit die Leistungsfähigkeit bedeutend zu vergrössern, und es entstanden so z. B. die **Zenitsectoren,** mit deren Hilfe (264) die Aberration entdeckt wurde [b]. — In allen Fällen dagegen, wo nicht solche Specialitäten ins Auge

zu fassen sind, hat die neuere Zeit aus bereits mehrfach angegebenen Gründen umgekehrt die Quadranten durch Vollkreise von mässigen Dimensionen, aber möglichst sorgfältiger Ausführung ersetzt, und die Erfahrung hat die Zweckmässigkeit dieser Neuerung ausser Frage gestellt [a].

Zu 346: *a.* Schon ein Schüler von Aristoteles, der Grieche **Dikäarch** (Messene 350 — ebenda 290; Philosoph und Geograph), dürfte einen Quadranten mit Diopteru besessen haben; denn die Angabe von Eratosthenes (vgl. „Eratosthenica, ed. Bernhardy. Berolini 1822 in 8."; fragm. 39), dass derselbe mit „dioptrischen Messwerkzeugen" Höhenwinkel von Berggipfeln gemessen habe, lässt sich kaum anders deuten. — Auch bei den spätern Griechen, sodann wieder bei den Arabern und im Abendlande, waren unzweifelhaft Höhenquadranten im Gebrauche, und so bildete z. B. **Tycho** in seiner schon mehrfach citierten „Astronomia instaurata" verschiedene Instrumente solcher Art ab. Während aber noch diese letztern ausschliesslich der erstern Kategorie angehörten, zog dagegen **Picard** bei Konstruktion des für seine berühmte Gradmessung (418) bestimmten Höhenquadranten die zweite vor. Dieser nachher lange als mustergiltig betrachtete Quadrant, der einen kupfernen und mit Hilfe von Transversalen Minuten gebenden Limbus von 38 Zoll Radius besass, war nämlich an einem Stative in seinem Schwerpunkte so aufgehängt, dass er sich samt dem an ihm festen Fernrohr AO (A = Okular, O = Objektiv und Centrum) drehen und umschlagen liess, und sein Horizontpunkt C in folgender Weise bestimmt werden konnte: Das Fernrohr wurde auf einen dem Horizonte nahen, dagegen vom Beobachter möglichst entfernten Gegenstand G eingestellt, und nun mit dem Lote der unter dem Centrum liegende Punkt B der Teilung aufgesucht, so dass $AB = 90^0 - n$ war; dann wurde der Quadrant umgedreht, umgeschlagen, das Fernrohr nochmals auf G gerichtet, und mit dem Lote der nunmehr über dem Centrum in der Distanz $AD = 90^0 + n$ liegende Punkt D der Teilung aufgesucht; man hatte also den von n unabhängigen Wert $\frac{1}{2}(AB + AD) = 90^0$ oder es lag der gesuchte Punkt C genau in der Mitte zwischen B und D. — *b.* Für die von **Molyneux** und **Bradley** verwendeten Zenitsectoren auf 264 verweisend, sind hier namentlich diejenigen zu erwähnen, welche bei den Gradmessungen in Frankreich, Peru und Lappland (418, 421, 422) zur Bestimmung der Breitendifferenzen dienten: Derjenige von **Picard** hatte 10' Radius auf 18° Bogenlänge und gab mittelst Transversalen 20", liess jedoch mindestens 4" abschätzen, — der nach Peru mitgenommene besass 12' Radius bei 30° Bogenlänge, gab direkt Minuten und mit Hilfe eines **Louville**'schen Mikrometers (340) einzelne Sekunden, — und der in Lappland angewandte, durch **Graham** in ganz vorzüglicher Weise ausgeführte Sector von 8' Radius auf angeblich $5\frac{1}{2}^0$, strenge genommen $5^0\ 29'\ 56\frac{1}{4}''$ Bogenlänge, war durch Punkte in Achtelsgrade eingeteilt, liess aber



mikrometrisch ebenfalls einzelne Sekunden ablesen. — Speciell ist anzuführen, dass, während **Picard** den Zenitpunkt wiederholt mittelst eines zenitalen Sternes in entsprechender Weise wie den Horizontalpunkt seines Quadranten bestimmte, und auch in Peru regelmässig Umlegungen vorgenommen wurden, in Lappland letzteres unterlassen und sogar nach Transport des Instrumentes angenommen wurde, es sei die Kollimation unverändert geblieben. — Ferner ist zu erwähnen, dass man in Peru und Lappland bei Beobachtung eines Sternes dem Fernrohr vorerst eine Lage gab, bei welcher das Lot mit einem Teilstriche oder Teilpunkte coincidierte, — dann aber in Peru einen beweglichen, in Lappland dagegen den festen Faden mit einer Mikrometerschraube zum Sterne führte. — Für die höchst ingenieuse Art, in der sich die französischen Akademiker in Peru zu helfen wussten, als ihnen Zweifel an der Richtigkeit ihres Sectors aufstiegen, muss auf „**La Condamine**, Mesure des trois premiers degrès du méridien austral. Paris 1751 in 4. (pag. 116—21)" verwiesen werden. — *c.* Vergleiche das in 335 darüber beigebrachte. — Aus einem 1783 VI 19 von Henry **Ussher** (1735? — Dublin 1790; Dr. theol. und Prof. astr. Dublin) an Joh. III Bernoulli geschriebenen Briefe (Mém. Berl. 1782) geht hervor, dass **Ramsden** für die damals im Bau begriffene Dubliner Sternwarte einen 10-füssigen Vollkreis in Arbeit hatte, der um eine vertikale Axe drehbar war.

347. Die Astrolabien und der Bordakreis. — In der frühern Zeit kam sehr häufig unter dem Namen **Astrolabium** ein geteilter Halbkreis zur Verwendung, der zwei feste, der Null-Linie entsprechende Diopter, ferner einen um das Centrum drehbaren Diopterlineal besass, meist auch eine Boussole trug, und mit einem Dreifusse mittelst einer sog. **Nuss** (genou) so verbunden war, dass er in die Winkelebene gebracht, folglich jeder Winkel direkt gemessen werden konnte [a]. — Später trat an dessen Stelle meist ein Quadrant oder Sextant von etwas grösserm Radius, der eine analoge, wenn auch wesentlich vervollkommnete Aufstellung besass, sowie von der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts hinweg, statt der Diopter, Fernröhren mit Fadenkreuz erhielt [b], — und nach der Mitte des 18. Jahrhunderts führte **Borda** den nach ihm benannten Kreis ein, der neben den Vorzügen des Vollkreises sich durch eine mustergiltige Aufstellung auszeichnete, welche unter Anwendung des Principes der Multiplikation oder Repetition verhältnismässig leicht erlaubte, jeden beliebigen Winkelabstand mit Genauigkeit zu bestimmen [c].

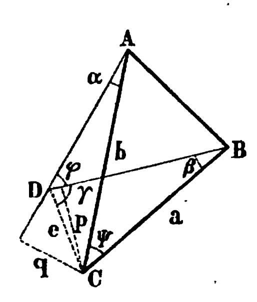
Zu 347: *a.* In der ältern Zeit wurde der Name **Astrolabium** (von ἄστρον = Stern und λαμβάνω = ich fasse) nicht nur für die oben beschriebenen, sondern so ziemlich für alle mit Kreisteilungen versehenen Instrumente gebraucht, — namentlich auch für die **Planisphärien** (360), und einen von **Ptolemäus** (386) ausgedachten Apparat, um die Längen und Breiten der Sterne direkt zu bestimmen. — *b.* Der anfänglich von **Snellius** bei seiner Gradmessung (416) gebrauchte zweifüssige, messingene Quadrant war noch ziemlich primitiv, indem er mittelst Transversalen nur notdürftig Minuten gab. Dagegen besassen **Tycho** und **Hevel** bereits bedeutend bessere Instrumente dieser Art, und der von

Picard zu seiner Triangulation (418) verwendete Quadrant, welcher sich von dessen Höhenquadranten (346) nur durch sein Stativ und die Beigabe eines zweiten und drehbaren Fernrohrs unterschieden zu haben scheint, leistete offenbar noch wesentlich mehr. — Der Kuriosität wegen mag hier anhangsweise auch der, beim Gebrauche drei Mann in Anspruch nehmende, 7-füssige Sextant erwähnt werden, welchen Jonas **Moore** (Whitbee in Lancashire 1617 — Godalming 1679; erst Prof. math. London, dann Genie-Inspektor), der Protektor von **Flamsteed**, 1676 für diesen auf eigene Kosten als Hauptinstrument der ersten Sternwarte in Greenwich konstruieren liess: Derselbe konnte mit Hilfe eines Räderwerks in die Ebene zweier Gestirne, deren Distanz gemessen werden sollte, gebracht werden; nachher wurde er in dieser Ebene so gedreht, dass der eine Stern im Fadenkreuze eines festen, dem Nullpunkte entsprechenden Fernrohrs erschien, während ein anderes, bewegliches Fernrohr auf den zweiten Stern eingestellt wurde. — *c.* Der nach den Ideen von **Borda** durch **Lenoir** ausgeführte Kreis kam zum ersten Male 1787 bei der zur Verbindung der Sternwarten von Paris und Greenwich ausgeführten Triangulation (426) in Gebrauch, spielte dann aber namentlich bei der als Grundlage des metrischen Systemes angeordneten neuen französischen Gradmessung eine so hervorragende Rolle, dass **Delambre** von demselben in der „Base du système métrique (II 160 ff.)“ eine ausführliche Beschreibung mit Abbildungen zu geben hatte, auf welche es hier genügen mag, für den Detail zu verweisen, da der Bordakreis in der neuern Zeit durch die sofort zu beschreibenden Instrumente wieder ganz ausser Kurs gesetzt worden ist. — Dagegen mag noch **einerseits** erwähnt werden, dass im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts auch **Reichenbach** und sein trefflicher Schüler U. **Schenk** vorzügliche Exemplare des Bordakreises lieferten, ja ein von letzterm verfertigter 18-Zöller noch jetzt eine Hauptzierde der kleinen Instrumentensammlung der Berner Sternwarte bildet, — und **anderseits**, da der Bordakreis namentlich auch als Repetitionskreis beliebt war, dass in den ersten Decennien unsers Jahrhunderts noch viel über die Vorteile und Nachteile solcher Instrumente herumgestritten wurde. **Littrow** sprach sich nun in seiner Abhandlung „Über den erweiterten Gebrauch der Multiplicationskreise. Prag 1820 in 8.“ entschieden dahin aus, dass die Repetitionsinstrumente zu empfehlen seien, wenn man sie nicht eigentlich zum Multiplizieren (wo durch das häufige Klemmen schädliche Verschiebungen entstehen können), sondern in folgender, das Eliminieren der Teilungsfehler ebenfalls bewirkender Weise anwende: Man soll für jede Serie von Beobachtungen auch den Repetitionskreis wie einen gemeinen Kreis behandeln, so bei Höhenmessungen ebenfalls in beiden Lagen (Kreis Ost und Kreis West) beobachten, etc., und nur jeweilen für eine neue Serie den äussern Kreis losklemmen und verstellen, — d. h. also dasselbe Princip zur Anwendung bringen, welches den neuern Vorschriften der Geodäsie für das Messen der Horizontalwinkel mit Repetitionstheodoliten (349) zu Grunde liegt. Anhangsweise zeigt **Littrow** an einigen eklatanten Beispielen, wie man sich arg täuschen kann, wenn man aus der Übereinstimmung innerhalb einer Serie auf die wirkliche Güte des Resultates schliesst.

348. Die Reduktion auf Centrum und Horizont. — Bei terrestrischen Operationen kömmt es häufig vor, dass man sich nicht genau im Scheitel eines zu bestimmenden Winkels aufstellen kann, sondern denselben, wie man sagt, **excentrisch** messen und somit

nachträglich für Grösse und Richtung der Excentricität verbessern, d. h. eine sog. **Reduktion auf das Centrum** vornehmen muss[a]. — Da ferner jedes der Winkelobjekte in der Regel eine gewisse Höhe über dem Horizonte besitzt, so hat man zwischen ihrem wirklichen Winkelabstande und ihrem Horizontalabstande zu unterscheiden und, wenn z. B. mit Hilfe des Bordakreises der erstere gemessen wird, noch eine sog. **Reduktion auf den Horizont** auszuführen, um den letztern zu erhalten[b].

Zu 348: *a.* Bei der Gradmessung in Peru (421) wurden, wenn das Instrument nicht in dem Dreieckspunkte C selbst aufgestellt werden konnte, sondern statt ψ in einem benachbarten Punkte D der Winkel φ gemessen werden musste, von C aus (wohl mit Hilfe einer Kreuzscheibe 330) die Senkrechten p und q auf BD und AD gefällt und mit einer Schnur gemessen, — aus diesen und approximativen Werten von a und b die Winkel α und β berechnet, wofür sich **La Condamine** einer von Jean de **Lagrive** (Donchery bei Sédan 1687 — Paris 1757; erst Priester und Lehrer am Lazaristen-Kollegium in Krakau, dann als Topograph in Paris lebend) berechneten Hilfstafel bediente, — und sodann aus



$$\alpha + \varphi = \beta + \psi \qquad \text{oder} \qquad \psi = \varphi + \alpha - \beta \qquad \mathbf{1}$$

der richtige Winkel berechnet. — Jetzt misst man nach dem Vorgange von **Delambre** statt p und q meistens die **Excentricität** e und den **Direktionswinkel** γ, und berechnet α und β aus

$$\frac{\text{Si}\,\alpha}{\text{Si}\,(\varphi+\gamma)} = \frac{e}{b} \qquad \frac{\text{Si}\,\beta}{\text{Si}\,\gamma} = \frac{e}{a} \qquad \text{oder} \qquad \alpha \fallingdotseq \frac{e\cdot\text{Si}\,(\varphi+\gamma)}{b\cdot\text{Si}\,1''} \qquad \beta \fallingdotseq \frac{e\cdot\text{Si}\,\gamma}{a\cdot\text{Si}\,1''} \qquad \mathbf{2}$$

— *b.* Bezeichnet a den wahren, $A = a + x$ den auf den Horizont bezogenen Winkel zweier Objekte der Zenitdistanzen $b = 90^0 - \beta$ und $c = 90^0 - \gamma$, so hat man, wenn man sich aus dem Scheitel eine Kugelfläche von beliebigem Radius beschrieben denkt, nach 90 und unter Voraussetzung, dass β, γ, und um so mehr x, kleine Grössen seien

$$\text{Co}\,a = \text{Si}\,\beta\cdot\text{Si}\,\gamma + \text{Co}\,\beta\cdot\text{Co}\,\gamma\cdot\text{Co}\,(a+x)$$
$$\fallingdotseq \beta\cdot\gamma\cdot\text{Si}^2\,1'' + (1 - \tfrac{1}{2}\beta^2\cdot\text{Si}^2\,1'')\,(1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2\cdot\text{Si}^2\,1'')\,(\text{Co}\,a - x\cdot\text{Si}\,a\cdot\text{Si}\,1'')$$

woraus für $p = \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)$ und $q = \tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$ die schon durch **Legendre** in seinem Mémoire von 1787 gegebene Näherungsformel

$$x = \frac{\text{Si}\,1''}{2\cdot\text{Si}\,a}\left[2\beta\gamma - (\beta^2+\gamma^2)\cdot\text{Co}\,a\right] = \left[p^2\cdot\text{Tg}\,\frac{a}{2} - q^2\cdot\text{Ct}\,\frac{a}{2}\right]\cdot\text{Si}\,1'' \qquad \mathbf{3}$$

folgt, welcher ich jedoch die ebenfalls nach 90 bestehende strenge Formel

$$\text{Co}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{Si}\,s\cdot\text{Si}\,(s-a)}{\text{Si}\,b\cdot\text{Si}\,c}} \qquad \text{wo} \qquad s = \frac{a+b+c}{2} \qquad \mathbf{4}$$

vorziehen möchte. — Ebenso lässt sich nach den Formeln

$$\text{Co}\,a = \text{Co}\,c\cdot\text{Co}\,(b-x)\cdot\text{Se}\,x \qquad \text{wo} \qquad \text{Tg}\,x = \text{Tg}\,c\cdot\text{Co}\,A \qquad \mathbf{5}$$

auch die umgekehrte Aufgabe leicht lösen. — Vgl. ferner „A. L. Fr. **Meister**, Descriptio et examen scalæ pro reducendis ad horizontem angulis inclinatis a Tob. Mayero concinnatæ (Comm. Gott. 1785/6)".

349. Azimutalquadrant, Theodolit und Universalinstrument. — Der sich als höchst fruchtbar erweisende Gedanke, Winkelinstrumente mit zwei zu einander senkrechten Kreisen zu konstruieren, an welchen sich sozusagen auf Einen Schlag die Richtungen beliebiger Visuren nach Höhe und Azimut, also offenbar auch ihre Richtungsunterschiede festlegen lassen, findet sich schon in dem **Azimutalquadranten** der Araber und dessen Nachbildungen auf Hveen, sowie in Kassel und Danzig verwirklicht[a]; aber immerhin bedurfte es noch lange Jahre und des immer fühlbarer werdenden Bedürfnisses, für geodätische Arbeiten ein tragbares Instrument von grösserer Leistungsfähigkeit zu besitzen, bis aus jenen noch ungefügigen und relativ kostbaren Apparaten nach und nach unser gegenwärtiger handlicher und leicht zu beschaffender **Theodolit**[b], und aus diesem dann wieder etwas später das, allerdings diese letztern Eigenschaften nicht mehr in gleichem Masse besitzende, aber auch den umfassendsten Anforderungen genügende und mit vollem Recht den Namen **Universalinstrument** tragende Hilfsmittel hervorging[c].

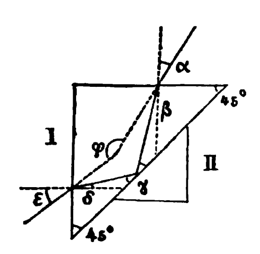
Zu 349: *a.* Die Idee, anstatt eines Winkels dessen Projektion auf eine Horizontalebene und die Projektionswinkel seiner Schenkel zu messen, ist bereits in den für die Sternwarte zu Meragah konstruierten „drehenden Quadranten" und dem wohl damit identischen „Instrument des quarts de cercle mobiles" Sédillots vertreten, da dabei übereinstimmend von einem horizontalen Kreise die Rede ist, über welchem zwei Quadranten mit Alidaden spielten, um von zwei Gestirnen in einem gegebenen Momente gleichzeitig die Höhen und Azimute messen und dadurch ihre Distanz bestimmen zu können. Leider wird über die Grösse dieses **Azimutalquadranten** von Meragah nur die unbestimmte Angabe „le plus grand possible" gemacht, — auch nur gesagt, dass Horizontalkreis und Quadranten in Grade und ihre „Unterabteilungen" geteilt waren, und die Grade am Horizontalkreise vom Ost- und Westpunkte aus gezählt wurden. — Im Abendlande findet sich die erste Spur eines solchen Instrumentes in dem schon früher (57) erwähnten Kremsmünster-Kreise von 1570, — einem hölzernen Kreise von $6^1/_2$" Durchmesser, in dessen Centrum eine vertikale Axe stand, die ein Diopterlineal trug und an welche ein elfenbeinerner, in 180 Grade geteilter Halbkreis befestigt werden konnte, über welchem ein Lot spielte. — Sodann folgte der von **Tycho** aus Messing konstruierte und daher nachmals von ihm in seiner mehrerwähnten „Astr. inst. mech." auch als „orichalcicus" aufgeführte **Quadrans azimuthalis,** der aus einem mittelst Transversalen und Nonius'schen Hilfsquadranten die einzelnen Minuten gebenden, mit Diopterlineal versehenen Höhenquadranten von $1^1/_2$ Ellen Radius bestand, welcher über einem horizontalen, ebenfalls Minuten gebenden und mittelst vier Schrauben auf Marmorsäulen ruhenden Vollkreise von zwei Ellen Durchmesser spielte. — Ungefähr gleichzeitig, und wohl nicht ohne konstruktive Verbesserungen, führte auch **Bürgi** mehrfach solche Instrumente aus, — ihren Höhenpunkt aber scheinen sie, wie uns die „Machina coelestis" zeigt, ein halbes Jahrhundert später bei **Hevel** erreicht zu haben, der unter anderm die vier Fussschrauben auf drei reduzierte, die vor ihm einfach mit der Hand ausgeführten Feinbewegungen durch Mikrometerschrauben und Schnurzüge ausführte, etc.;

dabei besass sein Azimutalkreis 4′ Durchmesser, sein Quadrant 5′ Radius, und beide waren direkt in Minuten abgeteilt, während Transversalen 10″ abzulesen und 5″ abzuschätzen erlaubten. — *b.* Während mutmasslich **Römer** der erste war, welcher (vgl. die Bas. astr.) den Quadranten durch einen Vollkreis ersetzte, und **Ramsden** derjenige Mechaniker, welcher in dem 1789 nach Palermo gelieferten, über einem dreifüssigen Horizontalkreise spielenden fünffüssigen Vertikalkreise den grössten **Altazimut** mit Vollkreis erstellte, — kommt dagegen nach einer Note, welche **Maclaurin** 1745 seiner Übersetzung von Dav. Gregorys „Practical Geometry" beigefügt haben soll, das noch grössere Verdienst, das ganze Instrument zu einem tragbaren und dennoch leistungsfähigen Apparate kondensiert, d. h. einen ersten **Theodoliten** geschaffen zu haben, dem englischen Mechaniker John oder Jonathan **Sisson** (1690? — 1760?; Schüler von Graham, der auch Bird bei diesem einführte) zu. — Über den Ursprung des Namens „Theodolit" sind die Gelehrten nicht einig; jedoch hat die von Breton de Champ aufgestellte Ansicht, er sei durch Zusammenziehung aus „The Alidada" entstanden, viel für sich, zumal in dem Werke „Leonard **Digges**, Pantometria, a geometrical practical treatise (London 1571 in 4.; 2. ed. 1591 durch Sohn Thomas)" das einen geteilten Kreis mit Alidade beschreibende Kapitel 27 die Aufschrift „The composition of the Instrument called Theodolitus" besitzen soll. — In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von den **Short** (vgl. 387), **Adams, Brander, Ramsden,** etc., in zahlreichen Exemplaren und fortwährend etwas besser ausgeführt, wurde sodann dem Theodoliten im Anfange des laufenden Jahrhunderts sein gegenwärtiger mustergiltiger Bau durch **Reichenbach** gegeben, auch ein sog. **Versicherungsfernrohr** zur Kontrole des unveränderten Standes beigefügt und durch Drehbarmachen der Limben beider Kreise die Multiplikation und Repetition der Winkel ermöglicht. Schon 1812 stellte Baron **v. Zach**, der 1807 eigens nach München gereist war, um Reichenbachs Theodoliten kennen zu lernen, denselben das glänzende Zeugnis aus: „Die Repetitionstheodoliten von 8 Zoll sind für die allergenausten geodätischen Vermessungen hinlänglich und schon desswegen dazu zu empfehlen, weil sie wegen ihres sehr geringen Gewichts so transportabel sind und so wenig Raum einnehmen, dass man sie auf alle Berge, Thürme, etc. bringen kann. Man gelangt bei ihnen schon nach der 10. Wiederholung (öfters früher) auf die stehende Sekunde. Was diesen Werkzeugen diese grosse Vollkommenheit gibt, ist, ausser ihrer feinen mechanischen Ausführung, ihre äusserst wohl ausgedachte Bauart". — Seit jener Zeit haben sich nun allerdings die Anforderungen sehr gesteigert, aber es ist den Mechanikern gelungen, mit denselben Schritt zu halten; namentlich ist der, noch bei den ältern Theodoliten Reichenbachs verkümmerte, ja zuweilen nur durch ein Segment vertretene Höhenkreis in gleiche Rechte wie der Horizontalkreis eingesetzt worden. — *c.* Für geographische Ortsbestimmungen war der Theodolit weniger geeignet, da für solche die Beobachtung von hohen Sternen notwendig war; aber auch da wusste sich der ausgezeichnete Münchner Mechaniker zu helfen, indem er einen, allerdings bereits 1637 von **Hevel** (vgl. Selenographia pag. 27) ausgesprochenen, aber dann wieder so ziemlich vergessenen Gedanken zu Hilfe nahm. Schon 1816 konnte nämlich **Horner** aus Zürich an Repsold schreiben: „**Reichenbach** hat eine neue Art Theodolit verfertigt, bei welchem das bewegliche Fernrohr unter einem rechten Winkel gebrochen ist, dergestalt, dass man zur Seite durch die Queraxe hineinsieht; Herr von Zach gibt ihm

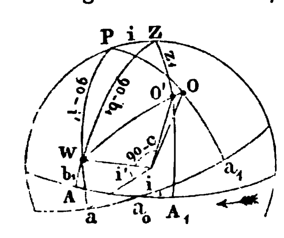
den seltsamen Namen **Stumpfschwanz**". — Aus der successiven Ausbildung dieses sog. „astronomischen" Theodoliten, seiner Erweiterung zum Repetitionstheodoliten, seiner Ausstattung mit Ablesemikroskopen, bequemen Beleuchtungs- und Umlegevorrichtungen, etc., ging nunmehr das unter der folgenden Nummer einlässlich zu behandelnde, gewissermassen ein transportables Observatorium darstellende **Universalinstrument** hervor, das bereits für astronomisch-geodätische Arbeiten fast unentbehrlich geworden ist, und das namentlich die jüngern **Repsold** zu einer früher kaum geahnten Vollkommenheit gebracht haben.

350. Die Theorie des Universalinstrumentes. — Damit das Universalinstrument richtig projiziere, ist es notwendig, dass der eine der beiden Kreise wirklich horizontal stehe, — dass ferner die beiden Lager der Axe, welche den andern Kreis und das Fernrohr trägt, genau denselben Abstand von jenem ersten Kreise besitzen, — und dass endlich diese Axe zu der optischen Axe des Fernrohrs senkrecht stehe, — da offenbar nur in diesem Falle die Gesichtslinie beim Drehen des Fernrohrs eine Vertikalebene beschreibt. — Damit diese drei Hauptbedingungen wenigstens sehr nahe erfüllt seien, d. h. das Instrument als zum Gebrauche bereit oder als richtig **aufgestellt** betrachtet werden könne, ist folgende Reihe von Manipulationen vorzunehmen: Zuerst wird eine Libelle auf die Drehaxe des Fernrohrs aufgesetzt, letztere über eine der Fuss-Schrauben gebracht und nun die Libelle eingestellt; dann wird die Libelle umgekehrt aufgesetzt und von ihrem allfälligen Ausschlage die Hälfte an der Fuss-Schraube, der Rest an der Libelle korrigiert; nachher dreht man die Alidade um 180° und verbessert einen neuen Ausschlag der Libelle zur Hälfte an der Fuss-Schraube, zur Hälfte an einem der Lager; hierauf stellt man die Axe parallel zu den beiden andern Fuss-Schrauben und bringt mit diesen die Libelle nochmals zum Einspielen; endlich stellt man das Fadenkreuz des Fernrohrs genau auf einen Gegenstand ein, — legt entweder das Fernrohr in seinen Lagern um, oder führt dasselbe, nach Drehen der Alidade um 180°, mittelst Durchschlagen auf den Gegenstand zurück, — und verbessert die Hälfte der Abweichung an den Stell-Schrauben des Fadenkreuzes oder des das gebrochene Fernrohr konstituierenden Prismas [a]. — Die kleinen Fehler, welche auch bei sorgfältiger Aufstellung übrig bleiben, sucht man zu bestimmen, um dieselben, soweit es nicht durch passende Anordnung der Beobachtungen gelingt sie unschädlich zu machen, in Rechnung bringen zu können [b].

Zu 350: *a.* Bei dem gebrochenen Fernrohr fallen die vom Objektive kommenden Strahlen auf ein in der Mitte der hohlen Drehaxe angebrachtes gleichschenklig rechtwinkliges Glasprisma I, und werden durch dasselbe in



die eine, das Okular tragende Hälfte der Drehaxe geworfen. Fällt aber ein Strahl unter dem Winkel α auf das Prisma ein, so verlässt er dasselbe (wegen $\beta + \gamma = 45^0 = \delta + \gamma$ oder $\beta = \delta$) auch unter dem Winkel $\varepsilon = \alpha$, so dass $\varphi = (\alpha - \beta) + 180^0 - 2\gamma + (\varepsilon - \delta) = 90^0 + 2\alpha$ wird, also das gebrochene Fernrohr nur für $\alpha = 0$ der Forderung, es solle die optische Axe senkrecht zur Drehaxe stehen oder keine **Kollimation** besitzen, Genüge leisten kann. — Um trotz Zwischenstellung des Prismas auch bei dem gebrochenen Fernrohr die Fadenbeleuchtung durch die Axe zu ermöglichen, hatte W. **Struve** den guten Gedanken, dem Prisma I noch ein zweites Prisma II aus demselben Glase aufzusetzen. — Anhangsweise mag darauf aufmerksam gemacht werden, dass beim astronomischen Fernrohr mit und ohne Prisma **oben-unten** als **unten-oben** erscheint, — dagegen nur ohne Prisma **links-rechts** als **rechts-links.** — Wenn man endlich die Kollimation durch Umdrehen und Durchschlagen ermittelt, so braucht man nur in beiden Lagen den Vertikalkreis abzulesen, um im Mittel der beiden Ablesungen zugleich den Zenitpunkt desselben zu erhalten. — *b.* Auch nach sorgfältiger Aufstellung wird in der Regel der sog. Horizontalkreis, dessen Pol in P liegen mag, eine kleine Neigung i gegen den wahren Horizont besitzen, so dass nur sein Teilpunkt a_0 wirklich im Horizonte liegt; ferner wird die Drehaxe des Fernrohrs nicht genau mit dem Horizontalkreise parallel sein, sondern ihr Westende W eine kleine Erhebung i' über denselben haben; endlich wird die optische Axe nicht vollständig zu der Drehaxe senkrecht stehen, sondern mit ihr einen Winkel $90^0 - c$ bilden, und während sie bei einem gewissen Stande des Instrumentes nach O weisen sollte, so wird sie nach einem benachbarten Punkte O' gerichtet sein, und somit die Ablesung a_1 am Horizontalkreise einem Punkte A_1 am Horizonte entsprechen. Nun hat man aus Dreieck PZW, wenn b_1 die Angabe der Libelle bezeichnet und a durch $90^0 + a_1$ ersetzt wird,



$$\text{Si}\, b_1 = \text{Si}\, i' \cdot \text{Co}\, i - \text{Co}\, i' \cdot \text{Si}\, i \cdot \text{Co}\,(a_1 - a_0) \qquad \text{oder} \quad b_1 \fallingdotseq i' - i \cdot \text{Co}\,(a_1 - a_0) \quad \mathbf{1}$$

$$\text{Si}\,(A - a_0 + 90) : \text{Si}\,(a - a_0 + 90) = \text{Co}\, i' : \text{Co}\, b_1 \qquad A \fallingdotseq a = 90^0 + a_1 \quad \mathbf{2}$$

Ferner folgt aus Dreieck ZWO', wenn z_1 die mit Hilfe des oben bestimmten Zenitpunktes erhaltene Zenitdistanz von O' ist,

$$\text{Si}\, c = \text{Si}\, b_1 \cdot \text{Co}\, z_1 + \text{Co}\, b_1 \cdot \text{Si}\, z_1 \cdot \text{Si}\,[90^0 - (A - A_1)]$$

Da nun in dieser Gleichung die Seite links und das erste Glied rechts klein sind, so muss auch das zweite Glied und somit der Faktor Si $[90^0 - (A - A_1)]$ klein sein, also

$$c \fallingdotseq b_1 \cdot \text{Co}\, z_1 + (A_1 - a_1) \cdot \text{Si}\, z_1 \qquad \text{oder} \qquad A_1 = a_1 + c \cdot \text{Cs}\, z_1 - b_1 \cdot \text{Ct}\, z_1 \quad \mathbf{3}$$

so dass sich also jede Ablesung mit Hilfe von 1 und 3 leicht für die übrig gebliebenen Aufstellungsfehler korrigieren lässt, sobald diese durch i, i', a_0 und c bestimmt sind. — Um die drei ersten dieser Konstanten zu erhalten, stellt man den Kreis successive auf drei Winkel a_1, $120^0 + a_1$ und $240^0 + a_1$ ein, an der Libelle die zugehörigen b_1, b_2 und b_3 ablesend. Da nämlich Co $120^0 = -\frac{1}{2}$, Si $120^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, Co $240^0 = -\frac{1}{2}$ und Si $240^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist, so ergeben sich in diesem Falle nach 1 die drei Beziehungen

$$b_1 = i' - i \cdot Co\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 = i' + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Co\,(a_1 - a_0) + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Si\,(a_1 - a_0) \cdot \sqrt{3}$$
$$b_3 = i' + \tfrac{1}{2}\, i \cdot Co\,(a_1 - a_0) - \tfrac{1}{2}\, i \cdot Si\,(a_1 - a_0) \cdot \sqrt{3}$$

aus welchen durch Kombination die zur Bestimmung der i', a_0 und i bequemen Gleichungen

$$b_1 + b_2 + b_3 = 3 \cdot i' \qquad b_2 - b_3 = i \cdot \sqrt{3} \cdot Si\,(a_1 - a_0) \qquad b_2 + b_3 - 2\,b_1 = i \cdot 3 \cdot Co\,(a_1 - a_0) \qquad \mathbf{4}$$

folgen. Um sodann noch c zu bestimmen, ist es am einfachsten, das Fernrohr in den Lagern umzulegen, wobei c das Zeichen wechselt, — nochmals zu nivellieren, wodurch man b_1' erhält, das infolge einer Zapfenungleichheit (324) etwas verschieden von b_1 ausfallen kann, — dann das Fadenkreuz auf O' zurückzuführen, — und endlich eine neue Ablesung a_1' zu machen. Da nämlich in diesem Falle nach 3

$$A_1 = a_1' - c \cdot Cs\, z_1 - b_1' \cdot Ct\, z_1$$

wird, so folgt aus Kombination mit 3

$$c = \tfrac{1}{2}\,(a_1' - a_1)\; Si\, z_1 - \tfrac{1}{2}\,(b_1' - b_1) \cdot Co\, z_1 \qquad \mathbf{5}$$

Wenn man bereits (342) Excentricität und Indexfehler kennt, so kann man, statt umzulegen, um 180° drehen und durchschlagen. — Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass nach 3 für eine zweite Stellung

$$A_2 = a_2 + c \cdot Cs\, z_2 - b_2\, Ct\, z_2$$

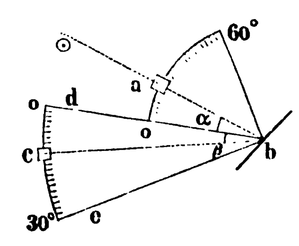
also für den durch die beiden Stellungen bestimmten Horizontalwinkel der Wert

$$A_2 - A_1 = a_2 - a_1 + c\,(Cs\, z_2 - Cs\, z_1) - (b_2\, Ct\, z_2 - b_1 \cdot Ct\, z_1) \qquad \mathbf{6}$$

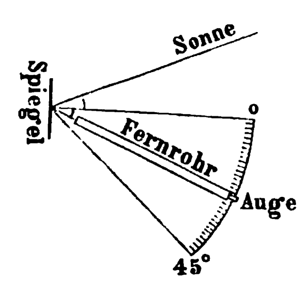
folgt. Das erste Korrektionsglied enthält beständig eine Differenz, während das zweite, wenn das eine Objekt über, das andere unter dem Stationspunkte steht, in eine Summe übergeht, also um so weniger vernachlässigt werden darf. Beide Glieder können, namentlich bei Objekten von kleiner Zenitdistanz, sehr erhebliche Beträge annehmen, welche jedoch, wenn man entsprechend 347 in beiden Lagen des Instrumentes beobachtet, im Mittel grösstenteils verschwinden.

351. Die ältern Spiegelinstrumente. — Nachdem der **Jakobsstab** (cross-staff, vgl. 333) lange für Messungen auf der See fast ausschliesslich gebraucht worden war, wurde ihm später von manchen der sog. **Davis-Quadrant** (back-staff) vorgezogen[a], — namentlich aber auch wiederholt der Versuch gemacht, durch Beiziehung eines Spiegels ein zu solchen Zwecken brauchbares Instrument herzustellen[b].

Zu 351: *a.* Der durch John Davies oder **Davis** (Sandridge in Devonshire 1550? — Küste von Malacca 1605; berühmter Seemann, nach welchem die von ihm aufgefundene Wasserstrasse zwischen Grönland und Labrador benannt ist) ausgedachte und in der Schrift „The seaman's secrets (1594)" beschriebene **Back-Staff** besteht aus zwei sich zu einem Quadranten ergänzenden Sectoren mit verschiebbaren Dioptern a und c, sowie einem Auffangsblättchen b mit Spalte; dabei ist c ein gewöhnliches Okulardiopter, während a, das ursprünglich auch nur eine Öffnung besass, später nach dem Vorschlage von **Flamsteed** und **Halley**

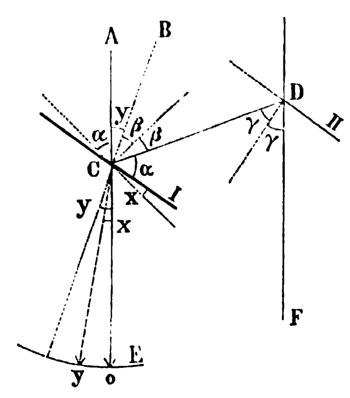


durch eine kleine Sammellinse der Brennweite ab ersetzt wurde. Beim Gebrauche hält der Beobachter das Instrumentchen bei d mit der linken, bei e mit der rechten Hand, und stellt sich so, dass er die Sonne im Rücken hat; dann dreht er den Quadranten, bis die zum voraus auf einen ganzen Grad α eingestellte a ein Sonnenbildchen auf b wirft, und verstellt endlich c nach β, bis er durch c die Spalte b nach dem Meereshorizonte gerichtet sieht: Die Summe $\alpha + \beta$ kömmt dann etwa bis auf 5' genau mit der Sonnenhöhe überein. — *b.* Abgesehen davon, dass schon Robert **Dudley** (Sheen in Surrey 1573 — Florenz 1639; später Herzog von Northumberland) in seiner Schrift „Del arcano del mare. Firenze 1630, 2 Vol. in fol." Messwerkzeuge mit Spiegeln abgebildet haben soll, ist bemerkenswert, dass Rob. **Hooke** um 1664 den Vorschlag machte, mit Hilfe eines Spiegels ein Instrument zu konstruieren, welches den Davis-Quadrant mit Vorteil ersetzen dürfte. Nach „**Lalande**, Abrégé de navigation. Paris 1793 in 4." stimmte dasselbe wesentlich mit einem 1732 durch Jean-Paul Grandjean de **Fouchy** (Paris 1707 — ebenda 1788; Sekr. Akad. Paris) der Pariser Akademie vorgelegten und in der Note „Nouvel instrument pour observer les hauteurs en mer (Gallon, Machines approuvées par l'Ac. d. Sc. VI 79)" beschriebenen Instrumente überein, das folgende Einrichtung besass: Ein zweifüssiger Oktant, der durch Transversalen 2' gab, trug auf der Alidade ein Fernrohr und über dem Centrum einen zur Null-Linie senkrechten festen Spiegel, der so niedrig war, dass mit dem Fernrohr über ihn weggesehen werden konnte. Wurde nun letzteres bei annähernd vertikalem Stande der Oktantenfläché so gestellt, dass direkt der Meereshorizont und durch Reflexion die Sonne gesehen wurde, so entsprach offenbar die Ablesung der halben Höhe der Sonne. — Die Ideen von **Hooke** und **Fouchy** waren offenbar nicht übel; aber da das Instrument des erstern vielleicht nicht einmal wirklich ausgeführt wurde und dasjenige des zweiten erst zu einer Zeit auftauchte, wo bereits, wie wir sofort (352) zeigen werden, etwas noch Besseres erfunden war, so fielen jene ersten Spiegelinstrumente, ohne jemals eine grössere Bedeutung erlangt zu haben, sofort der Geschichte anheim. Ähnlich erging es noch später einem, dem kurz zuvor durch **Höschel** für die Geometer verfertigten „katoptrischen Zirkel (vgl. Verz. 175)" verwandten Instrumente, auf welches sich der 1783 durch **Lexell** erstattete „Rapport au sujet d'un nouvel instrument du Capitaine **Burdett**, nommé **Compas optique** (Act. Petr. 1787)" bezog; dasselbe war schon bei seinem Entstehen von dem Spiegelsextanten überflügelt, so dass der Berichterstatter auszusprechen hatte: „Il a les défauts de ce sextant, sans en posséder tous les avantages". — Inwiefern der Höhenmesser, welchen **Gerbert** in seiner etwa 981—83 geschriebenen Geometrie als „Horoscopium" ohne eingehende Beschreibung erwähnt, von Einzelnen mit Recht den katoptrischen Instrumenten zugezählt wird, kann ich nicht entscheiden, — und ebenso verhält es sich mit dem in „Jacques **Besson** (Grenoble 1510? — Orléans 1580?; Prof. math. Orléans), Le mésolabe. Paris 1567 in 4." beschriebenen Instrumente, da mir diese Schrift nicht vorliegt, und das von andern auszugsweise Gegebene über die Natur desselben nur höchst ungenügenden Aufschluss giebt.



352. Spiegelsextant und Spiegelkreis. — Neben dem Bordakreise und Universalinstrumente ist der, wie ersterer zum Messen scheinbarer Distanzen und wie beide zum Messen von Höhenwinkeln dienende, aber kein Stativ erfordernde, also auch zur See verwendbare, von **Newton** ausgedachte und durch **Hadley** in brauchbare Form gebrachte **Spiegelsextant** das wichtigste Winkelinstrument, und es soll daher im folgenden (353—54) ebenfalls das notwendigste aus seiner Theorie mitgeteilt werden [a]. Ferner ist zu erwähnen, dass, wie die Sectoren durch Vollkreise, so auch die Spiegelsextanten durch **Spiegelkreise** zu ersetzen versucht wurden, dass jedoch der Erfolg nicht ein ebenso durchschlagender war [b].

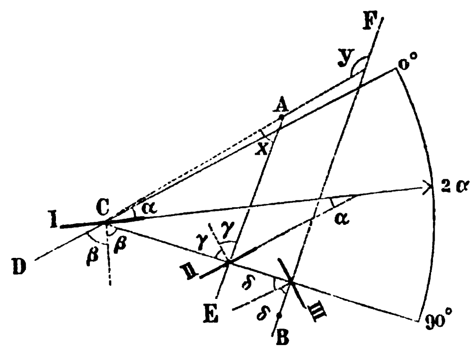
Zu 352: *a.* Ein ebener Spiegel I reflektiert den von einem Objekte A auffallenden Lichtstrahl AC so nach CD, dass $\alpha = \alpha$ ist; damit dagegen der von einem andern Objekte B auffallende Strahl BC ebenfalls nach CD zurückgeworfen werde, ist I so zu drehen, dass nunmehr die Bisectrix des Winkels BCD $= 2\beta$ normal dazu wird. Bezeichnet nun aber x die für ACB = y nötige Drehung, so ist offenbar



$$2\alpha + 2\beta + y = 180^0 = 2(\alpha + \beta + x) \text{ oder } y = 2x$$

Stellt man daher einen zweiten Spiegel II so auf, dass er zur Anfangslage von I parallel ist, und ein Fernrohr so, dass dessen optische Axe mit der Reflexionsrichtung DF von CD zusammenfällt, so wird man (vorausgesetzt, die Distanz von A sei im Verhältnisse zu CD sehr gross) im Fernrohr einerseits A neben II vorbei in einer zu CA parallelen Richtung sehen, und anderseits I nur so zu drehen brauchen, dass man B durch doppelte Reflexion in derselben Richtung sieht, um die $\frac{1}{2}$ y gleiche Drehung x bewerkstelligt zu haben. Giebt man somit noch ein Mittel bei, um x messen zu können, indem man I über dem Centrum eines geteilten Kreises auf einem drehbaren Radius befestigt, so kann man, wenn man ACE dem Nullpunkt der Teilung entsprechen lässt und den Teilstrichen ihren Doppelwert beischreibt, den Winkel y direkt ablesen. — Dieser Gedankengang veranlasste **Newton**, eine Skizze für ein Instrument zu entwerfen, welche er sodann 1699 VIII 16 nebst einem kurzen erläuternden Texte der Roy. Society vorlegte; da er aber glaubte, die Forderung stellen zu sollen, dass eine Messingtafel (plate of brass) die Grundlage des Ganzen bilde und dass der vorgesehene Oktant 3 bis 4' Radius haben müsse, um ihn direkt in halbe Minuten und durch Transversalen (a diagonal scale) in $\frac{1}{12}$ Minuten teilen, somit y auf 10″ genau ablesen zu können, so erschien sein Instrument zu schwerfällig, um praktisch brauchbar zu werden, und es ist wahrscheinlich diesem Umstande zuzuschreiben, dass **Halley** die ihm zur Prüfung übergebenen Papiere liegen liess, so dass sie erst 1742 X 28 der Roy. Society nochmals vorgelegt und nun unter dem Titel „A true copy of a paper found in the handwriting of Sir Isaac Newton among the papers of the late Dr. Halley, containing a Description of an instrument for observing the

Moon's distance from the fixt stars at sea (Ph. Tr. 1742)" veröffentlicht wurden. — Inzwischen legte John **Hadley** (Bushey in Hertfordshire 1682 — London 1744; wohlhabender Grundbesitzer, der sich aus Liebhaberei mit Mechanik und Physik befasste, aber nicht „Instrument-Maker" war) 1731 V 13 der Roy. Society unter dem Titel „The description of a new instrument for taking angles (Ph. Tr. 1731)" eine Note vor, in welcher zwei Formen eines ähnlichen Instrumentes abgebildet und beschrieben waren, — **die eine** nach ihrer ganzen Anlage so nahe der Newton'schen Zeichnung entsprechend, dass man sich der Annahme kaum erwehren kann, es habe Hadley dieselbe bei Halley gesehen, — **die andere** wesentlich mit dem beistehenden Schema übereinstimmend, welches einen der historischen Sammlung der Zürcher Sternwarte (Verz. 299) zugehörenden hölzernen Oktanten von circa 40^cm Radius darstellt, der zwar leider weder Name noch Jahrzahl zeigt, aber unzweifelhaft aus der Mitte des vorigen Jahrhunderts stammt. Auf diesem Oktanten, welchen ich, da die durch ihn repräsentierte Form später ausschliesslich ausgeführt wurde, der weitern Beschreibung zu Grunde lege, ist auf einer Elfenbein-Einlage der Bogen von 45° in 90 Halbgrade, und jeder von diesen nochmals in drei Teile geteilt, wobei jedem Teilstriche (wie bei Newton) sein Doppelwert beigeschrieben ist, so dass man angeblich den Stand der Alidade direkt auf Drittelsgrade und mittelst Vernier auf einzelne Minuten ablesen kann. Auf der Alidade ist über dem Drehpunkte C ein Spiegel I angebracht, während der Limbus zwei feste, in der obern Hälfte (wie schon bei Hadley) unbelegte Spiegel trägt, von welchen II parallel zur Null-Linie, III dagegen senkrecht zu ihr ist. Bei A und B endlich befinden sich Okulardiopter, deren ersteres in Hadleys Zeichnung durch ein in der Richtung A II liegendes Fernröhrchen ersetzt ist. Da nun (s. Fig.)

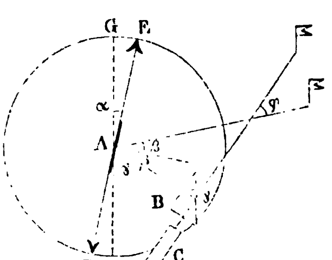


$$x = 2\beta - 2\gamma \quad y = (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\delta) \quad \alpha + 90 - \beta = 90 - \gamma \quad \gamma + \delta = 90^\circ$$

somit $\qquad x = 2\alpha \qquad y = 180 - 2\alpha$

ist, so ergiebt sich teils die Notwendigkeit der erwähnten Verdopplung, teils die Möglichkeit, einen Winkel (von A oder B aus, je nachdem er kleiner oder grösser als 90° ist) zu messen, indem man vorerst die Fläche des Oktanten annähernd in die Winkelebene bringt, — dann das Eine Objekt (von A aus das links bei E, von B aus das rechts bei F liegende) direkt durch das sog. Fensterchen anvisiert, — und endlich die Alidade dreht, bis das mittelst doppelter Reflexion erhaltene Spiegelbild des Andern (D) mit ihm coincidiert. Dabei waren die Spiegel schon von **Hadley** mit den für ihre Richtigstellung (353) nötigen Korrektionsmitteln versehen worden, — sein Fernrohr besass ein aus drei Haaren (2 parallel und 1 dazu senkrecht) bestehendes Netz, — auch waren bereits farbige Gläser zum Schutze des Auges bei Sonnenbeobachtungen beigegeben. — Aus einer zweiten Mitteilung von **Hadley**, „An account of observations made on board the Chatham-Yacht 1732 VIII 30 bis IX 1 for the trial of an instrument for taking angles (Ph. Tr. 1732)", ersieht man, dass er 1731 der Roy. Society ein von seinem Bruder George (1685—1768; Advokat)

im Sommer 1730 erstelltes hölzernes Modell der zweiten Art vorlegte, welches Minuten gab, — dass bald darauf J. **Sisson** ein Exemplar in Messing ausführte, mit dem man Viertelsminuten erhielt, und das bereits den jetzt noch üblichen Handgriff besass, — und dass mit letzterm James **Bradley**, John **Hadley** und des letztern jüngerer Bruder Henry (1697—1771; erst Arzt, dann Supercargo) die von der Admiralität verlangten Proben ausführten. Diese Proben bestanden darin, dass wiederholt, erst vor Anker und später auf offener See, Distanzen des obern Sonnenrandes vom scheinbaren Meereshorizonte gemessen, und die Ergebnisse, unter Berücksichtigung der Refraktion und Depression, mit den aus den Beobachtungszeiten berechneten Höhen verglichen wurden, — und da **Hadley** (vgl. die „Abridgements") 1734 ein Patent erhielt, so scheint man mit dem Ergebnisse dieser Proben (der mittlere Fehler einer Messung vor Anker betrug $\pm$ 0',7, — auf offener See $\pm$ 1',6) zufrieden gewesen zu sein. — Ungefähr ein Jahr nach Hadleys erster Mitteilung erhielt die Roy. Society durch James **Logan**, Gouverneur von Pennsylvanien, davon Kenntnis, dass auch der Amerikaner Thomas **Godfrey** (1700? — Philadelphia 1749; ein Glaser, der einige mathematische und astronomische Kenntnisse, sowie ungewöhnliche Erfindungsgabe, leider aber auch einen unlöschbaren Durst besass) ein ähnliches „Reflecting Instrument" erfunden und ihm 1730 ein in Holz ausgeführtes Modell vorgezeigt habe; aber da einerseits, wie ich oben zeigte, die erste Idee durch **Newton** schon längst ausgesprochen war, und anderseits die 1832 von **Allen** in sein „American biographical and historical dictionary" aufgenommene Erzählung, es sei John Hadley durch seinen Bruder Henry ein solches Godfrey'sches Instrument zugekommen, durch die **Rigaud** und **Dreyer** als Fabel erwiesen wurde, so reduziert sich das Verdienst von **Godfrey** ungemein, während **Hadley** dasjenige bleibt, das neue Instrument in mustergiltige Form gebracht und in die Praxis eingeführt zu haben, somit die Übung, ihm dessen Namen beizulegen, immerhin eine gewisse Berechtigung besitzt. — In England wurde der Hadley'sche Oktant, der später unter Weglassung des dritten Spiegels zum Sextanten erweitert wurde, durch die **Wright, Ramsden, Cary,** etc., alsbald in vielen hundert Exemplaren und in immer vollkommnerer Weise ausgeführt, — in Deutschland namentlich durch **Brander** (vgl. Verz. 329); in Frankreich, wohin ihn **Godin** schon 1735 gebracht hatte, fabrizierte man ihn anfänglich so nachlässig, dass er (vgl. Lacaille in Mém. Par. 1759) in übeln Ruf kam und erst später durch die **Lenoir**, etc. rehabilitiert wurde. — ***b.*** Der **Spiegelkreis** wurde schon von Tob. **Mayer** in der Abhandlung „Nova methodus perficiendi instrumenta geometrica et novum instrumentum goniometricum (Comm. Gott. 1752)", und 1754 auch direkt der englischen Admiralität empfohlen; letztere liess ihn durch **Bird** ausführen und durch **Bradley** prüfen, hielt aber schliesslich doch am Sextanten fest. Später kam **Borda** in seiner „Description et usage du cercle de réflexion. Paris 1787 in 4." auf den Spiegelkreis zurück, und in der neuern Zeit ist derselbe namentlich durch **Pistor** in Berlin vervollkommnet und vielfach ausgeführt worden. Bei seiner gegenwärtigen Konstruktion sitzt der drehbare Spiegel A auf einem Durchmesser mit zwei Verniers D und E; der feste Spiegel aber ist durch ein vor dem Fernrohr C stehendes



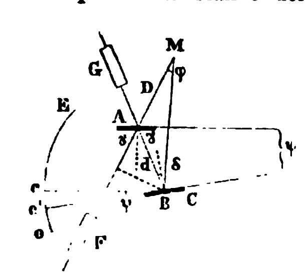
Prisma B ersetzt, dessen Reflexionsebene der Null-Linie FG parallel sein soll. Da nun für diese Kombination offenbar

$$\varphi = 180^\circ - 2\beta - 2\gamma = 2(90^\circ - \beta - \gamma) = 2\alpha$$

so tritt der Spiegelkreis wirklich für den Sextanten ein und besitzt auch eine wesentlich gleiche Theorie. — Noch ist beizufügen, dass wohl **Amici** der erste war, welcher die Spiegel durch Prismen zu ersetzen vorschlug; er beschrieb sein etwa von 1820 datierendes „Nouvel instrument de réflexion" in einem 1822 VII 3 aus Modena an Zach geschriebenen Briefe (vgl. Corr. astr. VI 554); und **Horner**, der bald darauf Zach in Genua besuchte, sagte 1834 II 16 in einem Briefe an Gautier, dass er damals mit einem solchen „Sextant à prismes" mehrere Polhöhen gemessen habe, und dass **Amici** nur durch die Schwierigkeit, reine Prismen zu erhalten, abgehalten worden sei, diese Sache weiter zu verfolgen, wie es nun **Steinheil**, ohne denselben zu nennen, in seiner Note „Neuer Reflexionskreis mit Prismen statt Glasspiegel (A. N. 243 von 1833)" gethan habe.

353. Die Messung scheinbarer Distanzen. — Messungen mit einem Spiegelsextanten geben natürlich nur dann richtige Resultate, wenn bei ihm die Spiegel und das Fernrohr diejenige Lage haben, welche bei Entwicklung des Principes vorausgesetzt wurde, d. h. wenn die optische Axe des Fernrohrs dem Limbus' parallel ist, die beiden Spiegel senkrecht zu demselben stehen und der parallele Stand dieser letztern dem Nullpunkte der Teilung entspricht. Es muss also jeder Sextant vor Beginn einer Beobachtungsserie nach diesen verschiedenen Richtungen geprüft und bestmöglich korrigiert, sowie nachträglich jedes Messungsergebnis für die übriggebliebenen kleinen Instrumentalfehler verbessert werden [a].

Zu 353: *a.* Um zu untersuchen, ob der Nullpunkt der Teilung wirklich dem parallelen Stande der Spiegel A und B entspreche, oder aber diesem Stande eine andere Ablesung, der offenbar von jedem gemessenen Winkel in Abzug zu bringende sog. **Kollimationsfehler** c, zukomme, wollen wir uns B so gedreht denken, dass derselbe Gegenstand M sowohl direkt als durch doppelte Spiegelung gesehen wird; die dieser Stellung zukommende Ablesung sei c', während φ den Winkel der von M ausgehenden Strahlen, ψ aber denjenigen der beiden Spiegel bezeichne. Man hat alsdann



$$\varphi = 2\gamma - 2\delta = 2[90 + \gamma - (90 + \delta)] = 2\psi \qquad 1$$

$$\text{Tg}\,\varphi = \frac{d \cdot \text{Si}\,2\gamma}{D + d \cdot \text{Co}\,2\gamma} \quad \text{oder} \quad \varphi = \frac{1}{\text{Si}\,1''}\left[\frac{d}{D}\,\text{Si}\,2\gamma - \frac{d^2}{2D^2} \cdot \text{Si}\,4\gamma\right] \qquad 2$$

und, da jedem Teilstriche das Doppelte seines Wertes beigeschrieben ist,

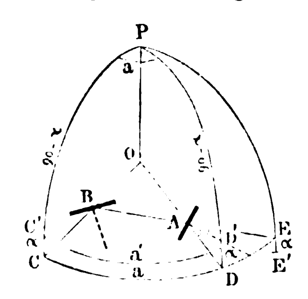
$$\tfrac{1}{2}(c - c') = \psi = \tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{oder} \quad c = c' + \varphi \qquad 3$$

Aus 2 geht hervor, dass für ferne Gegenstände, wie z. B. für die Sonne, φ verschwindet, und in solchem Falle giebt somit c' unmittelbar die Kollimation c; jedoch ist es bei Anwendung der Sonne besser, nicht die Deckung der Sonne mit ihrem Spiegelbilde zu beobachten, sondern letzteres successive

beidseitig zur Berührung zu bringen und sodann das Mittel aus beiden Ablesungen zu nehmen. Will man dagegen nähere terrestrische Gegenstände verwenden, so muss für ein und allemal 2γ ermittelt werden, was z. B. in der Weise geschehen kann, dass man den Sextanten auf einem Stative oder auf seinen Füsschen festlegt und auf M einstellt, — dann ein mit einem Fadenkreuz versehenes Fernröhrchen G so plaziert, dass man dadurch M im Spiegel B sieht, — nunmehr mit dem Sextanten den Winkel $GBM = 2\delta$ misst, wobei sich die Ablesung s ergeben mag, — und endlich die gesuchte Grösse aus

$$2\gamma = 2\delta + \varphi = s - c + \varphi = s - c' \qquad \mathbf{4}$$

berechnet. — Um zu untersuchen, ob B senkrecht zum Limbus stehe, sehe man bei C, ob der Rand des Limbus und sein Spiegelbild in B in gleicher Höhe stehen, — oder man stelle vor B ein Diopter mit Horizontalfaden auf, bei E ein Diopter mit eben so hoher Öffnung und sehe, ob durch letztere der Faden und sein Spiegelbild in B gleiche Höhe zu haben scheinen; ist es nicht der Fall, so korrigiere man B, — stelle sodann den Index auf c ein, — sehe, ob sich nunmehr ein Stern und sein Spiegelbild decken, — und bringe sie, wenn es nicht der Fall ist, durch die Korrektionsschrauben von A zur Deckung. — Um endlich die Lage des Fernrohrs zu untersuchen, stellt man die beiden vorerwähnten Diopter so auf den Limbus, dass die durch sie bestimmte Richtung ungefähr parallel der Fernrohraxe ist, und dreht nun den natürlich bei dieser Operation wieder fest liegenden Sextanten so, dass ein bestimmter Gegenstand G in der Richtung der Diopter erscheint. Fällt nun im Fernrohr nicht G, sondern ein anderer, wir wollen annehmen ein höher liegender Gegenstand H, mitten zwischen die zwei zum Limbus parallelen Faden, so schätze man (allfällig mit dem Sextanten selbst) den Winkel $(G, H) = \alpha$ ab, und korrigiere dann entweder das Fernrohr um α oder bringe α in Rechnung. Letzteres kann auf folgende Weise geschehen: Sind C, D, E die Punkte, in welchen bei paralleler Fernrohraxe die von den beiden Winkelobjekten kommenden und von den Spiegeln reflektierten Strahlen eine vom Scheitel O des Winkels beschriebene Kugel treffen würden, und P der Pol des sie verbindenden Kreises, so wird wegen α nunmehr D um α nach D' gehoben, — also E, da die Normale des Spiegels A immer noch mit dem einfallenden und reflektierten Strahle in derselben Ebene liegen muss, nahe um α nach E' gesenkt, — folglich C aus analogen Gründen wieder nahe um α nach C' gehoben.



Nun folgt aus Dreieck P C' D'

$$\text{Co a}' = \text{Si}^2 \alpha + \text{Co}^2 \alpha \cdot \text{Co a} = \text{Co a} + \text{Si}^2 \alpha\,(1 - \text{Co a})$$

also hat man (42 : 4, 5)

$$\text{a}' = \text{a} - \alpha^2 \cdot \text{Tg}\ {}^1\!/_2\,\text{a} \cdot \text{Si}\ 1'' \qquad \mathbf{5}$$

oder auch nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\text{Si}^2\ {}^1\!/_2\,\text{a}' = {}^1\!/_2\,(1 - \text{Co a}') = \text{Si}^2\ {}^1\!/_2\,\text{a} \cdot \text{Co}^2 \alpha \quad \text{also} \quad \text{Si}\ {}^1\!/_2\,\text{a}' = \text{Si}\ {}^1\!/_2\,\text{a} \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad \mathbf{6}$$

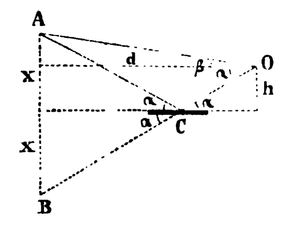
so dass sich der Einfluss von α leicht bestimmen lässt. — Nur beiläufig (im Rückblick auf 144) darauf hinweisend, dass, wenn man die für den Winkel der Sonne mit einem links von ihr liegenden Gegenstande erhaltene Ablesung, ohne die Lage des Sextanten zu verändern, rasch um die nach 4 erhaltenen 2γ vermehrt, sich der reflektierte Sonnenstrahl ebenfalls um 2γ drehen muss,

also wie beim **Heliotropen** nach dem Gegenstande hingeworfen wird, so mögen dagegen zum Schlusse noch einige historisch-litterarische Notizen folgen: Die schon von **Hadley** selbst ins Auge gefasste Theorie seines Sextanten wurde dann namentlich durch **Maskelyne** in seinen „Remarks on the Hadley's Octant (Ph. Tr. 1772 und Naut. Alm. for 1774)" und durch **Borda** sowohl in seiner Abhandlung „Opérations faites à bord de la frégate la Flore (Mém. Par. 1773), als in seiner oben erwähnten „Description" von 1787 weiter ausgeführt; so z. B. verdankt man letzterm die Einführung der zur Untersuchung so bequemen kleinen Diopter (viseurs de métal) und unsere Korrektionsformel 6. Aus der grossen Zahl anderer betreffender Schriften erwähne ich: „Jan Hendrik **van Swinden** en Pieter **Nieuwland** (Diemermeer bei Amsterdam 1764 — Leyden 1794; Prof. math. Amsterdam und Leyden), Verhandeling over de inrigting en het gebruik der Octanten en Sextanten. Amsterdam 1788 in 8., — **Bohnenberger**, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung. Göttingen 1795 in 8., — **Encke**, Über den Spiegelsextanten (Berl. Jahrb. 1830; zum Teil nach Gauss), — A. **Schell**, Über den Einfluss der Fehler des Spiegelsextanten (Z. f. M. u. Ph. 17 von 1872), — etc."

354. Die Messung der Höhenwinkel. — In den ersten Zeiten wurde der Sextant fast nur auf dem Meere und meistens zu Höhenmessungen benutzt, — dabei die kürzeste Distanz eines Gestirnes vom sog. **natürlichen** oder Meereshorizonte als Höhe desselben angesehen, — und höchstens diese Distanz noch für die sog. **Depression** des Horizontes (vgl. 431) etwas korrigiert. Verschiedene Versuche, sich vom Meereshorizonte zu emanzipieren, gelangen nur teilweise [a]; dagegen wurden, als man den Sextanten etwas später, namentlich auf Reisen, auch vielfach zu Höhenmessungen auf dem Lande benutzte, zu Gunsten dieser letztern mit gutem Erfolge sog. **künstliche** Horizonte eingeführt [b].

Zu 354: *a.* Schon **Hadley** hatte, wie aus seiner Note „A spirit level to be fixed to a Quadrant for taking a meridional altitude at Sea, when the Horizon is not visible (Ph. Tr. 1733)" hervorgeht, die Idee, die Einstellung auf den natürlichen Horizont dadurch entbehrlich zu machen, dass man an dem gewöhnlichen Höhenquadranten parallel zur Null-Linie eine Libelle anbringe, und ein Hilfsbeobachter dieselbe in dem Augenblicke ablese, wo der Beobachter das Höhenobjekt einstelle. Später, und so z. B. noch von Karl Adolf **Morlot** (Neapel 1820 — Bern 1867; Geolog und Archäolog; vgl. Not. 189), wurde mehrfach der Versuch gemacht, die Libelle so am Spiegelsextanten anzubringen, dass der Beobachter selbst ihren Stand wahrnehmen könne; aber es gelang meines Wissens nie, eine ganz befriedigende Kombination zu finden. — *b.* Schon **Maskelyne** teilt (Ph. Tr. 1769) bei Anlass der von Thom. **Wright** auf der Insel Coudre bei Quebek zu Gunsten des Venusdurchganges von 1769 gemachten Zeit- und Polhöhenbestimmungen mit, dass derselbe „a brass Hadley's sextant of about 15 inches radius, with a magnifying glass to read off the observations, and a rectangle reservoir for holding quicksilver, or any other fluid, which is sheltered from the wind by two glass sides inclined to one another, and ground truly plane" besessen habe, und es lässt sich aus dieser eingehenden Beschreibung schliessen, dass ein solcher Horizont mit Schutzdach

damals etwas Neues, vielleicht sogar eine Erfindung von **Wright**, der selbst die Benutzung von „a saucer of oil" erwähnt, gewesen sei. — Ganz obiger Beschreibung entsprechende **Quecksilberhorizonte** lieferte (vgl. Verz. 291) z. B. Thomas **Jones** (1775—1852; Schüler von Ramsden, dann Mech. London), während Andere **Spiegelhorizonte**, d. h. mit einer Libelle horizontal zu stellende Glasspiegel (vgl. Verz. 290), vorzogen. In beiden Fällen ist die Theorie dieselbe: Wenn nämlich A ein Gegenstand ist, B sein Bild in einem horizontalen Spiegel C, h die Höhe des Auges über diesem letztern, d die Horizontaldistanz desselben von A und B, β der Elevationswinkel von A, α der Depressionswinkel von B, und x die Höhe von A über der Spiegelebene, so hat man successive



$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{x+h}{d} \quad \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{x-h}{d} \quad \mathrm{Tg}\,\alpha - \mathrm{Tg}\,\beta = \frac{2h}{d} \quad \mathrm{Si}(\alpha-\beta) = \frac{2h}{d}\cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad 1$$

also
$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \doteq \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{h}{d\cdot \mathrm{Si}\,1''}\cdot \mathrm{Co}\,\alpha\cdot \mathrm{Co}\,\beta \qquad 2$$

und es kann somit wirklich für einen nicht gar zu nahen Gegenstand der Winkel zwischen ihm und seinem Bilde in einem horizontalen Spiegel gleich seinem doppelten Höhenwinkel gesetzt werden. — Vgl. auch „Eugen **Gelcich** (Cattaro in Dalmatien 1858 geb.; Dir. naut. Anstalt Lussinpiccolo in Istrien), Über künstliche Horizonte (Zeitschr. f. Instr. 1885)".

XIV. Die absoluten Messungen.

> **Après le soin de perfectionner les observations, rien n'est plus nécessaire que de chercher à déterminer les limites des erreurs qui peuvent rester dans les observations.** *(Deluc.)*

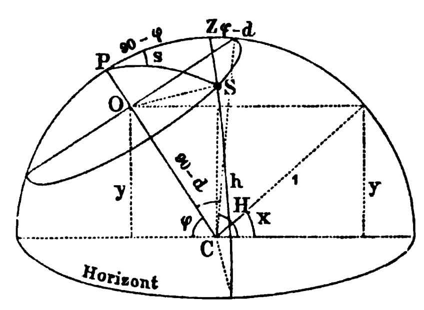
---

355. Zeitbestimmung aus einer Sternhöhe. — Da infolge der täglichen Bewegung jedes Gestirn an jedem Orte zu einer bestimmten Zeit eine bestimmte Höhe besitzt, so kann man offenbar eine Zeitangabe durch eine Höhenangabe ersetzen [a]. Ferner geht daraus hervor, dass es möglich ist, aus jeder unter gegebener Polhöhe zu einer gewissen Uhrzeit gemessenen Höhe eines nach seinen Coordinaten bekannten Gestirnes den dieser Uhrzeit zukommenden Stundenwinkel desselben zu berechnen [b]. — Dieser Stundenwinkel giebt aber (193), wenn man die Sonne beobachtet hat, unmittelbar die **wahre Zeit** der Beobachtung, — und bei jedem Gestirne, sofern man die Rektascension desselben zuzählt, die **Sternzeit,** — somit in beiden Fällen durch Vergleichung mit der Uhrzeit der Beobachtung die **Uhrkorrektion** auf die zu Grunde gelegte Zeit oder eine sog. **Zeitbestimmung** [c].

Zu 355: *a.* So lange zuverlässige Uhren fehlten, war es sehr zweckmässig das Eintreten einer Erscheinung durch eine gleichzeitige Höhenangabe zu fixieren, und es zeugt von dem feinen Takte der Araber, dass sie dieses von **Ptolemäus** nur ganz ausnahmsweise benutzte Verfahren vielfach anwandten, so z. B. **Ibn Junis** aufzeichnete, es habe 978 VI 8 zu Kairo eine Sonnenfinsternis begonnen, als die Sonne in 56° Höhe stand, und aufgehört, als die Höhe noch 26° betragen habe. Ja die Araber wussten diese Methode noch dadurch zu verfeinern, dass sie je **vor** und **nach** dem zu fixierenden Momente die Höhe eines Gestirnes massen und überdies die Anzahl der Schwingungen abzählten, welche eine an einem Faden aufgehängte Kugel von der ersten Messung bis zu jenem Momente und dann wieder bis zur zweiten Messung machte. — *b.* Beim gegenwärtigen Stande der Trigonometrie wird diese Rechnung mit grösster Leichtigkeit absolviert; denn wenn unter der Polhöhe φ ein Stern der Deklination d in der (nach 168—70) für die Refraktion verbesserten Zenitdistanz z beobachtet wird, so folgt für seinen Stundenwinkel s aus Dreieck Pol-Zenit-Stern (nach 90:4) sofort die bequeme Formel

$$\mathrm{Tg}\,\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Si}\,(\varphi - g)\cdot \mathrm{Si}\,(d - g)}{\mathrm{Co}\,g \cdot \mathrm{Co}\,(z + g)}} \qquad \text{wo} \qquad g = \frac{\varphi + d - z}{2} \qquad 1$$

In früherer Zeit, wo geschlossene Formeln und Logarithmen fehlten, war dagegen die Sache etwas schwieriger und so ging z. B. **Kepler** (vgl. Astronomia. Pars optica. Cap. 11, oder Opera II 375) in folgender Weise vor: Er legte durch den Mittelpunkt O des Parallels des Sternes S eine Parallelebene zum Horizonte, und führte die Höhe $y = \text{Si}\, x$ dieser Parallelebene, sowie die Culminationshöhe $H = 90^\circ - (\varphi - d)$ als Hilfsgrössen ein, und da hiefür aus der Figur



$$\text{Si}\, x = y = \text{O C} \cdot \text{Si}\, \varphi = \text{Si}\, d \cdot \text{Si}\, \varphi \qquad 2$$

$$\text{Si}\, H = \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Si}\, d + \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Co}\, d \qquad \text{Si}\, h = \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Si}\, d + \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Co}\, d \cdot \text{Co}\, s$$

folgen, so erhält man in der That die einfache Formel

$$\text{Co}\, s = \frac{\text{Si}\, h - \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Si}\, d}{\text{Co}\, \varphi \cdot \text{Co}\, d} = \frac{\text{Si}\, h - \text{Si}\, x}{\text{Si}\, H - \text{Si}\, x} \qquad 3$$

welche der Kepler'schen Regel entspricht. — Es wurde auch versucht, die Bestimmung des Stundenwinkels durch Tafeln zu erleichtern, und so gab z. B. **Lalande** 1793 in seinem „Abrégé de navigation“ eine unter seiner Anleitung durch seine „Nièce“ Amélie **Harlay** (Paris 1768 — ebenda 1832; Frau seines Adoptivsohnes Michel Lefrançais in 592) mit grosser Ausdauer berechnete, volle 300 Quartseiten füllende, zunächst die Bestimmung der wahren Zeit aus Sonnenhöhen ins Auge fassende „Table horaire“, aus welcher man für alle Polhöhen von 0 bis 60°, alle Deklinationen von + 24 bis — 24° und alle Höhen von 0 bis 44°, mit Hilfe dreier Differenzkolumnen für die drei Eingänge, die Stundenwinkel aufschlagen kann. Grossen Vorteil bietet jedoch eine solche ausgedehnte Tafel kaum, da für etwas genaue Bestimmungen die nötigen Interpolationen gar zu mühsam werden, und für Überschlagsrechnungen eine viel gedrängtere im Genre unserer VII[b] ausreicht; immerhin mag an die entsprechende Tafel von Chr. **Müller** in 194 erinnert und auch die seitherige Publikation „Otto **Müller**, Tavole per la determinazione del tempo dietro le altezze del sole o d'una stella. Milano 1881 in 8.“ erwähnt werden. — *c.* Bezeichnen $d\varphi$ und dz die Unsicherheiten der eingeführten Polhöhe und der gemessenen Zenitdistanz, so ist (177) die Unsicherheit des berechneten Stundenwinkels

$$ds = \frac{dz}{\text{Si}\, w \cdot \text{Co}\, \varphi} - \frac{\text{Ct}\, w \cdot d\varphi}{\text{Co}\, \varphi} \qquad 4$$

und hieraus folgt, dass für kleine Werte von w schon ganz kleine Beträge von dz und $d\varphi$ einen sehr erheblichen Einfluss auf die Zeitbestimmung erhalten: **Man hat daher bei dieser Methode Messungen in der Nähe des Meridianes zu vermeiden, und,** da $\text{Si}\, w \cdot \text{Co}\, \varphi = \text{Si}\, v \cdot \text{Si}\, p$ ist, vorzugsweise **equatoreale Sterne zu benutzen,** zumal für solche auch der Einfluss der täglichen Aberration verschwindend klein wird.

356. Bestimmung aus zwei und mehreren Höhen. — Misst man mehrere Sternhöhen, so kann man entweder jede einzelne derselben in der soeben auseinander gesetzten Weise für sich berechnen und sodann aus den erhaltenen Resultaten, unter allfälliger

Einführung des Ganges der Uhr, einen Mittelwert ableiten [a], — oder aber unter geeigneter Anordnung der Beobachtungen die ihnen entsprechenden Beziehungen so kombinieren, dass gewisse andere Vorteile erreicht, namentlich störende Einflüsse vorhandener Unsicherheiten in den gemessenen oder vorausgesetzten Grössen möglichst beseitigt werden [b].

Zu 356: *a.* Bezeichnen $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Uhrzeiten der Beobachtungen, $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots \Delta t_n$ die aus ihnen erhaltenen Uhrkorrektionen, und ist u das Mittel der Uhrzeiten, Δt die letzterm entsprechende Uhrkorrektion, sowie g der Gang der Uhr in der für die u benutzten Zeiteinheit, so hat man offenbar

$$\Delta t = \Delta t_1 + g(u - u_1) = \Delta t_2 + g(u - u_2) = \ldots\ldots = \Delta t_n + g(u - u_n)$$

und hieraus erhält man für Δt die Normalgleichung

$$n \cdot \Delta t = \Sigma \Delta t + g(n \cdot u - \Sigma u) \qquad \text{oder} \qquad \Delta t = {}^1/_n \cdot \Sigma \Delta t \tag{1}$$

so dass dem Mittel der Uhrzeiten das Mittel der Uhrkorrektionen entspricht und der Gang der Uhr ausser Betracht fällt. Dagegen kömmt dem Mittel der Uhrzeiten keineswegs notwendig das Mittel der einzelnen Zenitdistanzen $z_1, z_2, \ldots z_n$ zu. Bezeichnet man nämlich die einer Veränderung Δs des Stundenwinkels s zukommende Veränderung der Zenitdistanz z mit Δz, so hat man nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\Delta z \cdot \text{Si}\, 1'' = \frac{dz}{ds} \cdot \Delta s \cdot \text{Si}\, 1'' + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{\Delta s^2 \cdot \text{Si}^2\, 1''}{2} + \ldots$$

oder, da für kleine Werte von Δs offenbar $\text{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta s = {}^1/_4 \Delta s^2 \cdot \text{Si}^2\, 1''$ gesetzt und mit dem zweiten Gliede abgebrochen werden kann,

$$\Delta z = \frac{dz}{ds} \cdot \Delta s + \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \text{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta s}{\text{Si}\, 1''} \tag{2}$$

wo nach 177 : 6, 1

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\text{Si}\, s \cdot \text{Si}\, p \cdot \text{Co}\, \varphi}{\text{Si}\, z} \qquad \text{folglich} \qquad \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{dz}{ds} \cdot \text{Ct}\, s - \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \cdot \text{Ct}\, z \tag{3}$$

Man hat somit, in 2 successive Δs durch $15(u - u_1) = \Delta u_1$, $15(u - u_2) = \Delta u_2$, etc., ersetzend,

$$z = z_1 - \frac{dz}{ds} \cdot \Delta u_1 - \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \text{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u_1}{\text{Si}\, 1''} = z_2 - \frac{dz}{ds} \cdot \Delta u_2 - \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{2\, \text{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u_2}{\text{Si}\, 1''} = \text{etc.}$$

woraus für z, da $\Sigma \Delta u = 0$ ist, die Normalgleichung

$$z = {}^1/_n \cdot \sum z - \frac{d^2z}{ds^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum \frac{2\, \text{Si}^2\, {}^1/_2 \Delta u}{\text{Si}\, 1''} \tag{4}$$

folgt. Man kann daher allerdings, statt aus jeder einzelnen Zenitdistanz die Uhrkorrektion und dann das Mittel zu berechnen, zuerst für das Mittel der Uhrzeiten nach 3 und 4 die diesem zukommende Zenitdistanz ermitteln, in welchem Falle dann nur Eine Rechnung nötig wird; aber einerseits ist die Ersparnis, auch wenn man für die Faktoren von $d^2z : ds^2$ die in „Theodor **Albrecht** (Dresden 1843 geb.; Sektionschef im k. preuss. geod. Inst. in Berlin), Formeln und Hülfstafeln. Leipzig 1874 in 8. (2. A. 1879)" gegebene Tafel benutzt, ziemlich unbedeutend, und sodann büsst man die wertvolle Kontrole ein, welche auf ersterm Wege die Vergleichung der verschiedenen Einzelwerte darbietet. — *b.* Anstatt aus jeder gemessenen Zenitdistanz unmittelbar den

entsprechenden Stundenwinkel zu berechnen, kann man sie auch nur in eine betreffende Beziehung, wie z. B. in die bekannte

$$\text{Co}\, z = \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Si}\, d + \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Co}\, d \cdot \text{Co}\, s \qquad 5$$

einführen, und erhält dann ebensoviele Gleichungen als man Zenitdistanzen besitzt, in welchen überdies sich die sämtlichen Stundenwinkel bei bekanntem Uhrgange auf Einen reduzieren lassen, da wegen

$$s_1 = u_1 + \triangle t_1 - a_1 \qquad \text{und} \qquad s_2 = u_2 + \triangle t_1 + g\,(u_2 - u_1) - a_2$$

die Differenz $$s_2 - s_1 = (u_2 - u_1)\,(1 + g) - (a_2 - a_1) \qquad 6$$

jeder zwei Stundenwinkel ebenfalls bekannt ist. Es sind somit bei n Beobachtungen (n — 1) überschüssige Gleichungen vorhanden, welche sich in der verschiedensten Weise zur Elimination oder Bestimmung anderer Grössen verwerten lassen und auch verwertet worden sind. Da jedoch die betreffenden Entwicklungen (etwa abgesehen von den in 368 noch speciell vorgeführten) mehr als Curiosa und Rechnungsübungen erscheinen, als dass sie praktisches Interesse besitzen, so beschränke ich mich auf diese Andeutungen und verweise für den Detail auf die früher aufgezählten Lehrbücher der sphärischen Astronomie. Auch in Beziehung auf die Anordnung der Beobachtungen füge ich bloss bei, dass dafür im allgemeinen die in 355 gegebenen Vorschriften zu beachten sind, wenn dieselben auch bei gewissen Kombinationen zum Teil umgangen werden können, — und dass speciell bei Anwendung des Universalinstrumentes nicht verabsäumt werden soll, abwechselnd in beiden Kreislagen zu beobachten.

357. Die Methode der korrespondierenden Höhen und die sog. Mittagsverbesserung. — Die einfachste, früher meist gebrauchte und noch jetzt bei den bloss mit Spiegelsextant und Chronometer ausgerüsteten Reisenden vorzugsweise beliebte Methode der Zeitbestimmung ist diejenige der sog. **korrespondierenden Höhen,** welche darauf beruht, dass (162) ein Stern bei gleicher Höhe vor und nach dem Meridiane auch gleichen Stundenwinkel besitzt, folglich das Mittel der diesen Höhen entsprechenden Zeiten mit der Uhrzeit der Culmination übereinstimmt, welche ihrerseits bei richtigem Stande einer nach den Sternen regulierten Uhr der Rektascension des Sternes gleich sein soll [a]. — Wird, wie es von Reisenden zumeist geschieht, die Sonne beobachtet, d. h. soll der Eintritt des wahren Mittags (oder der Mitternacht) bestimmt werden, so muss allerdings wegen der Veränderung der Sonnendeklination an jenem Mittel noch eine Korrektion, die sog. **Mittagsverbesserung** (resp. Mitternachtsverbesserung), angebracht werden, ehe man dasselbe zur Bestimmung der Uhrkorrektion auf Sternzeit oder Sonnenzeit verwendet [b]. — Wird dagegen ein Stern vor seiner Culmination beobachtet, so kann man auch, um nicht auf die Rückkehr desselben zur gleichen Höhe warten zu müssen, ihm für die zweite Beobachtung einen Stern von nahe gleicher Deklination substituieren, der bald nachher westlich vom Meridiane die gleiche Höhe erreicht [c].

Zu 357: *a.* Gewöhnlich wird so verfahren, dass man während dem Aufsteigen des Gestirnes das Höheninstrument successive auf verschiedene runde Zahlen einstellt, — jeweilen die Zeit notiert, wo die entsprechende Höhe erreicht wird, — sodann beim Absteigen in umgekehrter Folge wieder bei denselben Einstellungen beobachtet, — und schliesslich das Mittel aus sämtlichen Uhrangaben nimmt. Da nun nach 356 dieses Mittel, wenigstens bei Anwendung von Fixsternen, vom Gange der Uhr, sofern dieser regelmässig ist, nicht influiert wird, — Polhöhe und Deklination in diesem Falle nicht einmal bekannt zu sein brauchen, — die Güte der Teilung gar nicht in Betracht kömmt, — und überdies jede Rechnung wegfällt, so ist diese Methode, deren einzige Schattenseite darin besteht, dass sie etwas viel Zeit und damit auch dauerhaft hellen Himmel erfordert, wirklich vorzüglich. Es ist daher zu begreifen, dass sie schon frühe beliebt war und so z. B. schon bei Anlass der Sonnenfinsternis von 1666 VII 2 durch **Huygens**, **Roberval** und **Auzout** benutzt wurde, auch **Lacaille** von derselben fast ausschliesslich Gebrauch machte. — *b.* Aus 177:6, 1, 4 folgen die Beziehungen

$$\frac{dw}{dd} = \frac{1}{\text{Si } v \cdot \text{Si } z} = \frac{1}{\text{Si } s \cdot \text{Co } \varphi} \qquad 1$$

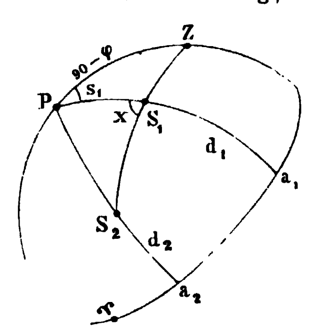
$$\frac{ds}{dd} = \frac{\text{Co } v}{\text{Si } w \cdot \text{Co } \varphi} = \frac{\text{Co } v \cdot \text{Si } z}{\text{Si } v \cdot \text{Si } z \cdot \text{Co } d} = \text{Tg } \varphi \cdot \text{Cs } s - \text{Tg } d \cdot \text{Ct } s \qquad 2$$

nach welchen sich, wenn d die Deklination zur Zeit $\frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ und μ deren stündliche Zunahme bezeichnet, für $dd = \frac{1}{2}(u_2 - u_1) \cdot \mu$ berechnen lässt, um wie viel bei wachsender Deklination das Mittel der beiden Beobachtungsrichtungen zu westlich und dasjenige der beiden Uhrzeiten zu gross ist, oder welche Verbesserungen an diesen Mitteln anzubringen sind, wenn sie sich, wie man sagt, auf den **Mittag** beziehen sollen. Ist eine Abendbeobachtung mit einer folgenden Morgenbeobachtung zu verbinden, so erhält man die Reduktion auf **Mitternacht** in entsprechender Weise, nur wechselt die Korrektion das Vorzeichen. — Als historische Notiz ist beizufügen, dass die in älterer Zeit in den Beobachtungsfehlern verschwindende und darum übersehene **Mittagsverbesserung** (æquatio meridiei, équation du midi) zuerst durch **Euler** in seiner Abhandlung „Methodus computandi æquationem meridiei (Comm. Petr. VIII von 1736, ausgegeben 1741) näher ins Auge gefasst und wesentlich wie oben bestimmt wurde. — *c.* Zur Lösung der Aufgabe, welche Julius August **Koch** (Osnabrück 1752 — Danzig 1817; Arzt in Danzig) in seiner Schrift „Astronomische Tafeln zur Bestimmung der Zeit aus der beobachteten gleichen, obwohl unbekannten Höhe zweier Fixsterne. Stralsund 1797 in 8." behandelte, kann in dem ohnehin günstigsten, oben berührten Falle, offenbar ebenfalls unsere 2 benutzt werden, so dass es kaum nötig sein dürfte, näher auf dieselbe einzutreten. — Für die verwandte Aufgabe endlich, aus den Zeiten, zu welchen drei Sterne die gleiche Höhe erreichen, die Uhrkorrektion ohne Voraussetzung der Polhöhe zu bestimmen, welche **Gauss** in seiner Note „Über eine Aufgabe der sphärischen Astronomie (Mon. Corr. 18 von 1808)" löste, glaube ich mich auf dieses Citat und die Angabe beschränken zu sollen, dass dieselbe Aufgabe nachher auch von **Mollweide** (Mon. Corr. 19 von 1809), **Oriani** (Eph. mediol. 1810), **Delambre** (Conn. d. t. 1812), etc., behandelt wurde.

358. Bestimmung aus Durchgängen durch denselben Vertikal. — Aus dem schon frühe, namentlich auf dem Meere

üblichen Verfahren, aus der Stellung der beiden Bären auf die Nachtstunde zu schliessen [a], entwickelte sich nach und nach die Methode, dieselbe aus dem Durchgange gewisser Sterne durch den Vertikal des Polarsternes zu bestimmen [b], und nachdem man sich seit dem Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts immer mehr darüber klar geworden war, dass man in der That aus den Durchgangszeiten verschiedener Sterne durch irgend einen dem Meridiane nahen Vertikal eine gute Zeitbestimmung erhalten könne [c], kam man schliesslich zu dem Resultate, dass in dieser Beziehung bei zweckmässiger Anordnung der Beobachtungen der Vertikal des Polarsternes ganz besonders zu empfehlen sei, so dass die alte Methode in neuem Kleide mit Recht sehr beliebt geworden ist [d].

Zu 358: *a.* Vgl. 365 und für das verwandte „Nocturnal" das in 196 beigebrachte. — *b.* Die Conn. d. t. gab früher alljährlich eine Sternkarte des nördlichsten Himmels, in welcher vom Polarsterne Gerade nach einer Anzahl von Sternen gezogen waren, deren jeder beigeschrieben wurde, wie viel man der in der Ephemeride für jeden Tag gegebenen wahren Zeit der Culmination des Frühlingspunktes beizufügen habe, um die wahre Zeit zu erhalten, zu welcher der betreffende Stern im Vertikal des Polarsternes stehe. Nach 1760 blieben diese Karten weg; dagegen behandelten noch **Lambert** (Berl. Jahrb. 1769), **Cagnoli** (Ed. Chompré 223), **Lalande** (3 éd. I 382), etc. die ihnen zu Grunde liegende Methode einlässlich, und so leitete z. B. der zweitgenannte in folgender, von mir allerdings durch Abstreifen seiner unbequemen Bezeichnung und auch sonst etwas vereinfachten Weise, eine Formel ab, um den Stundenwinkel s_1 des Polarsternes S_1 für den Augenblick zu bestimmen, wo ein anderer Stern S_2 dessen Vertikal passiert: Aus den Dreiecken $S_1 P S_2$ und $S_1 P Z$ erhält man nach 90 : 3



$$\frac{\text{Si}(a_1 - a_2)}{\text{Co}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, d_2 - \text{Si}\, d_1 \cdot \text{Co}(a_1 - a_2)} = \text{Tg}\, x = \frac{-\text{Si}\, s_1}{\text{Co}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, \varphi - \text{Si}\, d_1 \cdot \text{Co}\, s_1}$$

also

$$\text{Co}\, s_1 + [\text{Ct}(a_1 - a_2) - \text{Ct}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, d_2 \cdot \text{Cs}(a_1 - a_2)] \cdot \text{Si}\, s_1 = \text{Ct}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, \varphi$$

oder

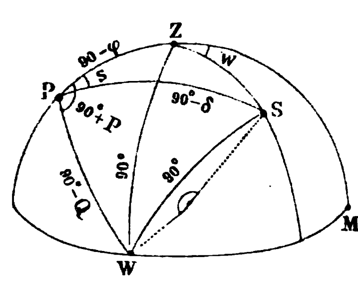
$$\text{Co}(s_1 - u) = \text{Ct}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, \varphi \cdot \text{Co}\, u$$

wo

$$\text{Tg}\, u = \text{Ct}(a_1 - a_2) - \text{Ct}\, d_1 \cdot \text{Tg}\, d_2 \cdot \text{Cs}(a_1 - a_2) \qquad 1$$

d. h. wirklich eine Formel, welche die gestellte Aufgabe vollständig löst. — *c.* Stellt man ein Universalinstrument in einen beliebigen Vertikal ein, so kann damit unter Voraussetzung, dass Drehaxe und optische Axe sorgfältig berichtigt seien, die Uhrkorrektion $\triangle t$ leicht und scharf bestimmt werden, indem man die Durchgangszeiten t zweier Sterne S (α, δ) beobachtet: Bezeichnet nämlich w das Azimut des gewählten Vertikales, $90^0 + P$ aber den Stundenwinkel und $90^0 - Q$ die Poldistanz des Westendes der Drehaxe, so hat man aus $\triangle$ P S W, da W S $= 90^0$ ist, nach 87 : 2

$$\text{Si}(P - s) = \text{Tg}\, Q \cdot \text{Tg}\, \delta \qquad \text{Si}(P - s') = \text{Tg}\, Q \cdot \text{Tg}\, \delta' \qquad 2$$



also mit Hilfe von 62 : 4

$$\mathrm{Tg}\left(\mathrm{P}-\frac{\mathrm{s}'+\mathrm{s}}{2}\right)=\frac{\mathrm{Si}(\delta+\delta')}{\mathrm{Si}(\delta-\delta')}\cdot\mathrm{Tg}\,\frac{\mathrm{s}'-\mathrm{s}}{2} \qquad 3$$

und kann somit, da

$$\mathrm{t}+\triangle\mathrm{t}=\alpha+\mathrm{s} \qquad \mathrm{t}'+\triangle\mathrm{t}=\alpha'+\mathrm{s}'$$

also $\mathrm{s}'-\mathrm{s}=(\mathrm{t}'-\mathrm{t})-(\alpha'-\alpha)$ **4**

bekannt ist, nach 3 sofort $\mathrm{P}-{}^1/_2(\mathrm{s}'+\mathrm{s})$, folglich $\mathrm{P}-\mathrm{s}=\mathrm{P}-{}^1/_2(\mathrm{s}'+\mathrm{s})+{}^1/_2(\mathrm{s}'-\mathrm{s})$ und $\mathrm{P}-\mathrm{s}'=\mathrm{P}-{}^1/_2(\mathrm{s}'+\mathrm{s})-{}^1/_2(\mathrm{s}'-\mathrm{s})$ berechnen, — nach 2 ferner Q, und endlich, da aus $\triangle$PWZ

$$\mathrm{Si}\,\mathrm{P}=\mathrm{Tg}\,\mathrm{Q}\cdot\mathrm{Tg}\,\varphi \qquad 5$$

folgt, auch P. — Sind aber einmal P und Q bekannt, so lässt sich nach 2 für jeden Stern der Stundenwinkel, und sodann nach 4 die Uhrkorrektion $\triangle$t finden. Da ferner wegen WZ = 90° = WS auch WZS = 90° und WM = 90° + w, so folgen aus $\triangle$WPZ

$$\mathrm{Co}\,\mathrm{w}=\mathrm{Co}\,\mathrm{P}\cdot\mathrm{Co}\,\mathrm{Q} \qquad \mathrm{Tg}\,\mathrm{P}=\mathrm{Tg}\,\mathrm{w}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi \qquad \mathrm{Si}\,\mathrm{Q}=\mathrm{Si}\,\mathrm{w}\cdot\mathrm{Co}\,\varphi \qquad 6$$

nach welchen Formeln w wenigstens annähernd erhalten und mit dessen Hilfe der Vertikal des Instrumentes so nahe in den Meridian gebracht werden kann, dass jedenfalls das neue w sehr klein wird, also nach 6 und 2

$$\mathrm{P}\fallingdotseq\mathrm{w}\cdot\mathrm{Si}\,\varphi \qquad \mathrm{Q}\fallingdotseq\mathrm{w}\cdot\mathrm{Co}\,\varphi \qquad \mathrm{P}-\mathrm{s}\fallingdotseq\mathrm{Q}\cdot\mathrm{Tg}\,\delta \qquad \mathrm{s}\fallingdotseq\mathrm{w}\cdot\mathrm{Si}(\varphi-\delta)\cdot\mathrm{Se}\,\delta$$

gesetzt werden können, somit sich nach 4 die bequeme Näherungsformel

$$\triangle\mathrm{t}=\alpha-\mathrm{t}+\mathrm{m}\cdot\mathrm{w} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{m}=\mathrm{Si}(\varphi-\delta)\cdot\mathrm{Se}\,\delta \qquad 7$$

ergiebt. Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

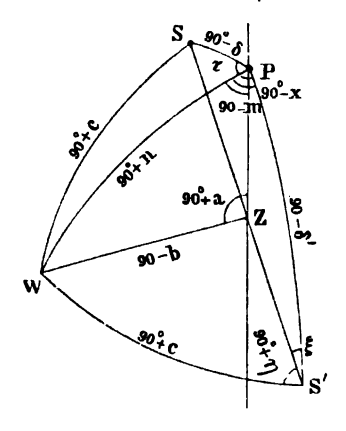
$$\triangle\mathrm{t}=\alpha'-\mathrm{t}'+\mathrm{m}'\cdot\mathrm{w} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{m}'=\mathrm{Si}(\varphi-\delta')\cdot\mathrm{Se}\,\delta' \qquad 8$$

und setzt man die beiden Werte von $\triangle$t einander gleich, so ergiebt sich zur Bestimmung von w die Formel

$$\mathrm{w}=\frac{\alpha-\mathrm{t}-(\alpha'-\mathrm{t}')}{\mathrm{m}'-\mathrm{m}} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{m}'-\mathrm{m}=\frac{\mathrm{Si}(\delta-\delta')\cdot\mathrm{Co}\,\varphi}{\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,\delta'} \qquad 9$$

worauf nach 7 auch $\triangle$t erhalten wird. — J. J. v. **Littrow**, der diese Formeln in seiner Abhandlung „Über den erweiterten Gebrauch der Multiplikationskreise. Prag 1820 in 8." aufstellte, sagt, dass er sich anfänglich in Kasan, wo er kein Mittagsrohr und nur einen Baumann'schen Multiplikationskreis von 16" zur Verfügung hatte, mit allen möglichen Zeitbestimmungsmethoden abgequält habe, bis er endlich auf die eben beschriebene verfallen sei, welche ihm so befriedigende Resultate ergab, dass er „für die Zukunft die lästigen und ungewissen korrespondierenden Höhen der Sonne ohne Bedauern entbehren" konnte. — Bald nach Littrow befassten sich auch die **Bessel, Bohnenberger, Hansen,** etc. mit ähnlichen Methoden (vgl. A. N. von 1828 u. f.), und der letztgenannte führte seine Untersuchungen später noch unter dem Titel „Durch Beobachtungen am Passageninstrument ausserhalb des Meridianes die Zeit zu bestimmen (A. N. 1136 von 1858)" weiter aus. Anstatt jedoch auch auf diese Arbeiten näher einzutreten oder sogar nach weitern Spuren verwandter Ideen in früherer Zeit zu suchen, wozu mich z. B. ein 1796 von **Feer** an Horner geschriebener Brief (vgl. Notiz 269) veranlassen könnte, ziehe ich vor, unter d noch die schon von **Sawitsch** in seinen „Remarques sur la méthode de déterminer le temps au moyen des observations des passages des étoiles sur le vertical de l'étoile polaire (Bull. Pét. 4 von 1845)", und dann

namentlich von Joh. Heinr. Wilhelm **Döllen** (Mitau 1820 geb.; Obs. Pulkowa) in seinen beiden Abhandlungen „Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Vertikale des Polarsternes. St. Petersburg 1863 und 1874 in 4." einlässlich besprochene und seither noch in ihrer Anwendung durch „Zeitstern-Ephemeriden. St. Petersburg 1886 und folgende Jahre in 8." erleichterte Methode etwas einlässlicher zu behandeln. — ***d.*** Sei P der Pol, S der Ort des Polarsternes zur Zeit der Einstellung auf denselben, S' der Ort eines kurz nachher durch den Vertikal des Instrumentes gehenden Sternes, W der dem Westende der Horizontalaxe des Instrumentes entsprechende Punkt der Himmelssphäre, welcher vom Zenite um $90^0 - b$, vom Pole um $90^0 + n$, vom Meridiane um $90^0 + a$ abstehe, und endlich $90^0 + c$ der Winkel der Horizontalaxe mit der optischen Axe. Haben ferner die beiden Sterne die Coordinaten α, δ und α', δ', sowie den Abstand $SS' = 90^0 - d$, und werden für die Winkel an P und S' die in die Figur eingetragenen Bezeichnungen eingeführt, so hat man, wenn t und t' die Uhrzeiten von Einstellung und Beobachtung, s und s' aber die entsprechenden Stundenwinkel der beiden Sterne sind, und $\triangle t$ die Uhrkorrektion bezeichnet,



$$t + \triangle t = \alpha + {}^1/_{15}\, s \qquad t' + \triangle t = \alpha' + {}^1/_{15}\, s'$$

also

$$\tau = s' - s = 15\,[\alpha - \alpha' + t' - t] \qquad \mathbf{10}$$

und aus den Dreiecken SPS', SWS' und PWS' folgen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Si}\, \xi &= \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \tau \\ \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, \xi &= \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, \delta' - \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, \tau \\ \mathrm{Si}\, d &= \mathrm{Si}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\, \delta' + \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Co}\, \tau \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{11}$$

$$\mathrm{Si}\, \eta = \frac{(1 - \mathrm{Si}\, d) \cdot \mathrm{Si}\, c}{\mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\, d} = \mathrm{Tg}\left(45^0 - \frac{d}{2}\right) \cdot \mathrm{Tg}\, c \qquad \mathbf{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Co}\, x &= \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\,(\xi + \eta) \\ \mathrm{Co}\, n \cdot \mathrm{Si}\, x &= -\mathrm{Si}\, c \cdot \mathrm{Co}\, \delta' + \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Si}\, \delta' \cdot \mathrm{Si}\,(\xi + \eta) \\ \mathrm{Si}\, n &= \mathrm{Si}\, c \cdot \mathrm{Si}\, \delta' + \mathrm{Co}\, c \cdot \mathrm{Co}\, \delta' \cdot \mathrm{Si}\,(\xi + \eta) \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{13}$$

woraus successive τ, ξ und d, sowie unter Voraussetzung, dass c anderweitig, z. B. durch Umlegen, bestimmt worden sei, auch η, x und n berechnet werden können, während zugleich 12 zeigt, dass η für equatoreale Sterne nur wenig von c abweichen kann. Ferner erhält man aus $\triangle PZW$, wo $PZ = 90^0 - \varphi$ ist,

$$\mathrm{Si}\, m = \mathrm{Tg}\, n \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi + \mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Se}\, n \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Si}\, a = \mathrm{Tg}\, b \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi + \mathrm{Si}\, n \cdot \mathrm{Se}\, b \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathbf{14}$$

so dass auch m und a berechnet werden können, falls man b, z. B. mit der Libelle, ermittelt hat. Endlich folgt aus 10, da $s' = x - m$ ist,

$$\triangle t = {}^1/_{15}\,(x - m) - (t' - \alpha') \qquad \mathbf{15}$$

womit nunmehr die Aufgabe vollständig gelöst ist. — Da jedoch in der Anwendung b und c immer als ganz kleine Grössen angesehen werden können, so lässt sich die Lösung noch wesentlich vereinfachen: Setzt man nämlich vorläufig b und c gleich Null, und legt den nach 12—15 berechneten Grössen für diesen Fall den Index 0 bei, so erhält man mit Hilfe von 11

$$\left.\begin{array}{ll} \eta_0 = 0 & \operatorname{Tg} x_0 = \operatorname{Si} \delta' \cdot \operatorname{Tg} \xi = \dfrac{\operatorname{Tg} \delta' \cdot \operatorname{Ct} \delta \cdot \operatorname{Si} \tau}{1 - \operatorname{Tg} \delta' \cdot \operatorname{Ct} \delta \cdot \operatorname{Co} \tau} \\ \operatorname{Tg} n_0 = \operatorname{Ct} \delta' \cdot \operatorname{Si} x_0 & \operatorname{Si} m_0 = \operatorname{Tg} n_0 \cdot \operatorname{Tg} \varphi = \operatorname{Ct} \delta' \cdot \operatorname{Tg} \varphi \cdot \operatorname{Si} x_0 \\ \operatorname{Si} a_0 = \operatorname{Si} n_0 \cdot \operatorname{Se} \varphi & \triangle t_0 \;\; = {}^1\!/_{15} (x_0 - m_0) - (t' - \alpha') \end{array}\right\} \quad \mathbf{16}$$

Sind nun b und c nicht vollständig Null, so werden η_0, x_0, n_0, m_0 und a_0 kleine Korrektionen $\triangle$ bekommen, also auch $\triangle t_0$ eine kleine Verbesserung erhalten, und zwar findet man durch Differentiation von 12—14, wenn die Produkte kleiner Grössen vernachlässigt und ihre Cosinus gleich der Einheit gesetzt werden, die Näherungswerte

$$\begin{array}{c} \triangle\eta = c(\operatorname{Se} d - \operatorname{Tg} d) \quad \triangle x = -c \cdot \operatorname{Co} \delta' + \triangle\eta \cdot \operatorname{Si} \delta' \quad \triangle n = c \cdot \operatorname{Si} \delta' + \triangle\eta \cdot \operatorname{Co} \delta' \\ \triangle m = b \cdot \operatorname{Se} \varphi + \triangle n \cdot \operatorname{Tg} \varphi \qquad \triangle a = b \cdot \operatorname{Tg} \varphi + \triangle n \cdot \operatorname{Se} \varphi \end{array} \quad \mathbf{17}$$

und somit
$$\triangle x - \triangle m = -b \cdot B - c \cdot C \quad \mathbf{18}$$

wo
$$B = \operatorname{Se} \varphi \qquad C = \operatorname{Se} \varphi \cdot \operatorname{Se} d \, [\operatorname{Si} (\varphi - \delta') + \operatorname{Co} (d + \varphi - \delta')] \quad \mathbf{19}$$

so dass schliesslich nach 15 und 16

$$\triangle t = {}^1\!/_{15} [x_0 + \triangle x - (m_0 + \triangle m)] - (t' - \alpha') = \triangle t_0 - {}^1\!/_{15} (b \cdot B + c \cdot C) \quad \mathbf{20}$$

Die vorstehende Ableitung stimmt wesentlich mit der von **Döllen** überein, — nur ist er noch in weitern Detail eingetreten und hat namentlich zu Gunsten seiner bereits erwähnten Ephemeriden die Schlussformeln noch etwas umgeformt. Ich füge ferner bei, dass es zweckmässig ist, Paare von Sternen auszusuchen, welche sich in Rektascension und Deklination wenig von einander unterscheiden, — für den einen Stern bei Okular-Ost, für den andern bei Okular-West auf den Polarstern einzustellen, — und aus den so erhaltenen zwei Uhrkorrektionen das Mittel zu ziehen: Es wird nämlich so die Kollimation fast ganz herausfallen, und somit, wenn die Horizontalstellung bei jeder Beobachtung sorgfältig revidiert wird, in der Regel die Anwendung von 16 genügen. Dass neben der Zeitbestimmung, falls bei jeder Einstellung auch am Horizontalkreise abgelesen wird, durch Bestimmung von a_0 oder $\alpha_0 + \triangle a$ auch eine Azimutalbestimmung erhältlich ist, braucht kaum erwähnt zu werden.

359. Einige andere Methoden. — Abgesehen von einigen im Altertume üblichen rohen Verfahren zur Bestimmung der Nachtstunde [a] und den unter der folgenden Nummer zu besprechenden Hilfsmitteln zur Zeitbestimmung, tauchten im Laufe der Zeiten noch manche andere Methoden auf, für welche ich jedoch im allgemeinen auf die Speciallitteratur verweisen muss [b]. Ich erwähne nur noch ein für Liebhaber der Astronomie, welche so situiert sind, dass sich in ihrer Nähe eine hohe vertikale Mauerkante befindet, recht bequemes und gutes Verfahren, welches darin besteht, die Uhrzeit des Verschwindens eines Sternes an derselben zu beobachten, vorausgesetzt, es sei Ein Mal durch Zeitübertragung oder nach einer der übrigen Methoden die genaue Sternzeit desselben bestimmt worden [c].

Zu 359: *a.* Neben dem in 355:a erwähnten Verfahren und der eine Höhenmessung ersparenden Notierung der Sterne, welche in dem zu bestimmenden Momente eben auf- oder untergingen, benutzte man namentlich auch

die 24 von **Hipparch** (vgl. den Kommentar) ausgewählten Sterne, deren erster (nach Delambre η Can. maj.) nahe am Kolur der Solstitien stand oder um 6^h Sternzeit culminierte, während ihm der zweite (θ Hydræ) in einer Stunde, der dritte (ν Leonis) in zwei Stunden, etc., folgte: Man suchte die beiden dieser Sterne auf, zwischen welchen eben der Meridian durchlief, und fügte der Stunde des vorhergehenden Sternes durch Schätzung der Abschnitte das Nötige bei. — *b.* Der frühern Litteratur füge ich bei: „J. Ch. **Houzeau**, Méthode pour déterminer simultanément la latitude, la longitude, l'heure et l'azimuth par des passages observées dans deux verticaux (Mém. sav. étr. Brux. 25 von 1853), — Seth C. **Chandler** (Boston 1845 geb.; Privatastronom Cambridge), The Almucantar. A new instrument for the determination of time and latitude. Cambridge U. S. 1887 in 4. (auch Annals of Harv. Coll. Vol. 17), — Franz **Melde** (Grossenläder bei Fulda 1832 geb.; Prof. math. Marburg), Theorie und Praxis der astronomischen Zeitbestimmung. Tübingen 1876 in 8., — und: A. **Beck**, Über ein neues Instrument zur Zeit- und Polhöhenbestimmung (A. N. 3024 von 1891)". — *c.* Diese namentlich durch **Olbers** benutzte und von ihm (Mon. Corr. 1801 II) besprochene, daher häufig nach ihm benannte Methode, wurde schon durch **Huygens** (vgl. Horol. oscill. p. 13) zur Ermittlung des Uhrganges angewandt, und dann wieder durch Georg Moritz **Lowitz** (Fürth 1722 — Ilowla an der Wolga 1774, wo er ermordet wurde; Prof. math. Nürnberg und Göttingen, dann Akad. Petersburg) in der Schrift „Die richtige Verwandlung der scheinbaren Zeiten einer Pendeluhr in die wahren Sonnenzeiten, für einen Anfänger der ausübenden Sternwissenschaft. Höxter 1755 in 4.", sowie durch **Kästner** (Astr. Abh. I 163) in Erinnerung gebracht. — Aus 177 erhält man für $d\varphi = 0 = dw$

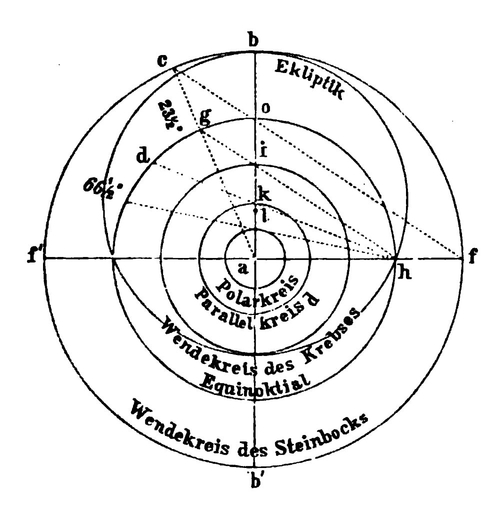
$$dt = da + ds = da - \tfrac{1}{15}\,\mathrm{Tg}\,v \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot dd \qquad 1$$

und kann somit auch den allmäligen Veränderungen der Sterncoordinaten leicht Rechnung tragen.

360. Das Planisphärium und andere graphische Hilfsmittel. — Das schon als eine Erfindung des Altmeisters **Hipparch** ehrwürdige [a], in seinen Hauptteilen eine geschickte Anwendung der stereographischen Projektion repräsentierende **Astrolabium planisphærium** [b], erlaubt annäherungsweise alle die Zeitbestimmung betreffenden Aufgaben fast spielend zu lösen [c], und ist darum in früherer Zeit in zahlreichen, die verschiedensten Dimensionen zeigenden Exemplaren erstellt, sowie nach Konstruktion und Gebrauch vielfach abgehandelt worden [d]. — Dass es auch sonst zu allen Zeiten nicht an Versuchen fehlte, durch drehbare Scheiben, Netze und Konstruktionen die Berechnung der Beobachtungen, wenn auch auf Kosten der Genauigkeit, zu umgehen, ist schon früher wiederholt teils angedeutet, teils mit Beispielen belegt worden [e].

Zu 360: *a.* Dass **Hipparch** das Planisphärium wirklich erfand und ausführte, ist wohl sicher, da sich in „**Synesius** (Cyrene 375 — Ptolemais 430?; Schüler der Hypatia, Bischof zu Ptolemais), Sermo de dono Astrolabii ad Paeonium (Opera interpr. D. Petavio. Paris 1631, p. 306—12)" die Stelle findet: „Dunkel hatte es der sehr ehrwürdige **Hipparchos** angedeutet und sich zuerst

auf diese Betrachtung verlegt; wir aber führten es bis zum Ende durch, da das Problem in einer sehr grossen Zwischenzeit vernachlässigt worden war, indem der grosse **Ptolemäus** und die göttliche Schule seiner Nachfolger nur gerade den Gebrauch davon machten, welchen die 16 Sterne darbothen, die **Hipparch** auf das Instrument eintrug", — ja es lässt diese Stelle sogar vermuten, dass die Schrift „Ptolemæi planisphærium", welche schon um die Mitte des 12. Jahrhunderts zu Toulouse durch **Rudolf** von Brügge aus dem Arabischen übersetzt und unter Beigabe einer um 1200 durch Jordan **Nemorarius** verfassten ähnlichen Schrift in „**Valderus**, Sphæræ atque astrorum ratio. Basileæ 1536 in 8." aufgenommen wurde, dann aber „Venetiis 1558 in 4." durch F. **Commandino** unter Beigabe eines Kommentars eine korrektere Ausgabe erhielt, gar nicht von **Ptolemäus** verfasst, sondern dem Nachlasse von **Hipparch** entnommen worden sei. — *b.* Das **Astrolabium planisphærium** besteht aus 4 Hauptteilen: Der **Mater** astrolabii, dem eigentlichen **Planisphærium**, dem **Rete** (auch Aranea) und dem **Dorsum** astrolabii. — Die **Mater** ist eine vertiefte Scheibe, in welche das Planisphärium (fest) gelegt wird, dann das Rete (drehbar), und über beide ein Radius (drehbar); sie hat am Rande eine Stunden- und eine Grad-Teilung. — Das **Planisphärium** wird in folgender Weise konstruiert: Man verzeichnet zuerst einen Kreis, dessen Halbmesser ab sich nach dem Radius der Matervertiefung zu richten hat, — zieht in demselben zwei zu einander senkrechte Durchmesser bb' und ff', — trägt bc $= 23^1/_2{}^0$ ab, und von dem durch Ziehen von cf erhaltenen Nullpunkte 0 aus, auf dem von a durch ihn gelegten Kreise teils $23^1/_2{}^0$, teils beliebige d, teils $66^1/_2{}^0$, — verbindet die betreffenden Punkte mit h, — erhält so i, k, l, — und legt endlich durch diese Punkte von a aus neue Kreise: Diese letztern stellen nun in Verbindung mit dem durch 0 gelegten und dem ursprünglichen Kreise die Projektionen der beigeschriebenen Parallelkreise vor, während der die beiden Wendekreise berührende Kreis offenbar die Ekliptik repräsentiert. Ist nämlich ah $= 1$ und e $= 23^1/_2{}^0$, so entsprechen der Konstruktion offenbar die Formeln

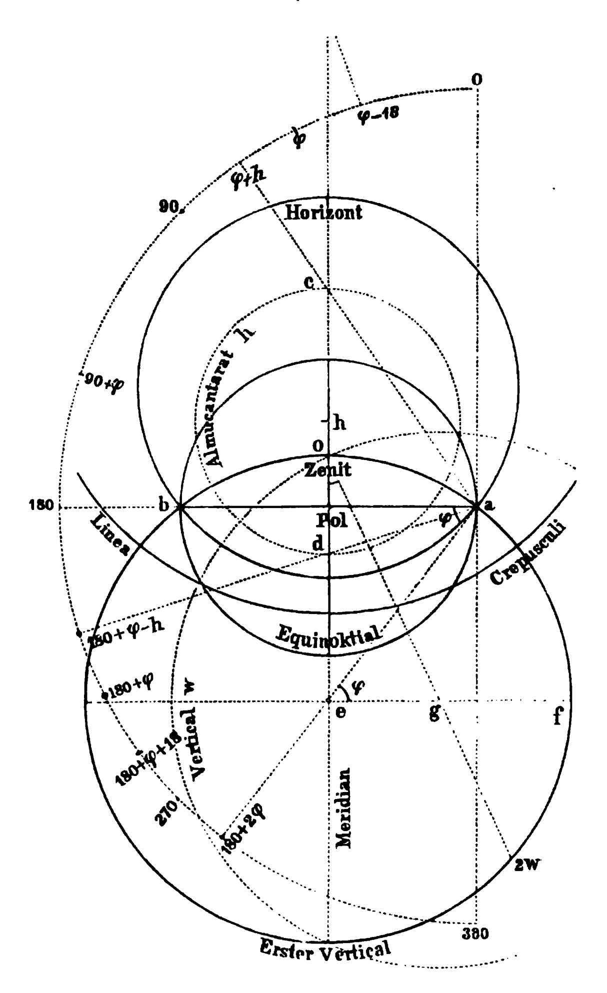


$$ai = \text{Tg}\ {}^1/_2\,(90^0 - e) \qquad ak = \text{Tg}\ {}^1/_2\,(90 - d)$$
$$al = \text{Tg}\ {}^1/_2\,e \qquad af = \text{Tg}\ {}^1/_2\,(90^0 + e)$$

welche mit den für die stereographische Polarprojektion (103) bestehenden Formeln vollständig übereinstimmen. Um sodann für die Polhöhe φ einen **Almucantarat** der Höhe h zu verzeichnen, wird folgende Vorschrift gegeben: Man ziehe zu dem Durchmesser ab des Equinoktials in a eine Senkrechte und verzeichne über dieser von a aus mit beliebigem Radius einen Halbkreis, welchen man in 360 Halbgrade teile; dann verbinde man die Punkte $\varphi + h$ und $180^0 + \varphi - h$ dieser Hilfsteilung mit a, suche die Mitte h zwischen den

so erhaltenen Punkten c und d, und ziehe von h aus mit hc einen Kreis, welcher nun wegen

$$hc = \frac{Pc + Pd}{2} = \frac{Co\,h}{Si\,\varphi + Si\,h} \qquad Ph = \frac{Pc - Pd}{2} = \frac{Co\,\varphi}{Si\,\varphi + Si\,h}$$



den gewünschten Almucantarat darstellt. Für h = 0, 90°, − 18°, etc. erhält man speciell der Reihe nach Horizont, Zenit, die Linea crepusculi, etc. Um ferner einen **Vertikal** des Azimutes w zu erhalten, verbindet man den Punkt 180° + 2φ des Hilfskreises mit a, zieht von dem so erhaltenen Punkte e einen durch das Zenit gehenden Kreis und ef ∥ ba, teilt den Kreis vom Zenit aus in 360°, verbindet den Punkt 2 w desselben mit dem Zenit, und zieht durch letzteres von dem so erhaltenen Punkte g aus einen Kreis, welcher nun den gewünschten Vertikal darstellt; denn es ist laut Konstruktion

$$Pe = Tg\,\varphi$$
$$eg = Ze \cdot Ct\,w = $$
$$= Se\,\varphi \cdot Ct\,w$$

wie es die stereographische Projektion verlangt. Für w = 90° wird eg = 0, also stellt der Hilfskreis den ersten Vertikal vor; für w = 0 dagegen wird eg = ∞, also ist ce das Bild des Meridianes; etc. Bei einzelnen Astrolabien ist das Planisphärium in mehreren für verschiedene Breiten konstruierten Exemplaren beigegeben. — Um das **Rete** zu erhalten, werden auf einer Blechtafel in der frühern Weise teils Systeme von Parallelen und Meridianen, teils die Ekliptik mit ihrer Einteilung in Zeichen und Grade, teils endlich mit Hilfe des Netzes eine Anzahl heller Sterne aufgetragen; schliesslich wird in beliebiger Weise das Blech ausgeschnitten, so dass nur Pol, Ekliptik und einzelne die Lage der Sterne bezeichnende Spitzchen übrig bleiben, und somit, wenn man die so erhaltene

Aranea auf das Planisphärium legt, von letzterem möglichst wenig verdeckt wird. — Das **Dorsum** endlich ist einfach die Rückseite der Mater und zeigt eine Kreisteilung, über welcher eine Alidade (Linea fiducie) zur Höhenmessung spielt, während ein konzentrischer Kreis so in die Monate und Jahrestage abgeteilt ist, dass das Null der Kreisteilung der Frühlingsnachtgleiche (jetzt III 21) entspricht. In dem freien innern Raume ist gewöhnlich noch zum Überflusse ein sog. Purbach'sches Quadratum (333) angebracht. — *c.* Der Gebrauch des Astrolabium planisphærium ist sehr mannigfaltig: So z. B. lässt sich auf dem Dorsum die irgend einem Jahrestage zukommende Länge der Sonne, oder der einer gegebenen Länge entsprechende Jahrestag ablesen, — die Höhe der Sonne oder irgend eines Sternes messen, — etc. Hat man aber, z. B. Nachmittags, die Höhe der Sonne gemessen und für den betreffenden Tag ihre Länge abgelesen, so sucht man letztere am Zodiakus des Rete auf, bringt durch Drehen des Rete den erhaltenen Punkt rechts (Vormittags links) in den der gemessenen Höhe entsprechenden Almucantarat, und stellt den drehbaren Radius auf den gefundenen Punkt ein; die Spitze des Radius giebt sodann am Stundenkreise der Mater die Sonnenzeit der Beobachtung. Bringt man denselben Punkt des Zodiakus in den Horizont oder in die Linea crepusculi, so erhält man entsprechend die Zeit des Sonnen-Unterganges (Aufganges) oder des Endes (Anfanges) der Dämmerung. Dreht man das Rete so, dass die einem bestimmten Sterne entsprechende Spitze in den Horizont oder in den durch Messung der Höhe bestimmten momentanen Almucantarat fällt, so ergiebt sich einerseits das betreffende Azimut des Sternes durch Aufsuchen des durch die Spitze gehenden Vertikales, und anderseits, wenn man das Rete festhält und den Radius auf die Sonnenlänge einstellt, die dem Stande des Sternes entsprechende Sonnenzeit. Bringt man endlich die Spitze des Sternes in die Mittagslinie und den Radius wieder auf die Sonnenlänge, so erhält man die Sonnenzeit der Culmination, während die Æ des Sternes die gleichzeitige Sternzeit giebt, so dass man auf diese Weise beide Zeiten vergleichen kann. Es erlaubt also wirklich dieses Instrumentchen namentlich alle die Zeitbestimmung betreffenden Aufgaben annäherungsweise in einfachster Art zu lösen, und man kann begreifen, dass es sich zur Zeit einer ausserordentlichen Beliebtheit erfreute. — *d.* Im Morgenlande, und namentlich bei den Arabern, welche berühmten Constructeurs von Astrolabien, wie z. B. einem Astronomen des Khalifen Al Mamoun, **Aly Ibn**, den Beinamen „Al Asterlaby" gaben, wurde das Astrolabium schon frühe hoch gehalten, sowie vielfach ausgeführt, und es haben sich verschiedene Exemplare bis auf unsere Zeit erhalten, so dass z. B. **Sédillot** (Mém. von 1841 p. 172 f.) ein auf der Pariser Bibliothek befindliches, um 905 konstruiertes arabisches Astrolabium, und (Ann. Obs. Paris, Mém. IX) ein von dem Perser **Abd-Ul-Aïma** verfertigtes Astrolabium beschreiben konnte. Vgl. ferner „B. **Dorn**, Über vier in Russland befindliche Astrolabien mit morgenländischen Inschriften (Bull. Pét. 1838—44), — **Wöpke**, Über ein in der k. Bibliothek zu Berlin befindliches arabisches Astrolabium (Berl. Abh. 1858), — **Sarrus**, Description d'un astrolabe construit à Maroc en 1208. Strasbourg 1852 in 4., — Alm. da **Schio**, Di due astrolabi in Caratteri cufici occidentali trovati in Valdagno (Veneto). Venezia 1880 in 4., — etc." — Auch im Abendlande fand das Astrolabium bald Eingang, so dass schon **Hermannus** contractus (Altshausen 1013 — Reichenau 1054; ein in Reichenau studierender und später lehrender Graf von Vehringen, dessen elender Körper ein seltenes Genie beherbergte) „De mensura et de utilitatibus astrolabii (in Thesaurus Pezii abg.) schrieb,

und auch noch viele abendländische Astrolabien der verschiedensten Dimensionen existieren. So z. B. besitzt die Sammlung der Sternwarte in Zürich (Verz. 236) ein 1602 von Christoph **Magnus** verfertigtes Exemplar von nur 11^{cm} Durchmesser, während ein von mir erworbenes, 1599 durch Antonius **Giamin** in Rom verfertigtes und sehr schön erhaltenes Exemplar volle 25^{cm} misst. Von der betreffenden sehr ausgedehnten Litteratur erwähne ich noch: „Pietro di Abano oder **Apono**, Astrolabium planum (wahrscheinlich identisch mit dem von Prof. Joh. Angelus in Wien, Aug. Vind. 1488 und Venet. 1502 in 4., unter demselben Titel herausgeg. Werke), — Joh. **Stöffler**, Elucidatio fabricæ ususque astrolabii. Oppenheim 1513 in fol. (auch 1534 und später; franz. durch Jean-Pierre de Mesmes, Paris 1560 in 12.; am Schlusse der Ausgabe von 1513 liest man „Impressum Oppenheim p. Jacobum Köbel etc. Anno 1512", so dass wohl die aus dem Nachlasse von Köbel herausgegebenen zwei Schriften „Astrolabii declaratio. Moguntiæ 1535 in 4., und: Vonn gerechter zubereytung, verstand, gebrauch und nutz des Astrolabiums und Quadrantenn. Francfurt 1536 in 4." grossenteils auf der Schrift von Stöffler basieren), — Juan de **Roias** (nicht „Rosas"; Kosmograph und Mechaniker aus Kastilien; Schüler von Gemma Frisius), Commentariorum in Astrolabium quod Planisphærium vocant libri sex. Lutetiæ 1550 in 4. (soll auch in franz. und ital. Übers. erschienen sein; nach Gelcich besitzt die Bibliothek des Escorials ein 10" Astrolabium von seiner Hand), — Franz **Ritter** (Nürnberg 1560? — Stöckelsberg bei Altorf 1641?; Pfarrer in Stöckelsberg), Astrolabium, d. i. Gründliche Beschreibung und Unterricht, wie solches herrliche und hochnützliche astronomische Instrument aufgerissen werden soll. Darnach wie dasselbe vielfältig zu gebrauchen. Nürnberg, 2 Teile s. a. (1610?) in 4. (neue Aufl. 1613; entschieden eine der besten Schriften über diesen Gegenstand), — Chr. **Clavius**, Astrolabium tribus libris explicatum. Moguntiæ 1611 in fol. (auch in Opera III), — etc." — *e.* Vgl. das über Pet. **Apian** (7), **Boscovich** (90), **Lacaille** (104), **Eble** (194), etc. früher beigebrachte.

361. Bestimmung des Azimutes aus einer Sternhöhe. — Unter denselben Bedingungen, unter welchen früher (355) aus einer Sternhöhe eine Zeitbestimmung erhalten wurde, lässt sich auch aus einer solchen das momentane Azimut des Sternes, folglich wenn, wie bei der Methode der korrespondierenden Höhen (165), vor oder nach der Sternbeobachtung auf eine Mire eingestellt und daraus ihr Horizontalabstand vom Sterne bestimmt wird, das Azimut der Mire und damit die Richtung der Mittagslinie finden [a].

Zu 361: *a.* Das Azimut w des Sternes findet sich nach der unmittelbar aus dem Dreieck Pol-Zenit-Stern hervorgehenden Formel

$$\text{Tg}\,\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{\text{Co}\,g \cdot \text{Si}\,(d-g)}{\text{Si}\,(\varphi - g) \cdot \text{Co}\,(z+g)}} \qquad \text{wo} \qquad g = \frac{\varphi + d - z}{2} \qquad 1$$

und da (177)

$$dw = \frac{\text{Ct}\,v}{\text{Si}\,z} \cdot dz - \frac{\text{Ct}\,s}{\text{Co}\,\varphi} \cdot d\varphi - \frac{1}{\text{Si}\,s \cdot \text{Co}\,\varphi} \cdot dp \qquad 2$$

ist, so ersieht man, dass für diese Bestimmung (wie 355) die Nähe des Meridianes zu vermeiden ist, dass ferner keine gar zu hohen Sterne gewählt werden dürfen, und dass bei Anwendung der Sonne nicht zu vergessen ist, deren Deklination zur Beobachtungszeit in die Rechnung einzuführen. — Für den

ersten Vertikal ($w = 90^0$) reduziert sich (177) unsere 2, wenn $d\varphi$ und dp vernachlässigt werden, auf $dw = Tg\,\varphi \cdot dz$, also z. B. für Zürich ($\varphi = 47^0\,23'$) auf $dw = 1{,}087 \cdot dz \simeq dz$. Da nun für den Diopterlineal eines Messtisches $dz = 2^1/_2{}'$ gesetzt werden kann und die Unsicherheit einer Horizontalvisur ungefähr ebensoviel beträgt, so ist somit schon mit dem Messtische eine Meridianbestimmung erhältlich, deren Fehler höchstens auf $2^1/_2 \cdot \sqrt{2} = 3^1/_2{}'$ ansteigt, also jedenfalls viel kleiner ist als derjenige, welchen man bei Anwendung einer gewöhnlichen Boussole risquiert, auch wenn man von der meist noch viel grössern Unsicherheit in der Kenntnis ihrer momentanen Abweichung abstrahieren will.

362. Bestimmung mit Hilfe von Circumpolarsternen. — Misst man zu einer beliebigen Uhrzeit den Horizontalabstand eines Sternes von einer Mire und berechnet für diese Zeit unter Voraussetzung von Poldistanz, Polhöhe und Uhrkorrektion das Azimut dieses Sternes, so ergiebt sich offenbar auch das Azimut der Mire, — und zwar um so genauer, je näher der Stern dem Pole steht [a]. Besonders vorteilhaft wird dieses Verfahren, wenn man einen Circumpolarstern zu der Zeit beobachtet, wo er in einer seiner Elongationen verweilt [b], — ja wenn man denselben in seinen beiden Elongationen anvisiert, oder noch besser zwei solche Sterne wählt, welche bald nach einander zu entgegengesetzter Elongation kommen, so bedarf man sogar nicht einmal der Kenntnis der Polhöhe, sondern kann gegenteils dieselbe mitbestimmen [c].

Zu 362: *a.* Aus dem Dreiecke Pol-Zenit-Stern folgen unmittelbar

$$Si\,w \cdot Si\,z = Si\,s \cdot Si\,p \qquad Co\,w \cdot Si\,z = Co\,s \cdot Si\,p \cdot Si\,\varphi - Co\,p \cdot Co\,\varphi$$

woraus durch Elimination von z sich

$$Tg\,w = \frac{Tg\,s \cdot Co\,\alpha}{Si\,(\varphi - \alpha)} \qquad \text{wo} \qquad Ct\,\alpha = Tg\,p \cdot Co\,s \qquad 1$$

ergiebt, während (177) für $dp = 0$

$$dw = \frac{Co\,v \cdot Si\,p}{Si\,z} \cdot ds - Si\,w \cdot Ct\,z \cdot d\varphi \qquad 2$$

wird. Schreibt man daher die Zeit der Visur nach einem Sterne auf und berechnet für dieselbe unter der oben erwähnten Voraussetzung nach 1 den Wert von w, so ist die Aufgabe wirklich gelöst, — ja man ist sogar nach 2 durch Wahl eines polaren Sternes der genauen Kenntnis der vorausgesetzten Grössen entbunden, — und kann überdies die Beobachtung beliebig oft wiederholen. — Zieht man z. B. auf einem zu orientierenden Messtische eine Visierlinie nach dem Polarsterne unter Notierung der Uhrzeit, so erhält man auch nach dieser Methode, sogar in dem Falle, wo man die Uhrkorrektion nur durch Vergleichung mit einer Normaluhr bestimmt und die Polhöhe einer neuern Karte entnimmt, eine weit sicherere Bestimmung, als wenn man nach „guter alter Vätersitte" eine faule Boussole von unbekannter Deklination benutzt. — Restituiert man in 1 für die Hilfsgrösse α ihren Wert, und setzt dagegen

$$Tg\,A = \frac{Si\,s \cdot Tg\,p}{Co\,\varphi} \qquad \text{und} \qquad m = Co\,s \cdot Tg\,p \cdot Tg\,\varphi \qquad 3$$

so ergiebt sich bei Einführung des Supplementes w' des Azimutes

$$\mathrm{Tg}\, w' = \frac{\mathrm{Tg}\, A}{1 - m} = \mathrm{Tg}\, A + \frac{m \cdot \mathrm{Tg}\, A}{1 - m} \qquad \mathbf{4}$$

Nun ist aber goniometrisch, wenn $w' = A + x$ gesetzt wird

$$\mathrm{Tg}\, w' = \frac{\mathrm{Tg}\, A + \mathrm{Tg}\, x}{1 - \mathrm{Tg}\, A \cdot \mathrm{Tg}\, x} = \mathrm{Tg}\, A + \frac{1 + \mathrm{Tg}^2 A}{1 - \mathrm{Tg}\, A \cdot \mathrm{Tg}\, x} \cdot \mathrm{Tg}\, x$$

und durch Vergleichung dieses Wertes mit 4 ergiebt sich

$$\mathrm{Tg}\, x = \frac{m \cdot \mathrm{Tg}\, A}{1 - m + \mathrm{Tg}^2 A} = m \cdot \mathrm{Tg}\, A + m^2 \cdot \mathrm{Tg}\, A + \ldots \qquad \mathbf{5}$$

Für den Polarstern werden m und A klein, und man darf daher für ihn sehr nahe

$$w' = A + m \cdot A + m^2 \cdot A \qquad \mathbf{6}$$

setzen, wo sogar $m^2 \cdot A$, wenn nicht sehr genaue Messungen vorliegen, weggelassen werden darf. Es ist dies eine (vgl. Brief Zach an Horner von 1829 IV 16 in Notiz 231) von **Horner** aufgestellte, durch ihre Einfachheit sich sehr rekommandierende Formel, welche **Zach** (sonderbarer Weise ohne Horner zu nennen) in der Jenaischen Litteraturzeitung (1829 Erg. 41) einer durch **Puissant** vorgeschlagenen, bedeutend komplizierteren Näherungsformel gegenüberstellte. — *b.* Steht ein dem Pole naher Stern in einer seiner Elongationen, so hat man für ihn (180)

$$\mathrm{Si}\, w = \mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Co}\, z = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Se}\, p \qquad \mathrm{Co}\, s = \mathrm{Tg}\, p \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi \qquad \mathbf{7}$$

und kann daher, unter Voraussetzung der Polhöhe, zum voraus die der Elongation zukommende Einstellung und Zeit berechnen, und da (177) für $dp = 0$

$$dw = \frac{\mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Co}\, v}{\mathrm{Co}\, w \cdot \mathrm{Co}\, \varphi} \cdot dv + \mathrm{Tg}\, w \cdot \mathrm{Tg}\, \varphi \cdot d\varphi \qquad \mathbf{8}$$

ist, so ergiebt sich überdies, dass (abgesehen von Sternen etwas grösserer Poldistanz) eine kleine Abweichung der Variation von 90° oder eine kleine Unsicherheit in der Polhöhe wenig Einfluss auf das Resultat hat, und der Stern etwas in seiner Elongation „verweilt“, also leicht auf denselben eingestellt, sowie sein momentaner Abstand von der Mire, folglich auch das Azimut dieser letztern, bestimmt werden kann. — *c.* Stellt man auf den Stern in seinen beiden Elongationen ein, so entspricht offenbar das Mittel der beiden Ablesungen am Horizontalkreise dem Meridiane, und man kann somit letztern auf diese, bereits auf der Sternwarte von Landgraf **Wilhelm** (vgl. Mitth. 45) und dann wieder von Dom. **Cassini** bei seiner Gradmessung (420) angewandte Weise, ohne jegliche Voraussetzung und Rechnung bestimmen; jedoch ist in Beziehung auf Kassel nicht zu übersehen, dass diese Methode vor Erfindung des Fernrohrs nur benutzt werden konnte, wenn von den beiden Elongationen die eine nach Sonnenuntergang und zugleich die andere vor Sonnenaufgang eintrat. Um diesem beschränkenden Umstande zu entgehen und zugleich die lange Zwischenzeit zu vermeiden, ist es, wie oben gesagt, zweckmässiger, den Horizontalunterschied a der Elongationsstände **zweier** Sterne zu messen, und sodann die sich aus

$$a = w_1 + w_2 \qquad \mathrm{Si}\, w_1 = \mathrm{Si}\, p_1 \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathrm{Si}\, w_2 = \mathrm{Si}\, p_2 \cdot \mathrm{Se}\, \varphi \qquad \mathbf{9}$$

durch Elimination von w_2 und φ leicht ergebende Formel

$$\mathrm{Tg}\, w_1 = \frac{\mathrm{Si}\, a \cdot \mathrm{Si}\, x}{\mathrm{Si}\, (a + x)} \qquad \text{wo} \qquad \mathrm{Tg}\, x = \frac{\mathrm{Si}\, p_1}{\mathrm{Si}\, p_2} \cdot \mathrm{Si}\, a \qquad \mathbf{10}$$

zu benutzen.

363. Bestimmung aus Durchgängen durch den Vertikal einer Mire. — Wählt man eine dem Meridiane nahe Mire und verlegt die Beobachtungen in deren Vertikal, so kann man mit einem stabilen und gut berichtigten Instrumente bei Benutzung von passenden Sternen und zweckmässiger Anordnung der Bestimmungen ebenfalls ein zuverlässiges Azimut erhalten und geniesst überdies den wesentlichen Vorteil, dasselbe nicht noch mit Hilfe des Horizontalkreises auf die Mire übertragen zu müssen, folglich von dessen Genauigkeit abhängig zu werden [a].

Zu 363: *a.* Aus der Fehlergleichung 362:2, welche sich mit Hilfe von 177 auch auf die Form

$$d w = (\mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,w \cdot \mathrm{Ct}\,z) \cdot d s - \mathrm{Si}\,w \cdot \mathrm{Ct}\,z \cdot d\varphi \qquad 1$$

bringen lässt, geht hervor, dass man, wenn die Mire nicht sehr weit vom Meridiane abliegt und zenitale Sterne vermieden werden, zwar immer noch einen kleinen Fehler in der Polhöhe nicht sehr zu fürchten braucht, dagegen eine Unsicherheit in der Zeitbestimmung doch unter Umständen recht schädlich auf das Resultat einwirken kann. Benutzt man jedoch unter Voraussetzung, es sei entweder

$$\mathrm{Ct}\,z = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,w \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Ct}\,z_2 - \mathrm{Ct}\,z_1 = 2\,\mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Se}\,w \qquad 2$$

sei es einen den Vertikal der Mire nördlich vom Zenite in der Distanz z passierenden Stern, sei es, was noch besser, das Mittel aus den Ergebnissen zweier Sterne, von welchen der eine in der Zenitdistanz z_1 südlich, der andere in der Zenitdistanz z_2 nördlich passiert, so reduziert sich 1 in beiden Fällen auf

$$d w = \mathrm{Tg}\,w \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot d\varphi \qquad 3$$

und es wird somit jene Unsicherheit ebenfalls unschädlich. — Wird für das Resultat eine grössere Genauigkeit beansprucht, so kommen dann allerdings auch noch die zufälligen Beobachtungsfehler, die übrig gebliebenen Instrumentalfehler, etc., in Betracht; aber es lassen sich auch diese durch Vervielfachung und symmetrische Anordnung der Beobachtungen so ziemlich bemeistern, wie dies z. B. (vgl. Mitth. 62 von 1884) die im Mai 1884 durch Alfred **Wolfer** von der Zürcher Sternwarte aus durchgeführte Bestimmung des Azimuts der Mire auf Rigi-Kulm zeigt, auf welche ich für den Detail einer solchen Operation verweise.

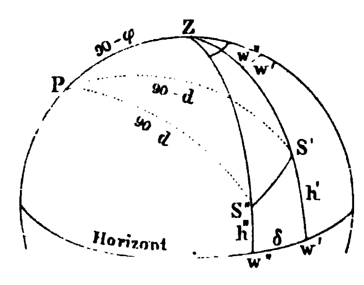
364. Einige andere Methoden zur Bestimmung des Azimutes. — Von verschiedenen andern Methoden, welche im Laufe der Zeiten zur Bestimmung des Azimutes vorgeschlagen wurden, erwähne ich um ihres hohen Alters willen diejenige, wo man zwei Höhen eines Gestirnes und die entsprechende Azimutaldifferenz misst [a], — ferner, wegen einer wichtigen Verwendung, diejenige, wo man die scheinbare Distanz eines Gestirnes von der Spitze eines Signales und die beidseitigen Höhenwinkel ermittelt [b], — und endlich, weil sie jeder Voraussetzung bar ist, diejenige, wo an einem Universalinstrumente drei Visuren nach einem Sterne festgelegt werden [c].

Zu 364: *a.* **Sédillot** hat einem Pariser Manuskripte der sog. Hakemitischen Tafeln (vgl. 515) entnommen, dass sich schon **Ibn Junis** die Aufgabe stellte, aus den mittelst zwei gemessenen Schatten bestimmten Höhen h' und h'' der Sonne und dem gemessenen Winkel der beiden Schattenwürfe (der Azimutaldifferenz δ) unter Voraussetzung der Polhöhe φ das Azimut w'' der Sonne zur Zeit der zweiten Beobachtung abzuleiten, und zur Lösung dieser Aufgabe Regeln gab, welche nach unserer Schreibart wie folgt lauten: Man berechne successive einige Hilfsgrössen nach

$$Q' = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,h' \qquad Q'' = \mathrm{Co}\,h'' - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,h' \qquad D^2 = Q'^2 + Q''^2$$
$$\mathrm{Si}\,\alpha = Q'' : D \qquad \mathrm{Co}\,\alpha = Q' : D \qquad \mathrm{Si}\,x = (\mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Si}\,h'') \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi : D \qquad 1$$

und setze sodann $\qquad w'' = \alpha + x \qquad$ 2

Ibn Junis scheint nicht mitzuteilen, wie er zu diesen eleganten, damals jedenfalls nur durch einen Meister erhältlichen Regeln kam, — es könnte jedoch auf folgende Weise geschehen sein: Bezeichnet d die für die beiden einander nahen Beobachtungszeiten als gleich zu betrachtenden Deklinationen der Sonne, so hat man aus den beiden Dreiecken PZS' und PZS'' nach damals schon längst bekannten Beziehungen



$$\mathrm{Si}\,d = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,w'$$
$$\mathrm{Si}\,d = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,h'' - \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

also

$$(\mathrm{Si}\,h' - \mathrm{Si}\,h'') \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi = \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,w' - \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

oder, da $w' = w'' - \delta$ ist, nach 1

$$D \cdot \mathrm{Si}\,x = \mathrm{Co}\,h' \cdot \mathrm{Co}\,(w'' - \delta) - \mathrm{Co}\,h'' \cdot \mathrm{Co}\,w'' = Q' \cdot \mathrm{Si}\,w'' - Q'' \cdot \mathrm{Co}\,w''$$

folglich $\qquad \mathrm{Si}\,x = \mathrm{Si}\,(w'' - \alpha) \qquad$ d. h. $\qquad x = w'' - \alpha$

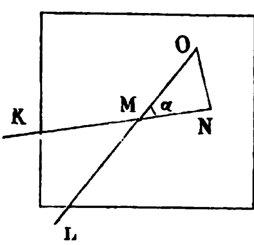
w. z. b. w. — *b.* Aus den drei gemessenen Grössen konnte offenbar die Azimutaldifferenz zwischen Gestirn und Signal, sowie, unter Voraussetzung der Deklination des Gestirnes und der Polhöhe, das Azimut des Gestirnes leicht berechnet, also auch das Azimut des Signales erhalten werden. **Bouguer**, der diese Methode bei der Gradmessung in Peru in der Weise benutzte, dass er die dem Horizonte nahe Sonne mit einem Signale verglich, machte in seiner betreffenden Mitteilung darauf aufmerksam, dass die Azimutaldifferenz von der Refraktion unabhängig sei, und dass in der Nähe des Equators, wo die Sonne bei Auf- und Untergang längere Zeit in demselben Vertikal verweile, eine kleine Unsicherheit in ihrer Höhe auf ihr Azimut fast ohne Einfluss sei; in höhern Breiten dagegen sei es allerdings besser, das Azimut der Sonne aus ihrem Stundenwinkel (resp. der Beobachtungszeit) abzuleiten. — *c.* Da die Lösung dieser Aufgabe, für welche z. B. auf die früher (13 : t) erwähnte Schrift von B. **Studer** verwiesen werden kann, auf der Voraussetzung beruht, dass die drei Sternlagen einem Parallel entsprechen, so involviert sie eine Probe für diese Hypothese, und wurde aus diesem Grunde von **Gauss** jeweilen im Eingange zu seinen Vorlesungen behandelt.

365. Die frühern Methoden zur Bestimmung der Polhöhe. — Die Polhöhe wurde in älterer Zeit meist aus den beiden Solstitialhöhen der Sonne abgeleitet[a], — wohl auch aus einer

andern Mittagshöhe derselben unter Berücksichtigung ihrer Deklination [b], — sowie zuweilen aus der Dauer des längsten Tages an dem betreffenden Orte [c]. Sodann kam spätestens bei den Arabern das Verfahren in Anwendung, die Polhöhe gleich dem Mittel der Culminationshöhen eines Circumpolarsternes zu setzen [d], — und an dieses reihte sich bei den Schiffahrern die Übung an, die Höhe des Polarsternes zu messen, und an dieser je nach der gleichzeitigen Lage des kleinen Bären eine Korrektion anzubringen [e]. — Ausserdem wurden noch manche andere Methoden in Vorschlag gebracht, von deren wichtigsten die folgenden Nummern handeln werden [f].

Zu 365: *a.* Die ältern Astronomen bestimmten meistens statt der Polhöhe ihr Komplement, die Equatorhöhe, und zwar vorzugsweise aus der halben Summe der beiden am Gnomone erhaltenen Solstitialhöhen, deren halbe Differenz ihnen (191) die Schiefe der Ekliptik ergab. So richtig jedoch theoretisch dieses Verfahren war, so erzielten sie damit in der Praxis meistens zu grosse Werte, da bei dem gewöhnlichen (164), in eine Spitze auslaufenden Gnomone, die Schattenlänge nahezu dem obern Sonnenrande entsprach und auch die durch die Refraktion bewirkte Verkürzung des Schattens unberücksichtigt blieb. — *b.* Die an und für sich ebenso richtige und bis in das 18. Jahrhundert hinauf vielfach gebrauchte Methode, die Equatorhöhe dadurch zu bestimmen, dass man die mit dem Gnomone gemessene Mittagshöhe der Sonne um deren Deklination verminderte, ergab in der Praxis natürlich dieselben Fehler, und da man überdies die in verschiedenen Zeiten und nach verschiedenen Verfahren erhaltenen Werte kritiklos zusammenstellte, so hatte noch Wilhelm **Schickard** (Herrenberg in Würtemberg 1592 — Tübingen 1635; Diakon zu Nürtingen und später Prof. math. et orient. Tübingen) sich in seiner Schrift „Kurze Anweisung wie künstliche Landtafeln auss rechtem Grund zu machen. Tübingen (posth.) 1669 in 4." bitter zu beklagen, dass die verschiedenen Angaben für einen Ort oft bei 1° differieren „so man mit eim ungespitzten Pfal genäuer treffen sollte". So gab z. B. **Bartsch** in seinem sonst so anerkennenswerten „Planisphærium" von 1624 (vgl. 190) zwar „Tigurum Helvetiæ" unter 47° 22′, aber daneben auch „Zürich Helvetiæ" unter 47° 9′ Breite, — so schwankten damals die Angaben über die Breite von Basel zwischen 47° 10′ (Solothurn) und 47° 54′ (Freiburg i./Br.), — etc. Im 18. Jahrhundert trat eine bedeutende Verbesserung ein; doch fand noch Tob. **Mayer**, zur Zeit als er im Homan'schen Institute thätig war, notwendig, eine „Germaniæ mappa critica" zusammenzustellen, welche 1750 ausgegeben wurde und in der That immer noch bedenkliche Differenzen in den Breiten aufweist, von den noch viel ärgern in den Längen hier nicht einmal zu sprechen. — *c.* Nach Hipparchs Zeugnis bestimmte schon **Eudoxus** „die Neigung des Himmels" aus dem Verhältnis der Segmente des vom Horizonte geteilten Wendekreises, — also wohl indem er mit Hilfe einer Wasseruhr die Dauer des längsten Tages ermittelte. Wie er rechnete, wird nicht angegeben: Wir würden die nach 179 bestehende Formel $\mathrm{Tg}\,\varphi = -\mathrm{Co\,s}\cdot\mathrm{Ct\,e}$ benutzen, wo s den halben Tagbogen der Sonne am längsten Tage und e die Schiefe der Ekliptik bezeichnet. — *d.* Schon **Aboul Hhassan** kannte dieses Verfahren, das sich dann auch im Abendlande spätestens bei **Werner**, namentlich aber bei Landgraf **Wilhelm** neben der Methode der Solstitialhöhen (vgl. Mitth. 45 von 1878) findet, ja sogar von Andreas **Schoner**, der um 1550

„Mathematicus" des Landgrafen war, in seiner Schrift von 1562 (vgl. 195 : 9) als „Modus principis Guilhelmi Landgravij Hassiæ observandi altitudinem poli" bezeichnet wird, wobei derselbe zugleich anführt, dass Wilhelm mit einem fünffüssigen, genau in Grade und Minuten geteilten Quadranten, die grösste und kleinste Höhe des Bennenaz (η Ursæ maj.) gemessen und daraus das Mittel genommen habe. Auch **Tycho** benutzte später (vgl. 453 : f) diese Methode. — *e.* Nach Peschel bestimmten die portugiesischen Seefahrer schon zur Zeit **Heinrich** des Seefahrers (1394—1460) die Polhöhe in solcher Weise, und ebenso **Columbus**, der in seinen Schiffsbüchern immer bemerkte, ob der kleine Bär „auf dem Kopf", oder „auf den Füssen", oder „linker", oder „rechter Hand" stand. — *f.* Beispielsweise erwähne ich hier noch das von **Schickard** in seiner oben erwähnten Schrift beliebte Verfahren: Man stelle über dem Punkte M, dessen Polhöhe bestimmt werden soll, eine Horizontaltafel (Mensel) auf, und notiere auf dieser M durch eine Nadel, — dann beobachte man zwei Sterne K und L bei ihrem Niedergange und stecke entsprechend zwei Nadeln bei N und O, — messe die Seiten des Dreiecks OMN, — und berechne daraus den Winkel α, aus dessen Wert man auf die Polhöhe schliessen könne. Und in der That, da α offenbar die Differenz $w - w'$ der Abendweiten beider Sterne repräsentiert, so hat man nach 179



$$\text{Co}\, w = -\text{Co}\, p \cdot \text{Se}\, \varphi \qquad \text{Co}\, w' = -\text{Co}\, p' \cdot \text{Se}\, \varphi \quad \text{also} \quad \text{Tg}\, w = \frac{\text{Co}\, p' - \text{Co}\, p \cdot \text{Co}\, \alpha}{\text{Co}\, p \cdot \text{Si}\, \alpha} \qquad 1$$

kann also w und sodann φ wirklich berechnen. **Schickard** fügt bei: „Noch besser ist es man schlag nur drei stöck nach den Gesichtslinien in die Erden, so kann man den Dreieck viel grösser haben als kein Tisch vermag; darumb auch desto schärpffer. Und ob man zwar unter allen Sternen die Wahl hat, sein doch die bequemsten dazu, welche nahend bei den beiden Tropicis, als Arcturus und Cor Scorpii, stehen. So schadet auch die Refractio hier nichts, weil man nicht die Höhen hinauff, sondern überzwerch misset".

366. Die Bestimmung aus grössten Höhen. — Die Bestimmung der Polhöhe aus grössten oder also bei der Culmination der Gestirne gemessenen Höhen ist schon früher (167—70) ziemlich einlässlich besprochen worden, so dass hier nur einige praktische Regeln nachzutragen sind [a], zumal bei Anlass der eigentlichen Meridianinstrumente (376—83) nochmals darauf zurückzukommen sein wird [b].

Zu 366: *a.* Vor allem ist es zweckmässig, nicht nur zwei, sondern behufs möglichster Elimination der zufälligen Fehler eine grössere Anzahl von Sternen zu beobachten, und ausserdem durch abwechselnde Beobachtungen in beiden Lagen des Instrumentes (bei Kreis Ost und bei Kreis West) den allfälligen Fehler des Zenitpunktes zu eliminieren oder zu bestimmen, wie dies in folgendem Beispiele näher auseinander gesetzt ist: Herr **Wolfer** erhielt 1885 VII 20 an einem 10" gebenden Theodoliten, dessen Zenitpunkt annähernd bei 0 lag, in Zürich unter der angenommenen Polhöhe $\varphi' = 47^\circ\ 18'$ die in der beigegebenen Tafel, wo die δ die Deklinationen der benutzten Sterne und die z' die gemessenen Zenitdistanzen bezeichnen, enthaltenen Bestimmungen.

Führt man nun $\Delta\varphi$ als Verbesserung der angenommenen Polhöhe und Δz als Verbesserung des Zenitpunktes im Sinne der bei der Ost-Lage vom Zenit gegen Süd laufenden Teilung ein, so erhält man nach 169, wenn das obere Zeichen sich ebenfalls auf Kreis-Ost bezieht und α die Refraktionskonstante bezeichnet,

Stern	δ			Kreislage	z'			Tg z'	B	R	B − R
σ Herc.	46°	35'	33''	o	0°	47'	38''	0,014	311''	301''	10''
α Scorp.	— 26	10	33	w	73	29	30	3,372	57	68	— 11
A Drac.	69	1	21	o	— 21	38	2	— 0,397	319	323	— 4
η Herc.	39	8	47	w	8	13	30	0,144	257	251	6
k Oph.	9	33	29	o	37	48	50	0,776	259	257	2
η Oph.	— 15	34	47	w	62	55	20	1,955	153	149	4
ζ Drac.	65	51	43	o	— 18	28	15	— 0,334	328	320	8
θ Oph.	— 24	52	56	w	72	12	25	3,115	89	83	6
β Drac.	52	23	32	o	— 5	0	40	— 0,087	292	306	— 14
ι Herc.	46	4	23	w	1	17	40	0,023	243	258	— 15
ψ Drac.	72	12	37	o	— 24	49	7	— 0,462	330	327	3
ν Oph.	— 9	45	18	w	57	6	15	1,564	177	172	5

die Bedingungsgleichung

$$\Delta\varphi \pm \Delta z - \alpha \cdot \mathrm{Tg}\, z' = B \qquad \text{wo} \qquad B = \delta + z' - \varphi' \qquad \mathbf{1}$$

kann nun diese für jede Beobachtung aufschreiben, wobei sich die in die Tafel eingeschriebenen Werte von B ergeben, — erhält daraus für $\Delta\varphi$, Δz und α die Normalgleichungen

$$12 \cdot \Delta\varphi - 9{,}665 \cdot \alpha = 2815 \qquad 12 \cdot \Delta z + 10{,}645 \cdot \alpha = 863$$

$$9{,}665 \cdot \alpha - 10{,}645 \cdot \Delta z - 28{,}400 \cdot \alpha = 874$$

aus diesen

$$\alpha = 56'',65 \qquad \Delta z = 21'' \qquad \Delta\varphi = 4'\ 40'' \qquad \varphi = 47^{\circ}\ 22'\ 40''$$

und, die erhaltenen Werte links in die 1 einführend, die in die Tafel eingeschriebenen R, sowie die Differenzen B — R, deren mittlerer Wert $\pm$ 8'',4 zunächst als durchschnittlicher Messungsfehler einer Zenitdistanz aufzufassen ist. — *b.* Wie Pühler (170) als einer der ersten zu nennen war, der die Methode der grössten Höhen überhaupt ernstlich anwandte, so ist unzweifelhaft Jean Chappe d'Auteroche (Mauriac in Auvergne 1722 — San Joseph in Kalifornien 1769; Oheim der Chappe in 158; Abbé und Akad. Paris) als einer der ersten zu erwähnen, welcher von ihr (natürlich abgesehen von der Rechnungsmethode) in dieser vervollkommneten Weise Gebrauch machte, indem er 1769 in Kalifornien zur Bestimmung der Polhöhe mit einem im Meridiane aufgestellten dreifüssigen Quadranten von Canivet, der mutmasslich auf 5' geteilt war und für die kleinern Teile eine mikrometrische Vorrichtung besass, Culminationshöhen von Sternen abwechselnd bei Limbus West und Limbus Ost mass; vgl. seine „Voyage en Californie pour l'observation du passage de Vénus. Paris 1772 in 4."

367. Die Bestimmung aus Circum-Meridianhöhen. — Anstatt ausschliesslich die Höhe eines Sternes bei seinem Durchgange durch den Meridian zu messen, kann man diese Operation

unter Notierung der Zeit auch wiederholt vor und nach der Culmination vornehmen und dann die erhaltenen Zenitdistanzen nach Massgabe des betreffenden Stundenwinkels auf den Meridian reduzieren [a], wobei verschiedene Manipulationen und Hilfsmittel zur Anwendung kommen können [b], besonders wenn man sich auf den Polarstern beschränkt [c], oder noch besser Beobachtungen von Polarsternen mit solchen von nahe in gleicher Höhe südlich culminierenden Sternen verbindet [d].

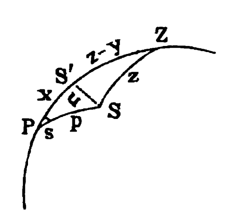
Zu 367: *a.* Aus dem Dreiecke Pol-Zenit-Stern folgt

$$\mathrm{Co}\,z = \mathrm{Si}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,d + \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,s = \mathrm{Co}\,(\varphi - d) - 2 \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s \qquad \mathbf{1}$$

und somit nach 42 : 5

$$\varphi = d + z - \frac{2}{\mathrm{Si}\,1''} \cdot b \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s + \frac{2}{\mathrm{Si}\,1''} \cdot b^2 \cdot \mathrm{Si}^4\,{}^1\!/_2\,s \cdot \mathrm{Ct}\,(\varphi - d) - \ldots \quad \text{wo } b = \frac{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d}{\mathrm{Si}\,(\varphi - d)} \qquad \mathbf{2}$$

d. h. eine Reihe, welche für Beobachtungen in der Nähe des Meridianes ziemlich rasch konvergiert, und nach welcher man die Polhöhe, indem man mit einem supponierten Werte für φ die Hilfsgrösse b berechnet, leicht finden kann, — zumal wenn man eine Tafel besitzt, welche für das Argument s die Logarithmen von $2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,s : \mathrm{Si}\,1''$ und $2 \cdot \mathrm{Si}^4\,{}^1\!/_2\,s : \mathrm{Si}\,1''$ giebt, wie eine solche in „H. C. **Schumacher**, Sammlung von Hülfstafeln. Neue A. durch G. H. L. Warnstorff. Altona 1845 in 8. (p. 53—70), und in: C. W. **Peters**, Astronomische Tafeln und Formeln. Hamburg 1871 in 8. (p. 72—88)" enthalten ist. Zeigt sich bei der Rechnung, dass der supponierte Wert von φ ziemlich irrig war, so wird es allerdings notwendig werden, dieselbe noch einmal mit dem gefundenen bessern Werte zu revidieren. — *b.* Misst man, wie es wegen den zufälligen Fehlern und der wünschbaren Kontrole ratsam ist, rasch nach einander mehrere Circummeridian-Zenitdistanzen desselben Sternes, so genügt es, da die Werte von b dieselben bleiben, in 2 die Mittel der Zenitdistanzen und der allfällig aus einer Tafel erhobenen Werte einzuführen, — verliert dann aber die sich bei Einzelrechnung ergebende Kontrole, welche praktisch doch wohl mehr Wert hat als dieser kleine Gewinn. Immerhin wurde diese Reduktion von **Delambre**, namentlich bei Anwendung des damals beliebten, die Messung in beiden Lagen und die Repetition erlaubenden Bordakreises, empfohlen und lieferte eine Reihe ganz guter Resultate: So z. B. ersieht man aus „Friedrich **Trechsel** (Burgdorf 1776 — Bern 1849; Prof. math. et phys. Bern; vgl. Biogr. II), Observations astronomiques pour déterminer la latitude de Berne, faites en 1812 par le Colonel Henry, le Commandant Delcros et le Professeur Trechsel (Neue schweiz. Denkschr. XI von 1850)", dass damals mit einem 18-zölligen Kreise von Lenoir aus 408 sich auf 15 Tage verteilenden Einstellungen auf den Polarstern die Breite der kleinen Berner Sternwarte gleich 46° 57' 8",68 gefunden wurde, während ich 1854/5 aus Beobachtungen an dem damals neu aufgestellten Ertel'schen Meridiankreise 8",76 und Plantamour 1869 mit ebendemselben 8",66 erhielt. — Wählt man statt einem Stern die Sonne oder ein anderes Gestirn von veränderlicher Deklination, so kann man sich einer entsprechenden vereinfachten Rechnung bedienen, worauf ich jedoch hier nicht näher eintreten, sondern z. B. auf „**Brünnow**, Sphärische Astronomie (4. A. von 1881, p. 275)" verweisen will. — *c.* Für Sterne kleiner Poldistanz, speciell für den Polarstern, kann man auch auf folgende Weise vorgehen: Fällt man von dem



Sterne S eine Senkrechte $SS' = u$ auf den Meridian, so zerfällt die Equatorhöhe $PZ = \psi$ in zwei Teile $PS' = x$ und $ZS' = z - y$, wo y eine kleine Grösse ist, und man hat unmittelbar

$$\psi = z + x - y \quad \mathrm{Tg}\, x = \mathrm{Tg}\, p \cdot \mathrm{Co}\, s \quad \mathrm{Si}\, u = \mathrm{Si}\, p \cdot \mathrm{Si}\, s \qquad 3$$

$$\mathrm{Co}\, z = \mathrm{Co}\, u \cdot \mathrm{Co}(z - y) \text{ oder } \mathrm{Si}\, y = (\mathrm{Se}\, u - \mathrm{Co}\, y) \cdot \mathrm{Ct}\, z \qquad 4$$

Aus 3'' erhält man aber mit Hilfe der goniometrischen Reihen

$$\begin{aligned} x &= [\mathrm{Tg}\, p \cdot \mathrm{Co}\, s - \tfrac{1}{3} \mathrm{Tg}^3 p \cdot \mathrm{Co}^3 s + \ldots] : \mathrm{Si}\, 1'' \\ &= (p + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots) \cdot \mathrm{Co}\, s - \tfrac{1}{3} (p^3 \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots) \mathrm{Co}^3 s + \ldots \\ &= p \cdot \mathrm{Co}\, s + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Co}\, s \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots \end{aligned} \qquad 5$$

und entsprechend, da $\mathrm{Se}\, u = 1 + \tfrac{1}{2} \mathrm{Si}^2 u + \ldots$ ist, aus 4'' mit Hilfe von 3'''

$$y = \tfrac{1}{2} p^2 \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Ct}\, z \cdot \mathrm{Si}\, 1'' + \ldots \qquad 6$$

folglich nach 3'

$$\psi = z + p \cdot \mathrm{Co}\, s - \tfrac{1}{2} p^2 \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Ct}\, z \cdot \mathrm{Si}\, 1'' + \tfrac{1}{3} p^3 \cdot \mathrm{Co}\, s \cdot \mathrm{Si}^2 s \cdot \mathrm{Si}^2 1'' + \ldots \qquad 7$$

wo in der Regel schon das Glied mit p^3 vernachlässigt und überdies die Rechnung mit Hilfe von Tafeln, wie solche z. B. in den oben erwähnten Sammlungen enthalten sind, erleichtert werden kann. — Die 7 wurde durch J. J. **v. Littrow** in seiner „Nouvelle méthode de déterminer la latitude par l'observation de l'étoile polaire en tout temps et dans toutes les positions de l'étoile (Corr. astr. IV von 1820)" entwickelt, trägt auch dessen Namen und veranlasste z. B. die Publikation „Amédée **Racine**, Tables pour calculer la latitude d'un lieu par des observations de la polaire, construites sur les formules de M. Littrow. A la Chapelle du Bourgay 1824 in 4." Verschiedene Konkurrenz-Arbeiten, wie namentlich „J. C. **Horner**, Méthode facile et générale pour calculer la latitude d'un lieu par les hauteurs de l'étoile polaire, observées à toute heure; et Th. **Young**, Autre méthode pour réduire au méridien les hauteurs circumméridiennes d'un astre quelconque. Gênes 1822 in 8. (Corr. astr. V von 1821)", sind ebenfalls bemerkenswert, obschon meistens die Littrow'sche Behandlung vorgezogen wird. — *d.* Bezeichnet man mit Δz die Reduktion der dem Stundenwinkel s entsprechenden Zenitdistanz z auf den Meridian, so hat man nach 1 für $s = 0$

$$\mathrm{Co}\,(z - \Delta z) = \mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, d + \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d$$

folglich durch Subtraktion von 1 unter Benutzung bekannter goniometrischer Formeln

$$\mathrm{Si}\, \frac{\Delta z}{2} = \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Si}^2 \frac{s}{2} \cdot \mathrm{Cs}\left(z - \frac{\Delta z}{2}\right) \quad \text{oder} \quad \Delta z = \frac{\mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Si}\, 1''}{2 \cdot \mathrm{Si}\, z} \cdot s^2 \qquad 8$$

wo jedoch die letztere Annäherungsformel nur bei ganz kleinen Werten von s gebraucht werden darf. Aber auch die strenge Formel 8' erlaubt die Reduktion Δz leicht zu finden, indem man zuerst rechts Δz vernachlässigt, und sodann mit Hilfe der logarithmischen Differenz den so erhaltenen Lsi für den ihm entsprechenden Wert von Δz korrigiert, — ja es ist die darauf beruhende Methode unter der Vorschrift, dass man sie nicht nur auf den Polarstern, sondern auch auf nahe in gleicher Höhe kulminierende südliche Sterne anwende, und jeden Stern mehrfach sowohl bei Okular West als bei Okular Ost beobachte, zu einer der beliebtesten der Neuzeit geworden. So z. B. erhielten Joh. Jakob **Baeyer** (Müggelheim bei Köpenik 1794 — Berlin 1885; Generalmajor) und Moritz **Sadebeck** (Reichenbach in Niederschlesien 1809 — Potsdam

1885; früher Gymn. Breslau, dann Prof. am geod. Inst. Berlin) 1862 an einem 13″ Universalinstrument in Breslau unter anderm:

Sternzeit 1862	Gegenstand	Okul.	Kreisangabe
VII 6, $12^h\ 24^m\ 56^s{,}11$	α Urs. min. U. C.	West	40° 19′ 24″,0
52 22,11	$1^h\ 8^m\ 56^s{,}32$; 88° 34′ 21″,32	Ost	319 42 1,2
— 7, 0 19 20,11	α Urs. min. O. C.	West	37 28 9,0
41 11,69	$1^h\ 8^m\ 57^s{,}84$; 88° 34′ 21″,41	Ost	322 33 20,9
— 24, 4 40 38,49	α Tauri	West	325 7 42,8
50 52,67	$4^h\ 28^m\ 2^s{,}68$; 16° 13′ 49″,42	Ost	34 53 51,6

Es ergeben sich also, wenn von der Abweichung des Zenitpunktes von Null Umgang genommen wird, da die Kreisablesungen bereits für Refraktion und ($\varphi = 51^0\ 7'$ angenommen) nach 8′ für den Stundenwinkel korrigiert, sowie die Deklinationen aus den Ephemeriden bekannt sind, aus

α Urs. min. U. C.	α Urs. min. O. C.	α Tauri
$z' = 40^0 19' 24'',0$	$z' = 37^0 28'\ 9'',0$	$z' = 34^0 52' 17'',2$
$z'' = 40\ 17\ 58,8$	$z'' = 37\ 26\ 39,1$	$z'' = 34\ 53\ 51,6$
$\frac{1}{2}(z' + z'') = 40\ 18\ 41,4$	$\frac{1}{2}(z' + z'') = 37\ 27\ 24,0$	$\frac{1}{2}(z' + z'') = 34\ 53\ 4,4$
$180 - d = 91\ 25\ 38,7$	$d = 88\ 34\ 21,0$	$d = 16\ 13\ 49,4$
$\varphi = 51\ 6\ 57,3$	$\varphi = 51\ 6\ 57,4$	$\varphi = 51\ 6\ 53,8$

wobei sich der, im Mittel aus allen drei Beobachtungspaaren folgende Fehler $\frac{1}{2}(z' - z'') = 44'',9$ des Zenitpunktes je aufgehoben hat. Auf solche Weise erhielten im Mittel

Baeyer und Sadebeck } aus 72 Beob. von α Urs. min. . . . $\varphi = 51^0\ 6'\ 57'',242$
- 48 - - α Bootis u. α Tauri 55,698

während mit demselben Instrumente etwas später

Galle . . } aus 69 Beob. von α Urs. min. . . . $\varphi = 51^0\ 6'\ 57'',563$
- 20 - - α Tauri 55,392

fand, und man muss somit offenbar (381) auf eine sehr merkliche Durchbiegung η des Fernrohrs schliessen, welche zwar die nahe gleiche Zenitdistanz aller drei Sterne auch um nahe gleich viel, aber die Polhöhe wegen $\varphi = d - z_n$ und $\varphi = d + z_s$ für nördliche und südliche Sterne in verschiedenem Sinne fälscht. Setzt man die wirkliche Polhöhe $\varphi = a + \triangle\varphi$ (wo $a = 51^0\ 6'\ 50''$ angenommen werden mag) und die beobachtete Polhöhe gleich φ', so ist somit

$$\varphi' = a + \Delta\varphi \pm \eta \qquad \mathbf{9}$$

wo sich das obere Zeichen auf nördliche, das untere auf südliche Sterne beziehen soll. Man erhält also, wenn man 9 für alle n nördlichen und s südlichen Beobachtungen aufschreibt, für die wahrscheinlichsten Werte von $\triangle\varphi$ und η (52) die Normalgleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma\varphi'_n + \Sigma\varphi'_s &= (n + s)\cdot a + (n + s)\cdot\triangle\varphi + (n - s)\cdot\eta \\ \Sigma\varphi'_n - \Sigma\varphi'_s &= (n - s)\cdot a + (n - s)\cdot\triangle\varphi + (n + s)\cdot\eta \end{aligned} \qquad \mathbf{10}$$

oder durch Addition und Subtraktion

$$\frac{1}{n}\sum\varphi'_n = a + \triangle\varphi + \eta \qquad \frac{1}{s}\sum\varphi'_s = a + \triangle\varphi - \eta$$

und endlich durch nochmalige Addition und Subtraktion

$$\triangle\varphi = \frac{1}{2n}\sum\varphi'_n + \frac{1}{2s}\sum\varphi'_s - a \qquad \eta = \frac{1}{2n}\sum\varphi'_n - \frac{1}{2s}\sum\varphi'_s \qquad \mathbf{11}$$

Setzt man das Gewicht jeder Einzelbestimmung von φ' gleich der Einheit, so geht (52:9) aus 11 für die Bestimmung des Gewichtes p von $\triangle\varphi$ oder η die gemeinschaftliche Relation

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \cdot n + \left(\frac{1}{2s}\right)^2 \cdot s \qquad \text{oder} \qquad p = n + s - (n-s)^2 : (n+s) \qquad \mathbf{12}$$

hervor. Nach 11 und 12 erhielten nun **Baeyer** und **Sadebeck**

$\eta = 0'',772 \qquad \triangle\varphi = 6'',470 \qquad \varphi = 51^0\ 6'\ 56'',470 \qquad p = 115,20$

und dagegen **Galle**

$\eta = 1'',086 \qquad \triangle\varphi = 6'',477 \qquad \varphi = 51^0\ 6'\ 56,477 \qquad p = 62,02$

so dass bei Berücksichtigung der Gewichte durch Zusammenfassen beider Reihen die Schlusswerte

$\eta = 0'',882 \qquad \varphi = 51^0\ 6'\ 56'',472$

erhalten werden.

368. Die Aufgabe von Douwes und die Methoden der Nautiker. — Die gewöhnlich, wenn auch nicht mit vollem Rechte, nach Cornelis **Douwes** [a] benannte Aufgabe besteht darin, aus zwei Zenitdistanzen eines Gestirnes und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Polhöhe zu finden [b], — kompliziert sich jedoch dadurch, dass bei Anwendung der Sonne ihrer Deklinationsänderung und bei Bestimmungen auf der See der durch **Boussole** und **Log** [c] gegebenen Ortsveränderung des Beobachters Rechnung getragen werden muss [d]. Für weitern Detail und für andere auf der See gebräuchliche Methoden, soweit letztere nicht schon unter vorhergehenden Nummern Berücksichtigung fanden, muss auf die nautische Fachlitteratur verwiesen werden [e].

Zu 368: *a.* Cornelis **Douwes** (1713? — Amsterdam 1773) war Lehrer am Zeemans-Kollegium zu Amsterdam, und wahrscheinlich Vater des sich bei Ausgabe der „Tafelen behelzende de Sinussen, etc. Amsterdam 1775 in 8." als „Adjunct Mathematicus by't Edel Mag. Collegio ter Admiraliteit te Amsterdam" einführenden Bernardus Joannes **Douwes**. — *b.* Bezeichnen z_1 und z_2 zwei unter derselben Breite φ zu den Uhrzeiten u_1 und u_2 gemessene Zenitdistanzen eines Gestirnes der Coordinaten a und d, so hat man aus Dreieck Pol-Zenit-Stern

$$\mathrm{Co}\,z_1 = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,s_1 \qquad \mathrm{Co}\,z_2 = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,s_2 \qquad \mathbf{1}$$

und also durch Subtraktion, wenn

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) = \tfrac{1}{2}\left[a + \tfrac{1}{15}s_2 - \triangle t - (a + \tfrac{1}{15}s_1 - \triangle t)\right] = \tfrac{1}{30}(s_2 - s_1) \qquad \mathbf{2}$$

die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen ist,

$$\mathrm{Co}\,z_1 - \mathrm{Co}\,z_2 = 2\,\mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi\ \mathrm{Si}\,(s_1 + 15\,\lambda)\ \mathrm{Si}\,15\,\lambda$$

oder

$$\mathrm{Si}\,(s_1 + 15\,\lambda) = \frac{\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}(z_2 + z_1) \cdot \mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)}{\mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,15\,\lambda} \qquad \mathbf{3}$$

so dass man, unter Voraussetzung eines Näherungswertes für die Polhöhe φ, ohne Schwierigkeit s_1 und $s_2 = s_1 + 30\,\lambda$ berechnen kann. Da ferner nach 1''

$$\mathrm{Co}\,(\varphi - n) = \mathrm{Co}\,z_2 : m \quad \text{wo} \quad m \cdot \mathrm{Si}\,n = \mathrm{Si}\,d \qquad m \cdot \mathrm{Co}\,n = \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,s_2 \qquad \mathbf{4}$$

so kann man sodann auch φ berechnen, womit die gestellte Aufgabe vollständig gelöst ist. Jedoch ist nicht zu übersehen, dass, wenn die nach 4 erhaltene Breite von dem für φ angenommenen oder nach Seemanns-Ausdruck **gegissten** Werte bedeutend abweicht, die Rechnung mit diesem bessern Werte noch einmal wiederholt werden muss. Es wird dies namentlich zur See, wo oft längere Zeit keine Bestimmung erhältlich ist, so dass diese gegissten Breiten nur auf der ziemlich unsichern Schiffsrechnung (vgl. Note c) beruhen, ziemlich häufig notwendig werden. — Die durch 1—4 gelöste, zuweilen auch als „Zweihöhenproblem“ bezeichnete Aufgabe wurde schon durch **Nonius** in seinem Werke „De crepusculis. Olyssipone 1542 in 4.“ behandelt, — dann wieder in „**Hues**, Tractatus de globis et eorum usu. Lugd. 1594 in 8.“, — in „Claes Heyndericks **Gietermaker** (Medemblik 1621 — Amsterdam 1670?; Examinator der ost- und westind. Kompagnie), Vergulden Licht der Zeevaert of te Konst der Stuurlieden. Amsterdam 1660 in 4. (und später)“, — in „Nic. **Fatio**, Navigation improv'd. London 1728 in fol.“, — etc.; aber für die Seeleute wurde sie eigentlich erst mundgerecht, als **Douwes** in seiner „Verhandeling om buiten den Middag op Zee de waare Middags-Breedte te vinden. Haarlem 1754 in 8.“ eine der obigen ähnliche indirekte Lösung gab, und deren Anwendung überdies durch seine „Zeemans-Tafelen en voorbelden tot het vinden der Breedte buiten den Middag. Amsterdam 1761 in 8. (auch später)“, welche alsbald auch in andere nautische Hilfsbücher, wie namentlich in die von **Maskelyne** gleichzeitig mit dem 1766 für 1767 ausgegebenen ersten „Nautical Almanac“ publizierten „Tables requisite to be used with the ephemeris. London 1766 in 8. (3. ed. 1802)“ übergingen, noch wesentlich zu erleichtern wusste. Diese Tafeln setzen die aus unserer 3' ohne weiteres hervorgehende Formel

$$\mathrm{Lg} \cdot 2\,\mathrm{Si}\,(s_1 + 15\,\lambda) = \mathrm{Lg}\,(\mathrm{Co}\,z_1 - \mathrm{Co}\,z_2) - \mathrm{Lsi}\,15\,\lambda - \mathrm{Lg}\,(\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,d) \qquad \mathbf{5}$$

voraus, indem sie für das Argument λ den Wert von Lsi 15 λ als „Log $^1/_2$ elapsed time“ und den Wert von Lg 2 Si ($s_1 + 15\,\lambda$) als „Log. middle time“ geben, also wirklich s_1 und sodann s_2 verhältnismässig leicht berechnen lassen. Ist sodann z die der Culmination entsprechende Zenitdistanz, so ist nach 1

$$\mathrm{Co}\,z = \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi = \mathrm{Co}\,z_2 + \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot 2\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,s_2 \qquad \mathbf{6}$$

so dass sich auch z und somit φ leicht ergeben, zumal man in denselben Tafeln den Wert von Lg 2 Si^2 $^1/_2$ s_2 als „Log rising“ eingetragen findet. Immerhin würde ich die Rechnung nach 3'' und 4 unter Benutzung der gewöhnlichen Logarithmentafeln vorziehen. — *c.* Zu Gunsten der sog. **Schiffsrechnung** (Logge-Rechnung), d. h. der angenäherten Bestimmung der Lage des Schiffes, wurde schon frühe von Zeit zu Zeit die Geschwindigkeit des Schiffes, sei es aus der Zeit bestimmt, welche der Hinterteil des Schiffes bedarf, um einen vorn ins Meer geworfenen leichten Körper zu erreichen, sei es nach Auswerfen des sog. **Log-Bretes**, an der sich abwickelnden und in sog. „Knoten (zu $^1/_{120}$ Seemeile = $^1/_2$'')“ abgeteilten **Log-Leine** abgelesen, — ferner die sich an der Boussole zeigende Schiffsrichtung oder der sog. „gesteuerte Kurs“ in das „Logbuch“ eingetragen; auch war vorgeschrieben, bei jeder Sonnenbeobachtung die Sonne zu „peilen“, d. h. die Richtung nach derselben ebenfalls an der Boussole abzulesen. — Für den genauern Detail auf die Fachlitteratur, wie z. B. auf „Eugen **Gelcich**, Die Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Schiffsgeschwindigkeit (Z. f. Instr. 1884)“ und die früher (321 : a) erwähnte Schrift von **Breusing** verweisend, füge ich noch die historische Notiz bei, dass, während die ältern Schiffahrer sich mit Schätzung (Gissung) der Schiffs-

geschwindigkeit begnügten, schon **Cusanus** in seinem Dialoge „De staticis experimentis" das Auswerfen eines Apfels empfahl, sodann in **Pigafettas** Reisejournal der Magellan'schen Weltumseglung unter Januar 1521 die Stelle „secondo le misure che facevano del viaggio colla **catena a poppa** (Kette am Hinterteile des Schiffes) noi percorrevano da 60 in 70 leghe al giorno" vorkommen soll, und dass auch der Name „Log" spätestens 1577 in „Will. **Bourne,** Rules of navigation" erwähnt wird. — *d.* Bezeichnet $\triangle d$ die in Minuten ausgedrückte stündliche Zunahme der Deklination der Sonne, δ die dem Schiffsjournal entnommene stündliche und ebenfalls in Minuten (Seemeilen) gegebene Schiffsgeschwindigkeit, und α den durch die Peilung bestimmten Winkel zwischen der Schiffsrichtung und der Richtung nach der Sonne zur Zeit der ersten Beobachtung, so hat man (92) von z_1 die Grösse

$$\triangle z = 2\lambda(\triangle d \cdot \mathrm{Co}\, v + \delta \cdot \mathrm{Co}\, \alpha) \qquad 7$$

abzuziehen, wo λ in Stunden auszudrücken ist und v die nach 177 zu berechnende Variation zur Zeit der ersten Beobachtung bezeichnet. — *e.* Ich erwähne: „**Bouguer,** De la méthode d'observer exactement sur mer la hauteur des astres. Paris 1729 in 4., — Dan. **Bernoulli,** Problema astronomicum inveniendi altitudinem poli una cum declinatione stellæ ejusdemque culminatione ex tribus altitudinibus stellæ et duobus temporum intervallis brevi calculo solutum (Comm. Petrop. IV von 1735), und: Sur la meilleure manière de trouver l'heure en mer lorsqu'on n'apperçoit pas l'horizon (Mém. Par. 1745, 47), — P. **Nieuwland,** Über Douwes Methode aus zwey ausser dem Meridiane liegenden Sonnenhöhen die Breite eines Ortes zu bestimmen (Berl. Jahrb. Suppl. I von 1793), — Don José **Mendoza** y Rios (Sevilla 1763? — Brighton 1816; span. Marineoffizier, später Mitgl. Roy. Soc.), Recherches sur les solutions des principaux problèmes de l'astronomie nautique. Londres 1797 in 4., — S. **Klügel,** Formeln aus 3 Höhen eines Gestirnes nahe beim Meridian und den Zeiten der Beobachtungen, die Meridianhöhe und die Zeit des Durchganges durch den Meridian zu finden (Berl. Jahrb. 1799), — K. **v. Littrow,** Beiträge zur nautischen Astronomie (Wien. Annal. 1841), und: Andeutungen für Seeleute über den Gebrauch und die Genauigkeit der Methoden, Länge und Missweisung durch Circummeridianhöhen zu bestimmen. Wien 1868 in 8., — **Grunert,** Über die nautische Aufgabe: Aus den gemessenen Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen bekannt sind, und der Zwischenzeit der beiden Beobachtungen, die Polhöhe und die Zeit zu bestimmen (Archiv 14 von 1850), — Franz **Schaub** (Gross-Schweinbarth in Nieder-Österreich 1817 — Triest 1871; Dir. Marine-Sternwarte Triest), Leitfaden für den Unterricht in der nautischen Astronomie. Triest 1853 in 8. (3. A. durch E. Gelcich, Wien 1878; auch ital. u. holl.), — Georg Daniel Eduard **Weyer** (Hamburg 1818 geb.; Prof. math. et astr. Kiel), Vorlesungen über nautische Astronomie. Kiel 1871 in 8., und: Die direkten oder strengen Auflösungen für die Bestimmung des Beobachtungsortes aus zwei Höhen der Sonne oder anderer bekannten Gestirne nebst dem Zeitunterschiede der Beobachtungen (Annal. hydr. 1883), — Yvon **Villarceau** et A. de **Magnac,** Nouvelle navigation astronomique. Paris 1877 in 4., — etc." — Anhangsweise erinnere ich noch an den von Kapitän Thomas H. **Sumner** (Boston 1807—1876) zur Orientierung auf der See nutzbar gemachten und nach ihm benannten Kreis, welcher den Ort, für welchen die Sonne zu einer bestimmten Chronometerzeit im Zenite steht, zum Centrum, und die zu dieser Zeit auf dem Schiffe gemessene Zenitdistanz der Sonne zum Radius hat, somit durch den Schiffsort geht, — für das Nähere teils auf dessen Abhandlung

„A new and accurate method of finding a ship's position at sea by projection on Mercator's chart. Boston 1843 in 8. (2. ed. 1845)" verweisend, teils auf die einfache Behandlung in „**Chauvenet**, Manual of astronomy (I 424—29)" und die erwähnten nautischen Specialwerke.

369. Die Horrebow-Talcott'sche Methode. — Verfügt man über ein Fernrohr, das sich um eine vertikale Axe drehen lässt, ferner einen zum Horizontalfaden messbar verschiebbaren Parallelfaden besitzt, und wählt zwei zenitale, sich in Rektascension wenig unterscheidende Sterne aus, deren Deklinationsmittel nahe der Polhöhe entspricht, — stellt nun, vorausgesetzt, der südliche Stern habe die kleinere Rektascension, den Horizontalfaden auf diesen bei seiner Culmination ein, — dreht sodann das Instrument, ohne die Höhenlage des Fernrohrs zu verändern, nach Norden, — wartet nunmehr die Culmination des zweiten Sternes ab, — und stellt während derselben den beweglichen Faden auf ihn ein, so kann man, wie schon Pet. **Horrebow** lehrte und seither A. **Talcott** neuerdings hervorhob, ohne eines geteilten Kreises zu bedürfen, eine brauchbare Polhöhenbestimmung erhalten, indem man das Deklinationsmittel der beiden Sterne um die halbe Bewegung des Fadens vermehrt [a].

Zu 369: *a.* Bezeichnet φ die Polhöhe, d die Deklination eines Sternes, z seine an einer von Nord über Zenit nach Süd laufenden Teilung abgelesene Zenitdistanz, Δz den im Sinne der Teilung gezählten Abstand des wahren Zenitpunktes von dem benutzten, b die im gleichen Sinne gezählte Biegung, und endlich r die Refraktion, so hat man für einen südlich culminierenden Stern

$$\varphi - d_1 = z_1 - \Delta z_1 + r_1 - b_1 \qquad 1$$

und für einen nördlich culminierenden Stern, wenn vor seiner Beobachtung das Fernrohr um 180° gedreht wird,

$$d_2 - \varphi = z_2 - \Delta z_2 + r_2 - b_2 \qquad 2$$

folglich aus Kombination dieser beiden Gleichungen

$$\varphi = \frac{d_1 + d_2}{2} + \frac{z_1 - z_2}{2} - \frac{\Delta z_1 - \Delta z_2}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2} - \frac{b_1 - b_2}{2} \qquad 3$$

wo das Glied $^1/_2\,(z_1 - z_2)$ offenbar mit der Hälfte des bei der oben beschriebenen Beobachtungsweise gefundenen Abstandes m der beiden Faden übereinstimmt. Besitzt das Fernrohr an seinem Okularende einen Aufsuchekreis mit einer etwas empfindlichen Libelle, so ergiebt die halbe Differenz l der an ihr vor und nach der Drehung gemachten Ablesungen einen brauchbaren Wert für $^1/_2\,(\Delta z_1 - \Delta z_2)$. Ferner darf die Refraktion bei Anwendung zenitaler Sterne, zumal nur der Refraktionsunterschied in Rechnung fällt, der Tangente der Zenitdistanz proportional gesetzt werden, so dass, wenn α die mittlere Refraktionskonstante und z die mittlere Zenitdistanz bezeichnet,

$$^1/_2\,(r_1 - r_2) = {}^1/_2\,\alpha\,(\mathrm{Tg}\,z_1 - \mathrm{Tg}\,z_2) = \alpha' \cdot m \qquad \text{wo} \qquad \alpha' = \alpha \cdot \mathrm{Se}^2 z \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

ist, und sich nach **Bessel** die Werte

$z = 0^0$	5^0	10^0	15^0	20^0
$\alpha' = 0'',0168$	$0'',0169$	$0'',0173$	$0'',0180$	$0'',0190$

entsprechen. Die Biegungsdifferenz endlich fällt kaum in Betracht, und es geht somit 3 in die bequeme Formel

$$\varphi = {}^1/_2 (d_1 + d_2) + m - l + \alpha' \cdot m \qquad 4$$

über, wo überdies die zwei letztern Glieder nur bei ganz genauen Beobachtungen zu berücksichtigen sind. — Unter der soeben erwähnten Vereinfachung spätestens durch Pet. **Horrebow** in Band III seiner „Opera mathematico-physica. Hafniæ 1740—42, 3 Vol. in 4." angedeutet, wurde diese Methode (vgl. Joh. Bernoullis Nouv. litt. Cah. 3, p. 166) durch Tob. **Mayer** an Karsten **Niebuhr** (Lüdinsworth in Hannover 1733 — Meldorf in Süder-Dithmarschen 1815; damals dänischer Ingenieurlieutenant, später Landschreiber zu Meldorf) empfohlen und von diesem 1762—67 auf seiner Reise nach Arabien mit Vorteil gebraucht, — bald darauf (vgl. Jungnitz, Beiträge zur praktischen Astronomie. Breslau 1791—94, 4 Bde. in 8.: I 212—53) auch von Pater Maximilian **Hell** (Schemnitz 1720 — Wien 1792; Jesuit; Dir. Obs. Wien) beim Venusdurchgange von 1769, wie er sagt „aus Noth", zur Bestimmung der Breite von Wardoehus benutzt. Später so ziemlich vergessen, wurde dieselbe Methode (vgl. Report of the U. S. coast survey for 1857), von dem amerikanischen Kapitän Andrew **Talcott** (Connecticut 1797—1883; später Ingenieur) in der obigen Weise etwas verfeinert, neuerdings beliebt, wohl auch nach ihm benannt, — sodann durch Chester Smith **Lyman** (Manchester in Conn. 1814 — New Haven 1890; Autodidakt; Prof. phys. et astr. New Haven) von 1852 hinweg (vgl. Amer. Journ. of science 1860) und andere mittelst Konstruktion von passenden Instrumenten gefördert, — ja es hat A. W. **Napierski** in seinem Programm-Aufsatze „Die Polhöhe von Mitau (Mitau 1874 in 4.)" den faktischen Beweis geleistet, dass man mittelst derselben, bei gehöriger Sorgfalt und wiederholter Anwendung, sogar ganz gute Resultate erhalten kann. In der neuesten Zeit bei geodätischen Aufnahmen vielfach angewandt, hat sich dieses Verfahren auch noch in einer ganz andern Weise bewährt: Da nämlich $d_1 + d_2$ im Laufe des Jahres mit der Summe der Aberrationen beider Sterne in Deklination variiert, so muss nach 3 auch die Grösse $m = {}^1/_2 (z_1 - z_2)$ einen entsprechenden periodischen Wechsel zeigen, folglich die Möglichkeit bestehen, aus den mikrometrisch mit grosser Genauigkeit bestimmbaren Variationen von m die Aberrationskonstante mit befriedigender Sicherheit zu ermitteln, — und in der That erhielt F. **Küstner**, vgl. seine „Neue Methode zur Bestimmung der Aberrationskonstante. Berlin 1888 in 4.", auf diese Weise für dieselbe den Wert 20",526 ± 0",012, welcher mit der Bestimmung von **Nyrén** (264) sehr nahe übereinstimmt. — Für ein ziemlich ebenbürtiges, sogar keine Mikrometerschraube bedürfendes Verfahren vgl. „G. **Lewitzky**, Über eine neue Polhöhenbestimmungsmethode. (Publ. I von Charkow 1891.)"

370. Einige andere Methoden der Polhöhenbestimmung. — Ausser den bereits erwähnten Verfahren zur Bestimmung der Polhöhe sind im Laufe der Zeiten noch manche andere vorgeschlagen worden. Da jedoch dieselben grösstenteils von untergeordneter Bedeutung sind, so beschränke ich mich auf einige betreffende Notizen und litterarische Angaben [a], um dadurch den nötigen Raum für eingehende Behandlung der Messungen im Meridian und im ersten Vertikal vorzusparen [b].

Zu 370: *a.* Wie schon Günther wieder in Erinnerung brachte, zeigte z. B. Pet. **Apian** in seiner Kosmographie unter anderm, wie man aus einer gemessenen Sonnenhöhe (h) und der wahren Zeit der Beobachtung (dem Stundenwinkel s) bei bekannter Deklination (d) die Polhöhe (φ) mittelst seinen Drehscheiben finden könne, was sich auch trigonometrisch leicht ausführen lässt, da aus $\text{Si}\, h = \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Si}\, d + \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Co}\, d \cdot \text{Co}\, s$ sofort

$$\text{Si}\,(\varphi \pm n) = \text{Si}\, h : m \quad \text{wo} \quad \text{Si}\, d = m \cdot \text{Co}\, n, \quad \text{Co}\, d \cdot \text{Co}\, s = m \cdot \text{Si}\, n \qquad 1$$

folgt, und es sollen sich noch jetzt die Schiffer häufig dieser Methode bedienen, obschon sie theoretisch, wie **Nonius** in seinen „Opera cuncta. Basileæ 1592 in fol. (p. 95)" hervorhob, wegen dem zweideutigen Sinus angreifbar ist. — Die von Antoine **Parent** (Paris 1666 — ebenda 1716; Akad. Paris) vorgeschlagene „Nouvelle méthode de prendre les hauteurs en mer avec une montre ordinaire (Mém. Par. 1703)" bestimmte die Polhöhe durch Beobachtung der Aufgangszeiten (t' und t'') zweier Sterne (a', d'; a'', d''). Da nämlich (179) für den Aufgang

$$\text{Co}\, s' = -\text{Tg}\, d' \cdot \text{Tg}\, \varphi \qquad \text{Co}\, s'' = -\text{Tg}\, d'' \cdot \text{Tg}\, \varphi \qquad 2$$

also

$$\frac{\text{Tg}\, d'}{\text{Tg}\, d''} = \frac{\text{Co}\, s'}{\text{Co}\,(s' + \Delta s)} \quad \text{wo} \quad \Delta s = s'' - s' = 15\,[t'' - t' - (a'' - a')] \qquad 3$$

folglich

$$\text{Tg}\, s' = \frac{\text{Si}\,(x - d'')}{\text{Si}\, x \cdot \text{Co}\, d'' \cdot \text{Tg}\, \Delta s} \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, x = \text{Tg}\, d' \cdot \text{Co}\, \Delta s \qquad 4$$

so kann man in der That mit Hilfe des durch jene Beobachtung gegebenen Wertes von Δs successive nach 4 und 2 zuerst s' und dann auch φ berechnen; jedoch dürfte allerdings diese Methode mehr als netter Kunstgriff zu bezeichnen sein, als praktischen Wert besitzen. — Der Litteratur sind beizufügen: „W. G. Friedrich **v. Beitler** (Reutlingen 1745 — Mitau 1811; Prof. math. Mitau), Neue Methode die Polhöhe zu bestimmen (Hindenburgs Archiv 1794; als eine der ersten ausgiebigen Anwendungen der Fehlergleichungen bemerkenswert), — C. Th. **Anger**, Über die sicherste Bestimmung der geographischen Breite aus Beobachtungen mit einem Spiegelsextanten oder ähnlichen Instrumente. Halle 1835 in 4., — Karl **Israel**-Holtzwart (Fritzlar in Kurhessen 1839 geb.; Gymnasiallehrer Frankfurt a./M.), Über die theoretisch möglichen Fälle der Polhöhenbestimmung (Grunerts Archiv Bd. 65), — Wilhelm **Tinter** (Jauernig in östr. Schlesien 1839 geb.; Prof. geod. Wien), Bestimmung der Polhöhe in Wien. Wien 1880 in 4., — Walter **Wislicenus** (Halberstadt 1859 geb.; Obs. und Doc. für Astr. Strassburg), Über einige einfache Methoden der Zeit- und Breitenbestimmung (A. N. 2958 von 1890), — etc." — *b.* Für diese Bestimmungen ist auf die Sätze 377—385 zu verweisen.

371. Die Lotablenkung. — Dass an jedem Punkte der Erde die Lotrichtung eine etwas andere sein werde, als sie unter Voraussetzung eines homogenen Rotationsellipsoides sein müsste, und dass namentlich benachbarte grosse Gebirgsmassen eine merkliche Ablenkung veranlassen dürften, konnte nach Entdeckung der allgemeinen Gravitation niemand verborgen bleiben, der sich mit betreffenden Fragen beschäftigte. Dagegen gehört es zu den vielen Verdiensten von **Bouguer**, dass er während seines Aufenthaltes in Peru (421) eine **erste** wirkliche Bestimmung einer solchen Lot-

ablenkung ausführte [a] und dadurch den Anstoss zu weitern Untersuchungen dieser Art gab; denn eine merkliche und mit den Lokalverhältnissen variierende Verschiebung des Zenitpunktes wird sich notwendig auf die aus Zenitdistanzen abgeleitete Polhöhe übertragen und somit namentlich bei den Präcisionsmessungen der neuern Zeit nicht unberücksichtigt bleiben dürfen [b].

Zu 371: *a.* Es war **Bouguer** zwar klar geworden, dass sich die Ablenkung des Lotes durch eine Gebirgsmasse am leichtesten konstatieren und bestimmen liesse, wenn man sich im Meridiane des mutmasslichen Attraktionscentrums und ungefähr in gleichen Distanzen südlich und nördlich von demselben aufstellen, und an beiden Stationen die Höhen derselben Sterne beobachten könnte; denn es müsste sich in diesem Falle (in ähnlicher Weise wie es später, vgl. 222, am Sheballien praktiziert wurde) aus dem halben Überschusse der Differenz entsprechender Höhen über die aus der geodätischen Distanz mit Hilfe der Gradlänge abgeleitete Polhöhendifferenz unmittelbar jene Ablenkung ergeben. Da ihm aber die Verhältnisse am Chimborasso nicht wohl gestatteten, in dieser Weise vorzugehen, so entschloss er sich im Spätjahr 1742, unter Beihilfe von **La Condamine**, zuerst eine Station zu beziehen, welche ein wenig südlich von dem mutmasslichen Schwerpunkte des Berges in einer Meereshöhe von circa 2400' lag, — etwas unter der Schneegrenze, aber allerdings in jenem Dezember gerade in der Region starken Schneefalles, der das Zelt einzudrücken drohte. Die beiden Akademiker beobachteten dort die Höhen h_1 von 4 südlich und die Höhen H_1 von 6 nördlich vom Zenit culminierenden Sternen; dann verfügten sie sich an eine möglichst (etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden) nach Westen und etwas (circa 174') tiefer gelegene zweite Station, deren relative Lage gegen die erste genau ermittelt wurde, — beobachteten dort die Höhen derselben Sterne, — korrigierten sie für die kleine Abweichung der zweiten Station von dem Parallel der ersten, — und erhielten so neue Werte h_2 und H_2. Hätten nun die Sterne ohne Einfluss der Anziehung in diesem Parallel die Höhen h und H gehabt, und betrug dieser Einfluss, der sich je in einer Verlegung des Zenites nach Süden, also in einer Vergrösserung der südlichen und einer Verminderung der nördlichen Höhen geltend machte, Δ_1 und Δ_2, so war

$$h_1 = h + \Delta_1 \quad \text{und} \quad h_2 = h + \Delta_2 \quad \text{also} \quad h_1 - h_2 = \Delta_1 - \Delta_2$$
$$H_1 = H - \Delta_1 \qquad\qquad H_2 = H - \Delta_2 \qquad\qquad H_1 - H_2 = \Delta_2 - \Delta_1$$

also im Mittel
$$\Delta_1 - \Delta_2 = \tfrac{1}{2}\,[h_1 - h_2 - (H_1 - H_2)] \qquad \mathbf{1}$$

Bouguer erhielt nun im Mittel aus den 4 südlichen Sternen $h_1 - h_2 = 93'',5$ ($\pm$ 5,4) und im Mittel aus 4 (zwei mussten wegen unvollständigen korrespondierenden Beobachtungen verworfen werden) nördlichen Sternen $H_1 - H_2 = 78'',7$ ($\pm$ 3,5), also nach 1 durchschnittlich $\Delta_1 - \Delta_2 = 7'',4$ ($\pm$ 3,2), und nahm dann schliesslich, indem er nach der Lage der beiden Stationen zum Gebirge $\Delta_2 = \frac{1}{13}\Delta_1$ setzte, an, es möchte die Ablenkung des Lotes an der ersten Station etwa 8'' betragen. Vgl. für weitern Detail pag. 364—94 seiner Schrift „La figure de la terre", sowie seine Abhandlung „Sur la direction qu'affectent les fils à plomb (Mém. Par. 1754)". — *b.* Für die neuern Untersuchungen verweise ich auf Abschnitt XVI, wo von denselben mehrfach die Rede sein wird, und füge hier vorläufig nur noch einige Proben aus der betreffenden Litteratur bei, — nämlich: „**Zach**, L'attraction des montagnes et ses effets sur les fils à plomb ou sur les niveaux des instrumens d'astronomie. Avignon 1814, 2 Vol. in 8., —

J. **Baeyer**, Über den Einfluss der lokalen Lothablenkungen auf geodätische Operationen (A. N. 87 von 1825), — H. **Denzler**, Die Ablenkung des Senklothes durch die Gebirge (Jahrbuch S. A. Cl. 1866), — Fil. **Keller**, Ricerche sull' attrazione delle montagne. Roma 1872 in 8., — Robert **v. Sterneck** (Prag 1839 geb.; Oberstl. und Dir. Obs. mil. topogr. Inst. Wien), Über die Änderungen der Refractionsconstanten und Störungen der Richtung der Lothlinie im Gebirge. Wien 1879 in 8. (Auch mehrere spätere Abh. in Mitth. des k. k. milit. geogr. Inst.), — F. R. **Helmert**, Lothabweichungen: Formeln und Tafeln. Berlin 1886 in 4., und: Bericht über Lothabweichungen (Verh. in Nizza 1887), — etc. — Auf den schon von C. A. **Peters** (A. N. 507 von 1845) und andern in Betracht gezogenen und dann namentlich auch von A. **Gaillot** (Bull. astr. 1884) berechneten, im Maximum auf 0",0174 ansteigenden Einfluss der Mondanziehung glaube ich hier nicht näher eintreten zu sollen, da mir solche Untersuchungen mehr theoretischen Wert als praktische Bedeutung zu haben scheinen.

372. Die ältern Methoden zur Bestimmung der Sterncoordinaten. — Während die alten Chinesen die gegenseitige Lage der Gestirne zunächst aus Beobachtungen ihrer Culminationen bestimmt zu haben scheinen [a], so hielten sich dagegen die Chaldäer und die ältern Griechen dafür vorzugsweise an die Auf- und Untergänge [b], und erst weit später, möglicherweise durch **Timocharis** und **Aristyll**, vielleicht aber auch erst durch **Hipparch**, kamen absolute Bestimmungen durch Coordinaten und die bereits (198 u. f.) erwähnten Methoden zu deren Bestimmung in Gebrauch [c]. Diese letztern Verfahren, bei welchen die alsbald (386) zu besprechende **Armillarsphäre** eine Hauptrolle spielte, wurden dann anfänglich im Abendlande ebenfalls beibehalten, wenn auch mit dem Bestreben, die praktische Ausführung derselben etwas zu verbessern [d].

Zu 372: ***a.*** Die Chinesen hatten sich namentlich, vgl. „J. B. **Biot**, Etudes sur l'astronomie indienne et sur l'astronomie chinoise. Paris 1862 in 8.", schon frühe 28 am Umkreise des Himmels verteilte Sterne ausgewählt, deren Culminationszeiten sie, mutmasslich mit Hilfe von Wasseruhren, immer und immer wieder mit einander verglichen. Sie dienten ihnen als Fixpunkte, an welche sie sodann die übrigen Gestirne, namentlich auch die Wandelsterne, anschlossen, und so z. B. die Umlaufszeiten der letztern ableiteten. — ***b.*** So suchte z. B. **Eudoxus** die Sterne im Wendekreise des Krebses dadurch zu erhalten, dass er, vgl. „**Ideler**, Über Eudoxus (Berl. Abh. 1828 und 1830)", an dem Tage, wo ihm der kürzeste Schatten am Gnomone den Eintritt des Sommersolstitiums anzeigte, sich die Punkte des Horizontes anmerkte, in welchen die Sonne aufund unterging und dann Nachts beobachtete, welche Sterne an diesen Stellen den Horizont schnitten. Anderseits war seit **Autolykus** bekannt, dass derjenige Zwölftel der Ekliptik, in dessen Mitte die Sonne steht, jeweilen unsichtbar bleibt, und man hatte daher bloss von Monat zu Monat auf die Sterne zu achten, welche eine Stunde nach Untergang der Sonne in der Gegend standen, wo sie durch den Horizont gegangen war, um die Ekliptik im Groben in ihre zwölf Zeichen zu teilen, und so Anhaltspunkte für die Längen der Sterne zu erhalten, — nur wurden letztere, gegenüber der spätern Übung die Kardinalpunkte in den Anfang der Zeichen zu legen, um ein halbes Zeichen zu gross,

und so musste später **Hipparch** die durch seine Vorgänger bestimmten Längen um 15° vermindern, um sie den durch ihn selbst erhaltenen vergleichbar zu machen. — *c.* Aus dem Almagest geht bloss hervor, dass die Erstgenannten einzelne Sterne mit den Equinoktialpunkten verglichen, und von einer grössern Reihe von Sternen die Deklinationen bis auf Bruchteile von Graden bestimmten, — ob sie dafür bereits Armillen und überhaupt die von **Hipparch**, laut seinem Kommentar zu Aratus, benutzten Methoden anwandten, ist nicht sicher, wenn auch nicht unwahrscheinlich, nur würden sie in diesem Falle statt der ihnen noch nicht möglichen Rechnung sich durch Konstruktion auf dem Globus geholfen haben. — *d.* Der Hauptübelstand bei dieser Methode war, dass der raschen Veränderung der Rektascension des als Vermittler zwischen Sonne und Stern dienenden Mondes kaum genügend Rechnung getragen werden konnte, und so zog man diesem später Venus oder Jupiter vor, welche bei besonders günstigen Konstellationen mit scharfen Augen zuweilen neben der Sonne gesehen werden konnten: Eine Tagesbeobachtung der Venus wurde (453) spätestens 1489 III 7 in Nürnberg, eine ebensolche Jupiters (vgl. Mitth. 44 von 1877) 1585 I 24 in Kassel gemacht. — Von dem durch **Ptolemäus** konstruierten Instrumente zur direkten Bestimmung der Längen und Breiten der Sterne wird später (386) gesprochen werden.

373. Die Methoden von Tycho und Landgraf Wilhelm. — Da Landgraf **Wilhelm**, und bald darauf auch **Tycho**, mit Recht fanden, dass die Bestimmung der Sterncoordinaten mittelst der Armillarsphäre etwas strengeren Anforderungen nicht genüge, so gingen sie dafür in etwas anderer Weise vor, und zwar berechnete **Tycho** die Deklinationen der Gestirne unter Voraussetzung der Polhöhe aus den mit dem Azimutalquadranten (349) bestimmten Höhen und Azimuten derselben, ihre Rektascensionsunterschiede aber aus diesen Deklinationen und den mit einem Quadranten (346) gemessenen scheinbaren Distanzen [a], — während **Wilhelm** die Deklinationen vorzugsweise mittelst der Polhöhe aus den Culminationshöhen und die Rektascensionsunterschiede aus den Culminationszeiten ableitete, nur zur Kontrole ähnliche Verfahren wie Tycho benutzend [b]. Eine **erste** Rektascension wurde von diesen beiden Astronomen wie früher aus der Deklination der Sonne berechnet [c], — zum Übertrage auf die Sterne von **Tycho** ebenfalls wie früher zunächst der Mond, von **Wilhelm** zum Teil auch die Uhr benutzt, — und es entstanden so schliesslich zwei nahe gleichwertige Sternverzeichnisse, welche sich in schönster Weise kontrolierten [d].

Zu 373: *a.* **Tycho** leitete, unter möglichster Berücksichtigung der Refraktion (453), nach seiner wegen Mangel von Schlussformeln und Logarithmen sehr mühsamen aber korrekten Methode, vorerst aus siebenjährigen, mit Hilfe von **Longomontan** erhaltenen Beobachtungen, die Positionen von α Arietis und 20 andern Fundamentalsternen mit möglichster Schärfe ab, und schloss dann an diese die übrigen Fixsterne, sowie auch die Wandelsterne an. Er erhielt so ausser dem noch unten (d) zu beschreibenden Sternkataloge das kostbare Material, aus welchem die genauere Kenntnis der Mondbahn und der Bewegung

ihrer Knoten hervorging und auf welches sich später **Kepler** bei den Untersuchungen (266) stützte, die ihm für alle Zeiten den vornehmsten Platz unter den Reformatoren der Sternkunde gesichert haben. — *b.* Die Deklinationen leitete **Wilhelm** meistens aus Meridianhöhen, zuweilen jedoch auch aus Höhen in bestimmten Azimuten ab, dabei ebenfalls die Refraktion berücksichtigend. Um Rektascensionen zu erhalten, wurde 1) diejenige der Sonne unter Voraussetzung von $e = 23^{0}\ 31'\ 30''$ aus ihrer Deklination berechnet, — sodann 2) entweder die Culmination eines andern Gestirnes abgewartet und an der Uhr der Rektascensionsunterschied unmittelbar abgelesen, oder es wurden, um sich nicht für längere Zeit auf die Uhr verlassen zu müssen, Abends vor Sonnenuntergang in bestimmten Azimuten und unter Notierung der Zeit die Höhen von Sonne und Venus (Jupiter) gemessen, daraus Deklination und Stundenwinkel von Venus (Jupiter), sowie unter Berücksichtigung der Zeitunterschiede der gleichzeitige Stundenwinkel der Sonne bestimmt, und so ihr Rektascensionsunterschied, also auch die Rektascension von Venus (Jupiter) erhalten, — hierauf 3) nach Sonnenuntergang, mit Hilfe des von **Bürgi** eigens zu diesem Zwecke konstruierten stählernen Kreissectors von vier Fuss Radius, die Winkeldistanz von Venus (Jupiter) von dem als Ausgangspunkt gewählten Sterne αTauri gemessen, daraus die Rektascensionsdifferenz berechnet, und somit auch die Rektascension des Fundamentalsternes erhalten, — endlich 4) an letztern auf entsprechende Weise auch andere Sterne angebunden. Für weitern Detail auf Mitth. 45 verweisend, füge ich einerseits noch bei, dass **Wilhelm** 1586 IV 14 (vgl. Epist. 23) an Tycho schrieb, dass er seine Hauptsterne nicht nur „per distantiam inter se et latitudinum meridianam“ observieren, sondern auch deren Culmination an dem „Minuten und Secunden Uhrlein“ notieren lasse, welches „gar gewisse stunden“ gebe, und „a meridie in meridiem offtmals nicht eine minuten“ variiere, — und hebe anderseits hervor, dass es überhaupt keinem Zweifel unterliegt, es sei für diese hessischen Beobachtungen die **Zeit als eigentliches Beobachtungselement** benutzt, also die **Uhr zum astronomischen Instrumente** erhoben worden, während letztere früher höchstens dazu gedient hatte, die Epoche einer Beobachtung angenähert festzulegen. Dass dies mit Erfolg geschehen konnte, war wesentlich das Verdienst von **Bürgi**, der nach den Begriffen der damaligen Zeit vorzügliche Uhren zu konstruieren wusste, mag er nun (123) das Pendel in dieselben eingeführt haben oder nicht. — *c.* Da **Wilhelm** nach damaliger Übung für die Sonnenparallaxe den Hipparchschen Wert von 3′ acceptierte und seine Sonnenhöhen diesem entsprechend korrigieren liess, so erhielt er natürlich zu grosse Deklinationen und damit auch zu grosse Werte für die Rektascensionen und Längen der Sterne, und in der That erzeigen sich seine sämtlichen absoluten Längen gegenüber den Tychonischen um circa 6′ zu gross, während die Differenzen trotz der verschiedenen Methode ganz befriedigend übereinstimmen. — *d.* Was die Ergebnisse der hessischen Beobachtungen anbetrifft, so hatte **Wilhelm** selbst 1567 einen Katalog von 58 Sternen vollendet, während derjenige, welchen **Rothmann** 1586 unter Zuzug der von ihm und **Bürgi** erhaltenen Beobachtungen zusammenstellte, bereits 121 Sterne umfasste, der begonnene (mir seinerzeit nebst jenen vorliegende) Hauptkatalog aber, welcher für 1032 Sterne angelegt wurde, noch viele Lücken zeigt und nur für 346 Sterne vollständige Positionen giebt. Bedeutend vollständiger muss ein anderes Manuskript gewesen sein, von welchem 1760 die französischen Offiziere während der Besetzung von Kassel auf Wunsch von **Lacaille** für die Pariser Akademie eine Kopie anfertigten; denn es wird (Hist.

de l'Acad. 1761) ausdrücklich gesagt, dass dasselbe nicht nur die Beschreibung der Instrumente und der Methode, sondern auch die Beobachtungen und die Positionen von mehr als 900 Sternen enthalte. Leider unterblieb infolge des frühen Todes von Lacaille die von diesem beabsichtigte Drucklegung der Kopie, und da die früher von **Snellius** besorgten „Coeli et Siderum in eo errantium Observationes Hassiacæ. Lugduni Batav. 1618 in 4." sonderbarerweise diese Hauptarbeit der Kasseler Beobachter gar nicht beschlagen, so kannte man letztere vor meiner betreffenden Note in Mitth. 45 nur insoweit, als sie durch Albert **Curtius** (München 1600? — ebenda 1671; Jesuit und Rektor der Kollegien in Eichstädt, Luzern, etc.) unter dem durch Buchstabenversetzung in „Lucius Barettus" umgewandelten Namen in einem Anhange zu seiner „Historia coelestis, ex libris commentariis manuscriptis observationum vicennalium viri generosi Tichonis Brahe Dani. Augusta Vind. 1666 in fol. (mit versch. Titelblättern auch Viennæ 1668, Ratisbonæ 1672, Dilingæ 1675, etc., ausgegeben)" veröffentlicht hat. Diese letztere Schrift ist, entsprechend dem Titel, obschon sie auch noch einige ältere Reihen umfasst, zunächst den Beobachtungen von **Tycho** gewidmet, welche sie ziemlich vollständig giebt, jedoch nicht ohne vielfache Ungenauigkeiten, so dass man gut thut, bei Benutzung jeweilen auch die von Tycho selbst in seinen „Progymnasmata" für 1600 gegebenen zwei Kataloge zu vergleichen, von welchen der erstere die Längen und Breiten von 773 Sternen, der zweite die Rektascensionen und Deklinationen einer Auswahl von 100 Sternen giebt. — Ich füge noch bei, dass **Bessel** dafür hielt, es seien die Kataloge von **Wilhelm** und **Tycho** so ziemlich gleichwertig, und es dürften wohl die bestehenden Unterschiede durch Neuberechnung grösstenteils verschwinden.

374. Die neuern Methoden. — Zur Zeit von Landgraf **Wilhelm** war es noch etwas gewagt, die Uhrzeit als bestimmendes Element einzuführen, und so glaubten manche an der Brauchbarkeit seiner Methode zweifeln, somit entweder derjenigen von **Tycho** trotz ihrer Weitschweifigkeit den Vorzug geben oder nach andern Verfahren suchen zu sollen; seit aber die Uhren zuverlässiger geworden und zugleich für Meridianbeobachtungen (376—382) immer leistungsfähigere Instrumente entstanden sind, hat sich das Blatt gewendet, so dass die Methode von **Wilhelm** gegenwärtig für Fundamentalbestimmungen fast ausschliesslich im Gebrauche ist. Immerhin verdient namentlich die gegen Ende des 17. Jahrhunderts durch **Picard** und **Flamsteed** proponierte „Methode der korrespondierenden Deklinationen" noch besonderer Erwähnung [a].

Zu 374: *a.* Die schon von **Picard** ausgedachte, dann namentlich aber durch **Flamsteed** bei Anlage seines Sternkataloges praktizierte neue Methode beruht darauf, dass die Deklination der Sonne wegen der für sie (197) bestehenden Formel $\text{Tg}\, d = \text{Tg}\, e \cdot \text{Si}\, a$ bei $a = 90^0 - \beta$ und $a = 90^0 + \beta$ gleiche Werte annimmt, und somit auch umgekehrt gleichen Deklinationen der Sonne vor und nach dem Solstitium Rektascensionen dieses Gestirnes entsprechen, welche sich gleich viel von 90^0 entfernen. Bezeichnet man daher die, solchen korrespondierenden Deklinationen entsprechenden Rektascensionen der Sonne mit S' und S'', die Rektascension eines Sternes aber mit x, so hat man einer-

seits $^1/_2$ (S' + S'') = 90°, und kann anderseits durch Beobachtung der Culminationszeiten S' — x = a' und S'' — x = a'' bestimmen, woraus sich

$$x = 90^0 - {}^1/_2 (a' + a'') \qquad S' = 90^0 + {}^1/_2 (a' - a'') \qquad S'' = 90^0 - {}^1/_2 (a' - a'') \qquad 1$$

findet, so dass sich die Rektascensionen von Sonne und Stern ergeben, ohne die Schiefe der Ekliptik in Mitleidenschaft ziehen zu müssen; dagegen muss man allerdings, um präcise Resultate zu erhalten, der Präcession Rechnung tragen, und hat in der Regel die zweite Bestimmung aus mehrtägigen Beobachtungen durch Interpolation künstlich zu erstellen.

375. Bestimmung der Schiefe der Ekliptik und ihrer sekulären Variation. — Über die Bestimmung der Schiefe der Ekliptik bleibt nach dem früher (191 und 198) Gesagten nur wenig beizufügen [a]; dagegen mag das über ihre sekuläre Variation Mitgeteilte hier teils durch weitere Daten, teils durch eine betreffende Rechnung noch etwas näher illustriert werden [b].

Zu 375: ***a.*** Bezeichnet x = 90° — a die Entfernung der Sonne vom Solstitium, so geht die Formel 198 : 2 in

$$Tg\,\varepsilon = \alpha \cdot Tg\,d \quad \text{wo} \quad \alpha = Se\,x \quad \text{oder} \quad Tg^2\,{}^1/_2\,x = (\alpha - 1) : (\alpha + 1) \qquad 1$$

über, und man erhält daher nach 40 : 21, 22

$$\varepsilon = d + \frac{1}{Si\,1''}\left[Tg^2\frac{x}{2}\cdot Si\,2\,d + \frac{1}{2}\,Tg^4\frac{x}{2}\cdot Si\,4\,d + \ldots\right] \qquad 2$$

so dass man aus jeder in der Nähe der Solstitien gemessenen Deklination der Sonne, wenn deren Rektascension auch nur angenähert bekannt ist, einen guten Wert für die Schiefe der Ekliptik ableiten kann. — ***b.*** In dem von **Houzeau** in seinem „Vademecum (14 : w)" gegebenen Verzeichnisse finden sich unter anderm folgende 16 Bestimmungen für die Schiefe der Ekliptik:

Nro.	Jahr n	Beobachter	ε	t = n — 1500	Δε = ε — 23° 30'	Δε'
1	— 1100	Tcheon-Kong	23° 54' 2"	— 2600	1442"	1429"
2	— 229	Eratosthenes	45 7	— 1729	907	925
3	173	China	41 33	— 1327	693	705
4	461	Tsou-Kong	38 52	— 1039	532	550
5	891	Albategnius	23 35 41	— 609	341	328
6	1000	Ibn Junis	34 26	— 500	266	273
7	1230	Aboul Hhassan	33 45	— 270	225	160
8	1460	Regiomontan	30 49	— 40	49	46
9	1587	Tycho	23 29 46	87	— 14	— 15
10	1655	D. Cassini	29 15	155	— 45	— 46
11	1689	Flamsteed	28 56	189	— 64	— 63
12	1709	Römer	28 47	209	— 73	— 72
13	1750	Bradley	23 28 15	250	— 105	— 92
14	1798	Piazzi	27 55	298	— 125	— 114
15	1835	Airy	27 39	335	— 141	— 131
16	1870	Bakhuijzen	27 22	370	— 158	— 148

Das Jahr 1500 als Epoche wählend, setzte ich nun die ihm entsprechende Schiefe gleich $23^0\ 30' + a$, berechnete die $t = n - 1500$ und $\Delta\varepsilon = \varepsilon - 23^0\ 30'$, schrieb nun für alle 16 Paare von Werten die Gleichung

$$\Delta\varepsilon = a + b \cdot t + c \cdot t^2 \qquad 3$$

auf, und erhielt sodann nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$a = 26'',755 \qquad b = -0'',48060 \qquad c = 0,0000\,22528$$

sowie mit diesen Werten nach 3 rückwärts die in die Tafel eingetragenen $\Delta\varepsilon'$, deren mittlere Differenz von den $\Delta\varepsilon$ nur auf $\pm 19'',2$, ja bei Ausschluss der etwas unsichern Nro. 7 sogar nur auf $\pm 10'',6$ ansteigt, womit man in Betracht der zum Teil etwas rohen Werte von ε sehr zufrieden sein, ja die Schlussformel

$$\varepsilon = 23^0\ 30'\ 26'',755 - 0'',48060 \cdot t + 0'',0000\,22528 \cdot t^2 \qquad 4$$

als ziemlich wertvoll bezeichnen kann. Für die Epochen 1750 und 1800 oder für $t = 250 + t' = 300 + t''$ ergiebt sie

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= 23^0\ 28'\ 28'',00 - 0'',46934 \cdot t' + 0'',0000\,22528 \cdot t'^2 \\ \varepsilon'' &= 23\ \ 28\ \ 14\ ,58 - 0\ ,46708 \cdot t'' + 0\ ,0000\,22528 \cdot t''^2 \end{aligned} \qquad 5$$

und wenn nun auch die in 609 für diese Epochen nach **Bessel** und **Struve-Peters** gegebenen neuen Formeln für Bestimmungen in der Nähe derselben weit vorzüglicher als die meinige sein mögen, so stellt diese dagegen den ganzen Charakter der Variabilität von ε genauer dar, indem sie darauf hinweist, dass die gegenwärtige Abnahme später wieder in Zunahme übergehen wird, ja das zu erwartende Minimum annähernd zu bestimmen erlaubt. Da nämlich aus 4

$$d\varepsilon : dt = -0,48060 + 0,0000\,45056 \cdot t, \quad d^2\varepsilon : dt^2 = 0,0000\,45056 \qquad 6$$

folgt, so hätte ein solches Minimum für $t = 10666$ oder etwa im 122. Jahrhundert n. Chr. einzutreffen und würde noch $22^0\ 48'$ betragen, was dem (191) von **Lagrange** (allerdings schon für das Jahr 6000) erhaltenen Minimalwerte $22^0\ 54'$ unerwartet nahe kömmt.

376. Mauerquadrant, Mauerkreis und Mittagsrohr. — Dass Beobachtungen der Gestirne zur Zeit ihrer Culmination für viele Zwecke besonders vorteilhaft, und somit Quadranten oder Vollkreise, welche an einer in die Mittagsfläche fallenden Mauer festliegen, sehr nützlich sein dürften, wurde schon durch **Ptolemäus** erkannt [a], — namentlich aber konstruierten **Abul Wefa, Nassir-Eddin,** etc., vielfach Instrumente dieser Art [b], und auch in die Sternwarten der **Wilhelm** und **Tycho** fanden dieselben alsbald Eingang [c]. Als sodann **Picard** die Diopter mit Fernröhren vertauschte, ergaben sich in der That auf diese Weise ganz brauchbare Culminationshöhen, während die Culminationszeiten wegen der kurzen Drehaxe des Visiermittels nicht mit entsprechender Genauigkeit erhältlich waren, und dies veranlasste nun **Römer**, den **Mauerkreisen** ein speciell zu Zeitbestimmungen taugliches Instrument, das sog. **Mittagsrohr** (Passageninstrument), zu coordinieren, bei welchem sich das Fernrohr um eine lange und beidseitig gestützte Horizontalaxe drehte [d]. Diese beiden Instrumente wurden nunmehr unter Verwendung zweier Beobachter bei anderthalb Jahrhunderte mit bestem Erfolge neben

einander benutzt, zumal die fortwährenden Fortschritte der Präcisionsmechanik dieselben immer vollkommener auszuführen erlaubten [e].

Zu 376: *a.* Im Almagest (éd. Halma I 48) wird nämlich ein, zunächst zur Bestimmung des Abstandes der Wendekreise dienender, in 90 Grade und deren Sechstel geteilter und in die Ebene des Meridianes gestellter Quadrant beschrieben, an welchem der Schattenwurf eines im Centrum angebrachten horizontalen Cylinderchens beobachtet wurde. — *b.* Nach Sédillot (Mémoire von 1841 in 5, pag. 195) beschrieb **Abul Wefa** die Konstruktion seines Meridianinstrumentes wie folgt: „Man befestigt in der Ebene des Meridianes einen ganzen Kreis, der in 360 gleiche Teile und jeder derselben in möglichst viele Unterabteilungen geteilt ist, und bringt in zwei diametral entgegengesetzten Punkten zwei bewegliche Absehen an, sei es auf einer am Centrum des Kreises befestigten Alidade, sei es auf einem zweiten Kreise, der in den ersten eingelassen ist und sich um dessen Centrum dreht; bewegt man sodann die beiden Absehen am Limbus des Kreises, bis der Sonnenstrahl gleichzeitig durch die Öffnungen beider geht, so giebt die Anzahl der Grade oder Teile, welche zwischen dem Index des obern Absehens und dem horizontalen Durchmesser des Kreises enthalten ist, die Meridianhöhe der Sonne“. — Ebenso liess nach Jourdain (Mémoire von 1810 in 5) **Nassir-Eddin** einen kupfernen Quadranten von fünf hakemitischen Ellen (etwa $3^1/_2$ m) Radius bauen, der in Grade und einzelne Minuten geteilt war, eine um einen stählernen Zapfen drehbare Alidade mit Dioptern besass, auf eine Unterlage aus Sadjeh (eine Art Ebenholz) geschraubt und mit dieser an einer im Meridiane errichteten Mauer so befestigt war, dass „die Linie durch den Mittelpunkt und das südliche Ende des Quadranten“ das Zenit traf. — *c.* Da **Bürgi** (vgl. Observ. hass. p. 109—13) von 1588—96 die Sonnen-Culminationen nach Zeit und Höhe beobachtete, so ist es wohl sicher, dass er sich ebenfalls ein Meridianinstrument konstruiert hatte, jedoch weiss man nichts Näheres darüber; dagegen besitzt man von **Tycho** (vgl. dessen „Astronomiæ instauratæ mechanica. Noribergæ 1602 in fol.“) die Beschreibung eines „Quadrans muralis sive tichonicus“, der mittelst Transversalen Sechstelsminuten abzulesen erlaubte, und es darf kaum als Zufall angesehen werden, dass dieser Quadrant dieselben Dimensionen wie derjenige von Meragah besass, wenn auch der Besitzer infolge der ihm angebornen Bescheidenheit vergass, **Nassir-Eddin** zu nennen. Auch der Zeitgenosse Thaddäus Hagek oder **Hageccius** (Prag 1525 — ebenda 1600; Prof. math. Prag und k. Leibarzt) soll die Aufstellung von Meridianinstrumenten empfohlen haben, ohne dass jedoch näherer Detail bekannt zu sein scheint. — *d.* Die fünf Fuss lange Axe, welche **Römer** 1689 seinem Mittagsrohr gab, equilibrierte er durch ein Gewicht, welches an einem Seile hing, das um eine an der Zimmerdecke befestigte Rolle geschlungen war; an dem einen Ende trug diese Axe das Fernrohr, am andern einen Arm mit Index, der auf einem eingeteilten Bogen gleitete, welcher an dem einen Pfeiler befestigt war (vgl. Bas. astr. § 368 und Tab. III). — *e.* Für die Konstruktion grosser Mauerquadranten und Mauerkreise waren namentlich die **Bird**, **Ramsden** und **Troughton** berühmt; so z. B. konstruierte erstgenannter 1775 einen $7^1/_2$-füssigen Mauerquadranten für die Sternwarte der Kriegsschule in Paris, der so vorgerichtet war, dass er auf der „face occidentale du mur“ zur Beobachtung der Sterne zwischen Zenit und Pol, auf der „face orientale“ dagegen zur Beobachtung der Sterne zwischen Zenit und Equator dienen konnte: „Une machine très-commode pour transporter le quart de cercle de l'occident à l'orient fait qu'on le vérifie aisé-

ment, et qu'il équivaut à deux quarts de cercle muraux". — Bei einem Passageninstrumente, das **Bird** 1750 für Greenwich konstruierte, stand der 8-füssige Tubus an der Mitte der Axe und der Einstellungsbogen war zu einem Halbkreise geworden; **Ramsden** ersetzte die Beleuchtung mittelst Vorsteckspiegel durch die jetzt noch gebräuchliche Beleuchtung durch die Axe, erzielte die Equilibrierung dieser letztern durch Hebel, deren Stützpunkte sich auf den Pfeilern befanden, — und gab einen Apparat bei, der auf drei Füssen unter dieselbe gestellt werden konnte, um das Instrument aus den Lagern heben und umwenden zu können; **Troughton** brachte zum Einstellen Vollkreise an, die sich mit der Axe drehten, während der Index am Pfeiler sass; **Reichenbach** erfand die Einstellungs-Libelle, indem **Gauss** (Gött. g. A. 1819) bei Anlass des von ihm für Göttingen erhaltenen Passageninstrumentes sagt: „Das Stellen des Fernrohrs für jede vorgeschriebene Deklination geschieht mittelst eines kleinen am Fernrohr selbst nahe beim Okularende befestigten, unmittelbar in Viertelsgrade und durch den Vernier in Minuten geteilten Kreises, auf dem sich eine Alhidade mit einer kleinen Libelle befindet; der Index an der Alhidade gibt sofort die Deklination an"; etc.

377. Der Meridiankreis. — Den naheliegenden Gedanken, Mauerkreis und Passageninstrument zu Einem Instrumente, einem sog. **Meridiankreise,** zu vereinigen, und so Einen Beobachter zu einer vollständigen und sichern Durchgangsbeobachtung zu befähigen, hatte **Römer** schon vor Ablauf des 17. Jahrhunderts nicht nur gehabt, sondern bald darauf auch zur Ausführung gebracht [a]; jedoch gelang es erst im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts **Reichenbach** und **Repsold,** die konstruktiven Schwierigkeiten soweit zu überwinden, dass der Meridiankreis zum Hauptinstrumente der Sternwarten werden konnte [b]. Seither sind dann allerdings noch manche Verbesserungen in Beziehung auf die Equilibrierung, die Sicherheit des Umlegens in den Lagern, die Beleuchtung des Fadennetzes und der Ablesestellen, etc. angebracht worden, auf welche wir zum Teil noch unter den folgenden Nummern zurückzukommen haben werden [c].

Zu 377: *a.* Nachdem **Römer** etwa von 1692 hinweg mit einem ersten so kombinierten Instrumente, wie ein von ihm 1700 XII 15 an Leibnitz geschriebener Brief (vgl. Misc. Berol. III 276—78) zeigt, bereits gute Erfolge erzielt, aber auch manche Erfahrungen gesammelt hatte, stellte er 1704 seine berühmte **Rota meridiana** auf, welche (vgl. Bas. astron. § 366—400) eine bei 6 Fuss lange eiserne, hohle, doppelkegelförmige Horizontalaxe hatte, die an ihren Enden massive konische Zapfen besass, welche in kreisförmige Öffnungen messingener Scheiben passten; dabei sass die eine dieser Scheiben auf dem einen Pfeiler fest, während die auf dem andern Pfeiler befindliche durch Schrauben in jeder Richtung verstellbar war, so dass mittelst dieser Schrauben und einem an die Rota angelegten, mit einem Pferdehaar hergestellten Bleilote, die Justierung des Instrumentes ausgeführt werden konnte. Die am einen Ende der Axe sitzende, durch Speichen mit ihr verbundene Rota, d. h. der Vertikalkreis, hatte $5^1/_4$ Fuss Durchmesser, war von 10 zu 10 Minuten

geteilt, und die Ablesung geschah mittelst zweier, am benachbarten Pfeiler befestigter diametraler Mikroskope, in deren Okularglasfocus 11 Seidenfaden so gezogen waren, dass direkt 1' abgelesen und bis auf 5'' geschätzt werden konnte. Das 5 Fuss lange, auf der Axe liegende Fernrohr war mit dieser und der Rückseite des Kreises mittelst Blei zusammengelötet; das nicht verstellbare Fadenkreuz bestand aus 3 horizontalen und 5 vertikalen Seidenfaden, von welchen je der mittlere vom Kreuzungspunkte aus gleich abstehende Knoten hatte, welche als eine Art Mikrometer dienten; die Beleuchtung der Faden endlich geschah mittelst einer Laterne, welche auf die Mitte des Tubus aufgesetzt war, und deren Licht von einem vor das Objektivende gesteckten Metallspiegel reflektiert wurde. — *b.* Nachdem die Römer'sche Rota bei dem Brande von 1728 zu Grunde gegangen war, liess **Horrebow** wieder ein ähnliches Instrument bauen, welches sodann bis 1778 diente, wo **Bugge** dasselbe durch ein Passageninstrument nach englischem Muster ersetzte, und erst zu Anfang des laufenden Jahrhunderts wurde von **Repsold** für seine Privatsternwarte in Hamburg wieder ein eigentlicher Meridiankreis von 5' Durchmesser erbaut, mit welchem **Schumacher** schon 1804 beobachtete. Diesem ersten liess sodann **Repsold** etwa 1809 einen neuen 3½-füssigen Meridiankreis folgen, bei welchem die Zapfen der Axe aus Glockenmetall, ihre Lager aus Bergkrystall bestanden, und der 1818 nach etwelchem Umbau von **Gauss** für Göttingen angekauft wurde, sich jedoch nur als Mittagsrohr vollständig bewährte. — Wenig später begann, auf Anregung von **Bessel**, auch **Reichenbach** sich mit dem Baue solcher Instrumente zu beschäftigen, und wusste denselben in allen Teilen so zu vervollkommnen, dass der von ihm 1819 für Königsberg gelieferte dreifüssige Meridiankreis alle Erwartungen übertraf, ja veranlasste, dass sich nach und nach fast alle grössern Sternwarten des Kontinentes mit solchen „Reichenbach'schen Meridiankreisen" auszurüsten suchten. — Dass sowohl **Repsold** als **Reichenbach** bei ihren Konstruktionen nicht nur von den Fortschritten profitierten, welche die Präcisionsmechanik den **Ramsden**, **Cary**, etc. verdankte, sondern namentlich auch von den Ratschlägen, welche sie von den ausübenden Astronomen erhielten, darf ebensowenig vergessen werden, als dass letztere ohne die ihnen durch die Mechaniker gelieferten Mittel die sie auszeichnenden Leistungen kaum zu Stande gebracht hätten. — *c.* Dass weder die **Reichenbach** und **Repsold**, noch vollends die neuere Zeit, bei diesen ersten Erfolgen stehen blieben, ist selbstverständlich; so wurde z. B. die wünschbare Symmetrie durch Anbringen eines zweiten, zugleich zum Klemmen oder mittelst grober Teilung zum Einstellen dienenden Kreises bewirkt, — die das Umlegen erschwerende ältere Balancierung (376) durch eine mittelst Rollen von unten wirkende ersetzt, — für den „Beobachtungsstuhl" und den in einen Wagen umgeänderten „Umlegeapparat (376)" zwischen den Pfeilern eine kleine Eisenbahn gelegt, — die mikroskopische Ablesung allgemein eingeführt, — zur Beleuchtung von Faden und Ablesestellen das Glühlicht angewandt, — etc., wie dies zum Teil noch im folgenden näher zu besprechen sein wird.

378. Das Fadennetz und seine Beleuchtung. — Das Fadennetz des Meridiankreises weicht von dem gewöhnlichen Fadenkreuze insofern ab, dass der Horizontalfaden meistens durch zwei nahe Parallelfaden ersetzt ist, zwischen welche der Stern eingestellt wird, — dass sich ferner zu beiden Seiten des Vertikalfadens noch

Systeme equidistanter Faden oder Fadenbüschel vorfinden, um eine Durchgangsbeobachtung gewissermassen vervielfachen zu können, — und dass in der Regel auch, ähnlich wie beim Ablesemikroskope (340), messbar bewegliche Horizontal- und Vertikalfaden vorhanden sind, mit welchen die Lage irgend eines Punktes im Gesichtsfelde gegen das feste Netz bestimmt werden kann [a]. — Um das Fadennetz bei Nacht sichtbar zu machen, wird entweder von hinten oder von vorne etwas Licht auf dasselbe geworfen, wobei in ersterm Falle die Faden als dunkle Linien auf hellem Grunde, im zweiten als helle Linien auf dunkelm Grunde erscheinen [b]. — Wenn ein Stern der Deklination d bei seinem Durchgange durch einen in der Distanz $15 \cdot x$ vom Mittelfaden stehenden Seitenfaden beobachtet und zugleich in den Horizontalfaden eingestellt wird, folglich dem Momente der Beobachtung ein gewisser Stundenwinkel $s = 15 \cdot t$ entspricht, so ist die Uhrzeit der Beobachtung um t zu **vermindern,** die Kreisablesung aber, falls die Teilung vom Pol nach dem Zenit läuft, um eine gewisse Grösse Δz zu **vermehren,** und zwar hat man

$$\mathrm{Si}\,15t : \mathrm{Si}\,15x = 1 : \mathrm{Co}\,d \qquad \text{oder} \qquad t = x \cdot \mathrm{Se}\,d \qquad \mathbf{1}$$

$$\mathrm{Tg}(d + \Delta z) : \mathrm{Tg}\,d = 1 : \mathrm{Co}\,15t \qquad \Delta z = {}^1/_4\, s^2 \cdot \mathrm{Si}\,2d \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad \mathbf{2}$$

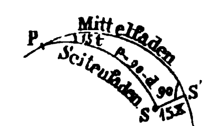
so dass die Reduktion auf den Meridian leicht ausgeführt werden kann [c].

Zu 378: *a.* Da schon **Römer** (vgl. 377 : a) fünf Vertikalfaden benutzte, so ist es unrichtig, Tob. **Mayer** oder sogar Nevil **Maskelyne** (London 1732 — Greenwich 1811; Astronomer royal) als den Ersten zu bezeichnen, der dies gethan habe; dagegen mag der Letztgenannte die Übung eingeführt haben, bei Durchgangsbeobachtungen die Zehntelsekunde abzuschätzen, und überdies erfand er 1772 den sog. „Okularschlitten", um das Okular zur Vermeidung des Einflusses der Fadenparallaxe (331) jeweilen über den Faden stellen zu können, an welchem der Durchgang bevorsteht. Später wurde die Anzahl der Vertikalfaden auf 7, ja bei Benutzung von Registrierapparaten (159) sogar auf $1 + 4 \times 3 = 13$ oder $1 + 4 \times 5 = 21$ erhöht. Den, namentlich für Beobachtung von schwachen Sternen vorteilhaften Gebrauch, den Horizontalfaden durch zwei Parallelfaden zu ersetzen, habe ich zuerst in einem Briefe von Eug. **Bouvard** an Gautier von 1835 VI 8 (vgl. Notiz 387) erwähnt gefunden. — *b.* Dem in 331 über die Fadenbeleuchtung beigebrachten ist noch beizufügen, dass ein zur Zeit von amerikanischen Astronomen gemachter Versuch, die Spinnefaden durch feine Platindrähte zu ersetzen und diese durch einen galvanischen Strom glühend zu machen, sich nicht bewährte, und ebenso die in den Noten „K. **v. Littrow,** Über lichte Fäden im dunkeln Felde bei Meridian-Instrumenten (Wien. Sitz. 20 von 1856), und: Augustin **Reslhuber** (Garsten bei Steyer 1808 — Kremsmünster 1875; erst Dir. Obs., dann Abt von Kremsmünster), Über Prof. Stampfer's Lichtpunkt-Mikrometer (l. c.)" besprochenen originellen Vorschläge meines Wissens nicht in weitern Gebrauch übergingen. Ferner ist zu erinnern, dass **Bruhns** und **Engelmann** (vgl. A. N. 1505 von 1864) fanden, dass man unter Anwendung eines roten Blendglases bei einer die Faden noch

deutlich zeigenden Feldbeleuchtung fast ebensoviele Sterne wie im dunkeln Felde sehe. Endlich ist für gewisse, sich bei seitlicher Feldbeleuchtung ergebende Anomalien auf 382 zu verweisen. — *c.* Die zur Reduktion der Beobachtungen an Seitenfaden notwendige Kenntnis der Fadendistanzen f kann, wie schon **Gauss** in seiner Note „Neue Methode die gegenseitigen Abstände der Fäden in Meridian-Fernröhren zu bestimmen (A. N. 43 von 1823)" auseinandersetzte, unter Benutzung des von **Lambert** (166) ausgesprochenen Principes, durch direkte Messung mit einem dem Objektive gegenübergestellten Theodoliten erhalten werden; aber immerhin ist, wenn, um die beiden Fernrohraxen zur Coincidenz zu bringen, denselben die Neigung h gegeben werden muss, die gefundene Differenz F der Horizontalablesungen wegen

$$\text{Co}\,f = \text{Si}^2 h + \text{Co}^2 h \cdot \text{Co}\,F \quad \text{oder} \quad \text{Si}\,{}^1/_2\,f = \text{Si}\,{}^1/_2\,F \cdot \text{Co}\,h \quad \text{oder} \quad f \fallingdotseq F \cdot \text{Co}\,h \quad \text{zu}$$

noch einer kleinen Reduktion zu unterwerfen. Meistens wird übrigens die Fadendistanz f = 15 x auf astronomischem Wege bestimmt, indem man die Zeit t beobachtet, welche (vgl. übrigens 382) ein polarer Stern der Deklination d braucht, um sie zurückzulegen, und alsdann ihren Wert nach der aus beistehender Figur unmittelbar hervorgehenden 1 berechnet. So z. B. erhielt ich 1854 X 1 an den 7 annähernd equidistanten Faden des kurz zuvor aufgestellten Ertel'schen Meridiankreises in Bern bei Beobachtung von α Urs. min. (d = 88° 35'):



Faden	Uhrzeit	Kreisabl. a = 318° 45'	t	x	x'	
	h m s	"	s	s	s	
I	0 27 0	— 34,2	2222	56,615	56,612	
II	39 36	4,0	1466	37,445	37,474	s 112,715
III	52 2	33,8	720	18,417	18,629	
IV	1 4 2	45,1				
V	16 15	40,6	— 733	— 18,749	— 18,802	
VI	28 50	21,8	— 1488	— 38,004	— 37,986	113,842
VII	41 29	— 12,0	— 2247	— 57,246	— 57,054	

und an demselben Tage für α Pisc. austr. (d' = — 30° 24'):

Faden	Uhrzeit	x' · Se d'	Korrig. Zeit	Zu α Urs. min.	
				△ z	a + △ z
	h m s	s	s	"	° ' "
I	22 45 39,8	65,6	45,4	68,9	318 45 34,7
II	46 1,7	43,4	45,1	30,0	34,0
III	23,3	21,6	44,9	7,2	41,0
IV	45,0		45,0		45,1
V	47 7,0	— 21,8	45,2	7,5	48,1
VI	29,0	— 44,0	45,0	30,9	52,7
VII	51,2	— 66,1	45,1	70,5	58,5
Mitt.	22 46 45,29	— 0,19	45,10		318 45 44,9

Aus den Vergleichungen der für α Urs. min. an den Seitenfaden und dem Mittelfaden erhaltenen Zeiten wurden nun die oben eingetragenen t gefunden,

aus diesen nach 2 die x berechnet, und letztern überdies die aus 10 solchen Durchgängen erhaltenen Mittelwerte x' beigeschrieben, welchen die sog. **Fadenkorrektion** im Equator

$$y = {}^1/_7\,(112{,}715 - 113{,}842) = -0^s{,}161$$

entspricht. Wird sodann ein anderer Stern der Deklination d' an allen n Faden beobachtet und bezeichnet $\Sigma\,T$ die Summe aller Uhrzeiten, $\Sigma\,f_0$ die Summe der östlichen, $\Sigma\,f_w$ aber die Summe der westlichen Fadendistanzen, so ist die wahrscheinlichste Durchgangszeit durch den Mittelfaden offenbar

$$T = {}^1/_n \cdot \Sigma\,T + {}^1/_n\,(\Sigma\,f_0 - \Sigma\,f_w)\ \mathrm{Se}\ d' = \text{Fadenmittel} + y \cdot \mathrm{Se}\ d' \qquad 4$$

so dass z. B. für obige Beobachtung von α Pisc. austr. $T = 22^h\ 46^m\ 45^s{,}29 - 0^s{,}19 = 22^h\ 46^m\ 45^s{,}10$ wird. Praktisch ist es jedoch vorteilhafter, wie es oben für α Pisc. austr. ebenfalls geschehen ist, die sämtlichen $x' \cdot \mathrm{Se}\,d'$ zu berechnen, damit die einzelnen Antrittszeiten auf den Mittelfaden zu reduzieren, und erst dann das Mittel zu nehmen, weil man sich alsdann durch Vergleichung dieses Mittels mit den einzelnen Bestimmungen über den Wert derselben belehren, ja aus den Differenzen v nach

$$\sqrt{\Sigma\,v^2 : (n-1)} = \pm\,0^s{,}16 \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\Sigma\,v^2 : n\,(n-1)} = \pm\,0^s{,}06 \qquad 5$$

den mittlern Fehler des einzelnen Antrittes und die Unsicherheit des Mittels erhalten kann, — überdies auch von dem Ausfallen einzelner Faden unbehelligt bleibt. — Macht man beim Durchgange an Seitenfaden auch Höheneinstellungen, wie es nach oben bei α Urs. min. der Fall war, so sind die entsprechenden Ablesungen ebenfalls zu korrigieren, da sie anstatt $PS = p$ nur $PS' = p'$ entsprechen, und

$$\mathrm{Tg}\,p' = \mathrm{Tg}\,p \cdot \mathrm{Co}\,s \qquad \text{oder nach } 40:22 \qquad p - p' = {}^1/_4\,s^2 \cdot \mathrm{Si}\,2p \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 6$$

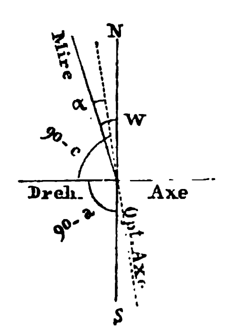
ist, somit sich unsere 2 ergiebt. Die nach dieser Formel erhaltenen Werte von $\triangle z$ und die korrigierten Ablesungen $a + \triangle z$ sind oben ebenfalls eingetragen, und letztere lassen darauf schliessen, dass der sog. Horizontalfaden eine kleine Neigung α besass, folglich jede Ablesung auch noch um $s \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Tg}\,\alpha$ korrigiert werden sollte. Wenn man sich jedoch die schon von Jacq. **Cassini** in seiner Schrift „De la grandeur et de la figure de la terre. Paris 1720 in 4. (Mém. Par. 1718)" gegebene Regel merkt, auf den Stern erst nahe an der Culmination oder dann jeweilen an symmetrischen Faden einzustellen, so wird diese Korrektion überflüssig. — Zum Schlusse mag noch auf das ebenfalls von **Cassini** (l. c.) hervorgehobene Paradoxon aufmerksam gemacht werden, dass ein zwischen Zenit und Equator culminierender Stern bei der Culmination tiefer zu stehen scheint als beim Durchgange durch die ersten Faden, indem in diesem Falle $\triangle z = p - p'$ positiv wird, also der Parallel des Sternes S den Meridian unterhalb S' schneidet.

—

379. Die Kollimatoren und der Nadirhorizont. — Die optische Axe des Fernrohrs wird in der Regel zu dessen Drehaxe nicht ganz genau senkrecht stehen, sondern z. B. mit dem Westende derselben einen Winkel 90° — c bilden oder einen sog. **Kollimationsfehler** c besitzen, und ebenso wird bei vertikaler Lage der optischen Axe der Index meistens nicht völlig mit dem Nullpunkte des Kreises coincidieren, sondern sich ein sog. **Indexfehler** zeigen. Um den ersten dieser beiden Fehler zu bestimmen und allfällig

durch Verschieben der Fadenplatte auf ein Minimum zu reduzieren, kann man sich der Nachtmire (166) oder eines polaren Sternes bedienen [a], — wohl auch des von **Bohnenberger** eingeführten, im Nadir aufzustellenden Quecksilberhorizontes, der zugleich für Ermittlung des zweiten Fehlers ein weit besseres Mittel darbietet, als man solches früher in Lot oder Libelle besass [b].

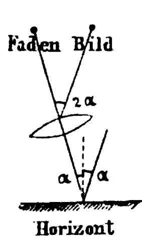
Zu 379: *a.* Das mutmasslich zuerst durch **Picard** eingeführte Verfahren, die Kollimation durch Umlegen zu bestimmen, ist schon in 350 besprochen worden, so dass hier nur übrig bleibt, noch speciell zu zeigen, wie bei Meridianinstrumenten die Nachtmire als **Kollimator** Verwendung finden kann: Liègt letztere z. B. um W von Nord gegen West, während das Westende der Drehaxe vom Südpunkte um 90° — a absteht, und findet man mikrometrisch den Abstand des Fadenkreuzes von der Mire vor dem Umlegen gleich α_1, nach dem Umlegen aber gleich α_2, so hat man offenbar die Beziehungen

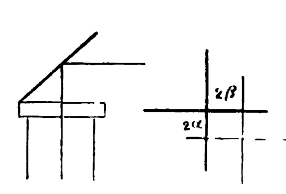


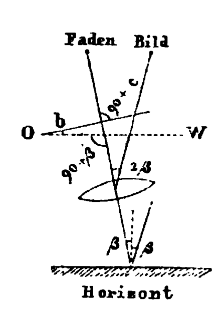
$$c = W - a - \alpha_1 \qquad \text{und} \qquad c = a + \alpha_2 - W$$

$$\text{also} \qquad c = \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad \mathbf{1}$$

so dass die Aufgabe in der That in einfachster Weise gelöst ist. Die analoge Lösung mit Hilfe eines polaren Sternes, bei welcher man der Unsicherheit über die Unbeweglichkeit der Mire oder Hilfslinse enthoben ist, wird unter der folgenden Nummer zur Anwendung kommen. — *b.* Der von **Bohnenberger** in seiner Abhandlung „Neue Methode den Indexfehler eines Höhenkreises zu bestimmen, und die Horizontalaxe eines Mittagsfernrohrs zu berichtigen ohne Loth oder Libelle (A. N. 89 von 1826)" empfohlene und sich sodann rasch einbürgernde **Nadirhorizont** besteht aus einem im Nadir des Instrumentes, isoliert vom Fussboden, aufgestellten Gefässe mit Quecksilber, und beruht auf folgendem Principe: Hat der einem im Brennpunkte des Objektives stehenden und beleuchteten Punkte (Faden) entsprechende Hauptstrahl eine Neigung α gegen die Vertikale, so entsteht durch die aus dem Objektive parallel austretenden, also nach Reflexion durch das Quecksilber auch parallel zu ihm zurückkehrenden Strahlen, neben ihm ein Bild desselben in der Distanz 2α. Entsprechend wird man, wenn man das Fadenkreuz des annähernd nach dem Nadir gerichteten Fernrohrs, z. B. durch ein vor dem Okulare aufgestecktes und durch eine Lampe Licht erhaltendes Glimmerblättchen, hinlänglich beleuchtet, auch ein Bild des Fadenkreuzes sehen, und mit den beweglichen Faden die Distanzen 2α und 2β messen können. Dabei wird α die der augenblicklichen Stellung des Fernrohrs entsprechende Abweichung vom Nadir, also in Verbindung mit der gleichzeitigen Ablesung am Vertikalkreise auch diesen selbst und damit den Indexfehler geben, — β dagegen, wenn b und c Neigung der Drehaxe und Kollimation der optischen Axe bezeichnen, die Relation







$$b + 90^{\circ} + c = 90^{\circ} + \beta \quad \text{oder} \quad \beta = b + c \qquad \mathbf{2}$$

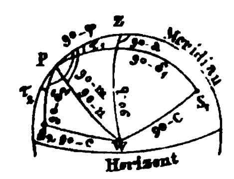
eingehen, aus welcher man, wenn b bereits mit dem Niveau bestimmt ist, die Kollimation c, oder, wenn letztere nach der frühern Methode schon gefunden wurde, die Neigung b finden, oder endlich für beide eine vortreffliche Kontrole erhalten kann. — Wird der Horizontalfaden durch einen Doppelfaden dargestellt, so ist es am besten, je das Bild des Einen Fadens mit dem Andern zusammenzubringen, und aus den diesen beiden Stellungen entsprechenden Ablesungen das Mittel zu nehmen, welches nun ohne weitere Korrektion dem Nadir entspricht. Ist kein Doppelfaden da, so stelle man den beweglichen Faden in die Nähe des Mittelfadens, — drehe das Fernrohr, bis letzterer in der Mitte zwischen dem beweglichen Faden und dessen Bild steht, — und lese ab. — Für die ältern Methoden, den Zenitpunkt zu bestimmen oder dessen Bestimmung zu umgehen, vgl. 346 u. f., sowie den 1809 von **Bessel** im Berl. Jahrb. für 1812 gemachten Vorschlag, den Abstand eines Sternes von seinem Bilde in einem künstlichen Horizonte zu messen, — für andern betreffenden Detail die folgende Nummer und die ihr angehängten Litteraturnachweise.

380. Der Einfluss der Aufstellungsfehler. — In früherer Zeit glaubte man, dass es hinlänglich sei, ein Instrument bei seiner Installation möglichst fehlerfrei aufzustellen [a], speciell bei einem Passageninstrumente oder Meridiankreise für ein und allemal die Drehaxe des Fernrohrs horizontal zu stellen und in die Richtung Ost-West zu bringen, sowie eine allfällige Kollimation der optischen Axe zu beseitigen, und erst um die Mitte des vorigen Jahrhunderts erkannte man, dass die kleinen, auch bei sorgfältigster Aufstellung übrigbleibenden Fehler von erheblichem Einflusse und überdies variabel sind [b]. Die von Tob. **Mayer** zur Bestimmung dieses Einflusses aufgestellte und nach ihm benannte Beziehung

$$T = t + \Delta t + {}^{1}/_{15}\,[a \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi \mp \delta) + b \cdot \mathrm{Co}\,(\varphi \mp \delta) \mp c] \cdot \mathrm{Se}\,\delta \qquad \mathbf{1}$$

in welcher T und δ Rektascension und Deklination des Sternes, t die Uhrzeit des Durchganges durch den Mittelfaden, Δt die Uhrkorrektion, φ die Polhöhe, a, b, c endlich Azimutal-, Niveau- und Kollimations-Fehler bezeichnen, und die untern Zeichen bei untern Culminationen (für welche T in $T \pm 12^h$ übergeht) anzuwenden sind, gehört zu den wichtigsten Formeln der praktischen Astronomie [c]. Für verschiedene Vorschläge Beobachtung oder Berechnung etwas anders anzuordnen, als es unsere Formel unmittelbar erfordert, sowie für Studien über systematische Veränderungen in den Instrumental-Korrektionen wird auf die unten folgenden Bemerkungen und die Speciallitteratur verwiesen [d].

Zu 380: *a.* Wilhelm **Meyer** Braunschweig 1853 geb.; früher Obs. Genf, jetzt Dir. Urania Berlin; sagte etwas drastisch, aber wahr: „Die Thätigkeit des gewissenhaften praktischen Astronomen ist ein endloser Kampf mit einer Schaar von Beobachtungs-, Instrumental- und Rechnungsfehlern, die wie das Ungeziefer seine besten Thaten verunreinigen". — *b.* Während der wenigstens nach damaligen Begriffen gut situierte, mit den nötigen Instrumenten und Gehilfen reichlich versehene und sich einer langen Thätigkeit erfreuende Jam. **Bradley** noch mehr zu der alten Schule gehörte, und zwar ein grosses, bald zu wenig (vgl. Delambre VI 426 f.) gewürdigtes, bald wohl auch etwas überschätztes und jedenfalls die nötigen Reduktionselemente nur dürftig in sich schliessendes Beobachtungsmaterial sammelte, aber dessen Bearbeitung gänzlich der Folgezeit überliess, gab sich der unter den ungünstigsten Verhältnissen arbeitende und seine Kräfte rasch aufzehrende Tob. **Mayer** alle erdenkliche Mühe, möglichst sichere Bestimmungen zu erhalten, und die von ihm 1756 der Göttinger Akademie vorgetragene Abhandlung „Observationes astronomicæ quadrante murali habitæ in observatorio gottingensi (Opera inedita. Vol. I Gottingæ 1775 in 4.)", in welcher die sofort näher zu besprechende Formel zum erstenmal kompariert, stellt ihn nach meiner Meinung als praktischen Astronomen mindestens in die Höhe seines englischen Zeitgenossen. — *c.* Haben a, b, c die frühere Bedeutung und bezeichnen m und n die den beiden erstern entsprechenden Abweichungen in Beziehung auf den Pol, sowie τ den Stundenwinkel unter welchem bei diesen Verhältnissen ein Stern S der Deklination δ zu culminieren scheint, so ergeben sich aus den Dreiecken PSW und PZW die Beziehungen



$$\begin{aligned} \text{Si}\, c &= \text{Si}\, n \cdot \text{Si}\, \delta + \text{Co}\, n \cdot \text{Co}\, \delta \cdot \text{Si}\,(\tau \pm m) \\ \text{Si}\, n &= \text{Si}\, b \cdot \text{Si}\, \varphi - \text{Co}\, b \cdot \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Si}\, a \\ \text{Si}\, b &= \text{Si}\, n \cdot \text{Si}\, \varphi + \text{Co}\, n \cdot \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Si}\, m \end{aligned} \qquad 2$$

während offenbar

$$T = t + \triangle t \mp {}^1\!/_{15}\, \tau \qquad 3$$

ist, wo sich je das untere Zeichen auf untere Culminationen bezieht. Da aber bei jedem irgend sorgfältig aufgestellten Instrumente a, b, c, also auch m, n, τ kleine Grössen sind, so lassen sich die 2 mit genügender Genauigkeit durch

$$\begin{aligned} c &= n \cdot \text{Si}\, \delta + (\tau \pm m) \cdot \text{Co}\, \delta & n &= b \cdot \text{Si}\, \varphi - a \cdot \text{Co}\, \varphi \\ b &= n \cdot \text{Si}\, \varphi + m \cdot \text{Co}\, \varphi \quad \text{oder} & m &= b \cdot \text{Co}\, \varphi + a \cdot \text{Si}\, \varphi \end{aligned} \qquad 4$$

ersetzen, und hiefür geht 3 in die mit 1 übereinstimmende Formel

$$\begin{aligned} T &= t + \triangle t + {}^1\!/_{15}\,(m \pm n \cdot \text{Tg}\, \delta \mp c \cdot \text{Se}\, \delta) \\ &= t + \triangle t + {}^1\!/_{15}\,[a \cdot \text{Si}\,(\varphi \mp \delta) + b \cdot \text{Co}\,(\varphi \mp \delta) \mp c] \cdot \text{Se}\, \delta \end{aligned} \qquad 5$$

über, deren erste, von **Bessel** häufig benutzte und daher auch wohl seinen Namen tragende Form in dem Falle, wo für eine längere Beobachtungsreihe dieselben Konstanten gelten, einigen Vorteil bietet, während die zweite Form die ursprünglich von Tob. **Mayer** gegebene und noch jetzt meistens gebrauchte ist. Manche Astronomen ziehen vor, c in entgegengesetztem Sinne zu zählen, um allen drei Korrektionsgliedern gleiches Zeichen zu verschaffen, — wieder andere ersetzen das Doppelzeichen durch die Regel, dass man für untere Culminationen die Deklination durch ihr Supplement zu ersetzen habe, — etc. — Hat man nach dem vorhergehenden (379) b und c bestimmt, so kann man nach den entsprechenden Gliedern von 5 die Uhrzeit t für dieselben korri-

gieren und so dafür einen verbesserten Wert t′ erhalten, so dass sich alsdann für zwei beobachtete Sterne die Beziehungen

$$T_1 = t_1' + {}^1/_{15}\, a \cdot Si(\varphi - \delta_1)\, Se\, \delta_1 + \triangle t \qquad T_2 = t_2' + {}^1/_{15}\, a\, Si(\varphi - \delta_2)\, Se\, \delta_2 + \triangle t \quad 6$$

ergeben, aus welchen durch Elimination von $\triangle t$

$$a = 15 \cdot \frac{T_1 - T_2 - (t_1' - t_2')}{Co\,\varphi \cdot Si\,(\delta_2 - \delta_1)}\, Co\, \delta_1 \cdot Co\, \delta_2 \qquad 7$$

folgt, somit a und alsdann nach 6 auch $\triangle t$ gefunden werden kann, aber zugleich hervorgeht, dass es zur sichern Bestimmung von a notwendig ist, einen polaren mit einem equatorealen Stern zu verbinden. Diese Methode für Bestimmung von a nach **Delambre** zu benennen, ist ein Unfug, da ihm höchstens das Verdienst zukömmt, das Mayer'sche Verfahren in die Praxis der französischen Astronomen eingeführt zu haben. — Noch ist nachzutragen, dass es zur leichtern Handhabung der vorstehenden Rechnungen ratsam ist, sich für die betreffende Breite eine Tafel der Mayer'schen Koefficienten zu berechnen, wie eine solche unter X° für $\varphi = 47^0\, 22'\, 40''$ gegeben ist. Ferner bleibt darauf aufmerksam zu machen, dass für genauere Operationen die den Tafeln entnommene Rektascension je noch um das Betreffnis der täglichen Aberration zu vermehren ist, welches (611) für die Culmination gleich $\pm\, 0'',3113 \cdot Co\,\varphi \cdot Se\,\delta$ (für Zürich gleich $\pm\, 0'',2108 \cdot Se\,\delta = \pm\, 0^s,014 \cdot Se\,\delta$) gesetzt werden kann, wo das obere und untere Zeichen der obern und untern Culmination entspricht; es geschieht dies am einfachsten, indem man die Kollimation um die Aberrationskonstante (also für Zürich um $0'',211 = 0^s,014$) vermehrt. Endlich ist für die Reduktion der Durchgangsbeobachtungen von Wandelsternen auf 435 zu verweisen. — *d.* Die gewöhnliche Anordnung der Beobachtungen für eine Zeitbestimmung besteht darin, dass man mindestens zwei Paare equatorealer Sterne auswählt, von welchen das eine vor, das andere nach einem polaren Sterne culminiert, — dann den Durchgang des ersten Paares an sämtlichen und denjenigen des Polsternes an den ersten Faden notiert, — hierauf das Instrument rasch umlegt und nun den Polstern an den übrigen (eigentlich an denselben), sowie das andere Paar wieder an allen Faden beobachtet, — und überdies Sorge trägt, in hiedurch nicht in Anspruch genommenen Momenten, sowohl vor als nach dem Umlegen, Mire und Horizont, sowie zur Kontrole die Axenlibelle abzulesen; hat man sodann in der (378, 379 und oben) angegebenen Weise die Fadenreduktionen und Konstantenbestimmungen ausgeführt, so werden nach 1 oder 5 die aus den einzelnen equatorealen Sternen folgenden Uhrkorrektionen ermittelt, dieselben mit Hilfe des Uhrganges auf einen mittlern Moment reduziert und endlich daraus das Mittel genommen. — Als Beispiel einer der vorgeschlagenen Modifikationen führe ich diejenige an, welche schon 1863 **Chauvenet** (vgl. dessen Manual II 174/5) andeutete, sodann A. **Nobile,** veranlasst durch Zweifel über die Gleichheit der persönlichen Gleichung (382) für equatoreale und polare Sterne, in seiner Note „Sur la possibilité d'éviter les étoiles circompolaires dans les déterminations du temps local (A. N. 2285 von 1879)" weiter ausführte, und die sich bei vergleichenden Bestimmungen, welche A. **Wolfer** 1880 in Zürich ausführte, ganz gut bewährte. Sie beruht darauf, dass, wenn man Sternenpaare wählt, welche der Bedingung

$$Si\,(\varphi - \delta_1)\, Se\, \delta_1 = -\, Si\,(\varphi - \delta_2)\, Se\, \delta_2 \qquad \text{oder} \qquad Tg\, \delta_1 + Tg\, \delta_2 = 2\, Tg\, \varphi \qquad 8$$

genügen, das Mittel nach 5 von dem Azimutalfehler frei wird, — und in Fällen, wo diese Bedingung nur annähernd erfüllt ist, schon ein roher, z. B. durch Einstellung auf die Mire erhaltener, Wert vollständig genügt, um die

kleine Differenz des Azimutaleinflusses zu beseitigen. — Für andere Methoden und weitern Detail verweise ich auf die schon früher angeführte Speciallitteratur, zu deren Ergänzung ich noch „**Delambre**, Table pour trouver la déviation d'une lunette méridienne et la correction des passages observés (Conn. d. t. 1792; entspricht unserer Tab. X'), — Henry **Englefield** (1752? — London 1822; Baronet; Schüler von N. Pigott?), Method of adjusting a transit instrument in a plan of the meridian (Journ. Nicholson 1807), — **Bohnenberger**, Über die Berichtigung der Mittagsfernröhre (Z. f. A. IV von 1817), und: Über den Gebrauch des Polarsternes als Meridianzeichen (A. N. 135 von 1828), — J. J. v. **Littrow**, On the correction of the transit instrument (Mem. Astr. Soc. I—II von 1822—26), — Henry **Kater** (Bristol 1777 — London 1835; Kapitän und Mitarbeiter von Colonel Lambton in Indien), Description of a floating collimator (Phil. Trans. 1825), — **Liagre**, Mémoire sur les corrections de la lunette méridienne (Mém. Brux. 1845), und: Méthode particulière pour déterminer la collimation d'une lunette méridienne à l'aide des observations astronomiques (Brux. mém. cour. 1850), — Charles A. **Young** (Hanover in N.H. 1834 geb.; Dir. Obs. Princeton in N.J.), On a new method of determining the level-error of the axis of a meridian instrument (Proc. amer. Ass. 1870), — C. **Braun**, Über eine neue Reductionsmethode für Sätze von Transit-Beobachtungen (A. N. 2595 von 1884; bemerkenswertes graphisches Verfahren), — etc." beifüge. — Die fortwährende Neubestimmung der Konstanten ist um so notwendiger, als für dieselben nicht nur die Stabilität des Instrumentes in Frage kömmt, sondern auch **systematische** Veränderungen vorzukommen scheinen, welche an tägliche, jährliche und noch grössere Perioden gebunden, zum Teil vielleicht sekulärer Natur sind, — zuweilen auch plötzliche Störungen. Inwieweit diese Variationen mit lokalen, tellurischen oder gar (vgl. 523) kosmischen Verhältnissen zusammenhängen, ist wohl nur durch lange Beobachtungsreihen festzustellen, jedoch kann vorläufig dafür auf die Abhandlungen und Notizen der St. Jacques de **Silvabelle** (Berl. Jahrb. 1785), Th. R. **Robinson** (Phil. Mag. 1846), Ad. **Hirsch** (Bull. Neuch. 1870, 1879 und 1883), W. **Förster** (Astr. Viert. 1883), H. **Faye** und Antoine-Thompson **d'Abbadie** (Dublin 1810 geb.; Akad. Paris; vgl. Compt. rend. 1883), Th. **Albrecht** (A. N. 2769 von 1887), etc. verwiesen werden.

381. Die sog. Durchbiegung. — Bei jedem nur in der Mitte unterstützten Fernrohr werden sich beide Rohrhälften etwas biegen und dadurch eine Verlegung der optischen Axe bewirken, welche aber natürlich nur insoweit einen schädlichen Einfluss ausüben kann, als eine Biegungsdifferenz der beiden Rohrhälften vorhanden ist; diese letztere wird aber wesentlich durch eine Verschiedenheit der Längen a und b der beiden Rohrhälften und der an ihnen wirkenden Gewichte A und B des Okular- und Objektivkopfes bedingt werden [a]. Nachdem durch **Bessel** und **Brioschi** der schädliche Einfluss der Biegung auf die Höhenmessungen konstatiert worden war [b] und **Reichenbach** vergeblich versucht hatte, dieselbe auf konstruktivem Wege vollständig zu beseitigen [c], hatte **Repsold** den glücklichen Gedanken, die beiden Köpfe vertauschbar zu machen und dadurch den Astronomen ein bequemes Mittel zur Bestimmung

und fast vollständigen Elimination jenes Einflusses an die Hand zu geben[d]. Für weitern Detail wird auf die Speciallitteratur verwiesen[e].

Zu 381: *a.* Da das Gleichgewicht zwischen den beiden Rohrhälften an

$$a \cdot A = b \cdot B \qquad \text{oder} \qquad a : b = B : A \qquad 1$$

gebunden ist, und die Biegung nach den Gesetzen der Mechanik bei horizontalem Rohr dem Gewichte und der dritten Potenz der Länge des Armes proportional gesetzt werden darf, so hat man einerseits, wenn α ein Erfahrungsfaktor ist, bei der gewöhnlichen Zusammensetzung die Biegungsdifferenz

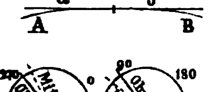
$$\beta_1 = \alpha\,(A \cdot a^3 - B \cdot b^3) = \alpha b^3\,[A \cdot (B : A)^3 - B] \qquad 2$$

und nach Umtausch der beiden Köpfe

$$\beta_2 = \alpha\,(B \cdot a^3 - A \cdot b^3) = \alpha b^3\,[B \cdot (B : A)^3 - A] \qquad 3$$

folglich

$$\beta_1 + \beta_2 = \alpha \cdot b^3 \cdot (A + B)\,[(B : A)^3 - 1] \qquad 4$$



Vor Umt. Nach Umt.

Anderseits hat man, wenn e und $180^0 + e$ die für ein Objekt der Zenitdistanz z vor und nach Umtausch ohne Biegung nötigen Einstellungen, α_1 und α_2 aber die durch die Biegung verdorbenen Ablesungen sind, da die Biegungen desselben Rohres in verschiedenen Zenitdistanzen wenigstens annähernd deren Sinus proportional gesetzt werden dürfen,

$$\alpha_1 = e + \beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,z \qquad \alpha_2 = 180^0 + e - \beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,z \qquad 5$$

(wo die β für nördliche Objekte das Zeichen wechseln), und hieraus

$$\beta_1 + \beta_2 = (180^0 + \alpha_1 - \alpha_2) \cdot \mathrm{Cs}\,z \qquad 6$$

Man kann daher nach 6, 4, 2, 3 successive $\beta_1 + \beta_2$, αb^3, β_1 und β_2 berechnen, und sodann nach 5 aus einer Ablesung α die eigentliche Einstellung e finden. Da übrigens aus 2 und 3

$$\beta_1 : \beta_2 = (A \cdot B^3 - B \cdot A^3) : (B^4 - A^4) = AB : (A^2 + B^2) \qquad 7$$

folgt, so kann man auch leicht für jedes Instrument für ein und allemal durch Abwägung der beiden Köpfe dieses Verhältnis bestimmen und sodann die beiden β direkt aus 6 berechnen. So erhielt ich bei dem Ertel'schen Meridiankreise der Zürcher Sternwarte $A = 2242^{gr}$, $B = 2281^{gr}$, $\beta_1 : \beta_2 = 1 : 2$, folglich, da sich aus den Ablesungen $\beta_1 + \beta_2 = 1'',26$ ergeben hatte, $\beta_1 = 0'',42$ und $\beta_2 = 0'',84$. — *b.* **Bessel** handelte von der Biegung in der 1822 erschienenen Abteilung VII der „Königsberger-Beobachtungen", und Carlo **Brioschi** (1782? — Neapel 1833; Prof. astr. Neapel) in dem 1824 erschienenen ersten Bande der „Comentari della specola di Napoli". — *c.* **Reichenbach**, bei dem es fast zur Manie geworden war, überall Korrektionsschrauben und Gegengewichte anzubringen, wollte der Biegung durch ein eigenes Hebelwerk steuern, hatte aber damit wenig Erfolg, und so schrieb z. B. **Horner** schon 1826 X 10 an Gautier: „Cette méthode de charger le tout de contrepoids, que nous devons à Reichenbach, m'a déplû toujours; il vaudrait mieux de composer les tubes de cones doubles", — ja **Hansen** sprach sich sogar (A. N. 389 von 1839) dahin aus, dass jene Balancierung mehr kompliziere als nütze. — *d.* **Repsold** schrieb schon 1825 XII 27 an Horner, dass er diese Einrichtung an dem von ihm für die Hamburger Sternwarte konstruierten Meridiankreise anbringe. — Begreiflich darf bei dieser Art der Biegungsbestimmung nicht vergessen werden, vor und nach jedem Umtausch den Nadirpunkt zu bestimmen, da die optische Axe durch denselben immer eine mehr oder weniger beträchtliche Verlegung

erleidet. — *e.* Vgl. z. B. „Ludwig **Schwarz** (Danzig 1821 geb.; Dir. Obs. Dorpat), Das vom Sinus der doppelten Zenitdistanz abhängige Glied der Biegung des Dorpater Meridiankreises. Dorpat 1871 in 4., und: Eine Studie auf dem Gebiete der practischen Astronomie. Dorpat 1889 in 4., — William **Harkness**, On the flexure of meridian instruments and the means available for elimination its effects from star places. Washington 1886 in 4. (auch App. III Wash. observ. 1882), — etc. — Anhangsweise ist zu erinnern, dass grosse Kreise auch infolge ihres Gewichtes Deformationen erleiden können, und so z. B. John **Pond** (London 1767 — Blackheath 1836; von 1811—35 Astronomer royal) in seiner Abhandlung „On the declinations of some of the principal fixed stars (Ph. Tr. 1806)" aus vergleichenden Beobachtungen an einem Troughton'schen Universalinstrumente, das 6 equidistante Mikroskope besass, solche Deformationen an einem Greenwicher Quadranten nachweisen konnte.

382. Die Personalfehler. — Während ein geübter Beobachter bei guter Luft den Fadenantritt eines equatorealen Sternes bis auf $0^s,1$ genau zu notieren glaubt, so differieren die Angaben verschiedener Beobachter oft viel stärker, ja gehen in einzelnen Fällen um mehr als 1^s auseinander. Man betrachtete früher solche Vorkommnisse als unstatthafte Anomalien [a], hat dagegen in neuerer Zeit konstatiert, dass jedem Menschen ein zunächst aus Hörfehler und Sehfehler, aber auch aus gewissen Angewöhnungen beim beobachten, etc., resultierender sog. **Personalfehler** zukömmt [b], — dass dieser für jeden einzelnen ziemlich konstant, für verschiedene aber ebenfalls verschieden ist, — und dass jene Anomalien gerade diesen Verschiedenheiten entsprechen, d. h. sog. **Personalgleichungen** begründen. Glücklicherweise wurden aber auch verschiedene Wege gefunden, um diese Fehler und Gleichungen ermitteln [c], somit in Rechnung bringen, folglich gewisse Fundamentalbestimmungen von ihrem schädlichen Einflusse befreien zu können, und wir werden noch wiederholt hierauf zurückzukommen, sowie auch eine ganze Reihe anderer persönlicher Fehler zu erwähnen haben [d].

Zu 382: *a.* So glaubte noch am Ende des vorigen Jahrhunderts **Maskelyne** einen sonst tüchtigen Gehilfen Namens David **Kinnebroek** entlassen zu sollen, als er eine konstante Beobachtungsdifferenz zwischen diesem und sich selbst entdeckte. — *b.* Schon im ersten Viertel des gegenwärtigen Jahrhunderts befassten sich die **Bessel**, **Quetelet**, **Bohnenberger**, etc. wiederholt mit den beim Notieren von Fadenantritten vorkommenden Fehlern, ja **Gauss** schrieb bereits (vgl. „Briefe, herausg. von Valentiner. Karlsruhe 1877 in 4.") 1820 I 20 an Nicolai: „Es ist ein Irrthum wenn man (wie Bohnenberger) glaubt, dass die wahrscheinlichen Fehler der beobachteten Antritte den Secanten der Declination proportional sind. Sie wachsen viel langsamer und die wahre Formel ist $\sqrt{f^2 + g^2 \cdot Se^2 d}$, wo f vom Fehler des Hörens, g vom Fehler des Sehens abhängt. Für meine Beobachtungen an Repsold's Uhr und an Reichenbach's Mittagsfernrohr setze ich $f = 0^s,086$ und $g = 0^s,039$". Letztere Bestimmungen wurden ohne Zweifel erhalten, indem für eine grössere Anzahl von Sternen (entsprechend wie in 378 : c) der sich aus Vergleichung der reduzierten Faden-

antritte mit ihrem Mittel ergebende mittlere oder wahrscheinliche Fehler jedes einzelnen jener Wurzel gleichgesetzt, dann die den sämtlichen Gleichungen bestentsprechenden Werte von f und g gesucht wurden, und auf gleiche Weise erhielt später W. **Struve** (vgl. „Anwendung des Durchgangsinstruments für die geographischen Ortsbestimmungen. St. Petersburg 1833 in 8.“) für n-malige Vergrösserung die Formel

$$w_n = \sqrt{0^s{,}072^2 + (180:n)^2 \cdot 0^s{,}016^2 \cdot Se^2\, d} \qquad 1$$

nach welcher sich für

$d = 0 : w_{30} = 0^s{,}120 \quad w_{180} = 0^s{,}074 \qquad d = 88^1/_2{}^0 : w_{30} = 3^s{,}439 \quad w_{180} = 0^s{,}578$

folglich für den auf eine Fadendistanz übergehenden Fehler $df = w \cdot \sqrt{2} \cdot Co\, d$ die Werte $0^s{,}170 \quad 0^s{,}104 \quad 0^s{,}135 \quad 0^s{,}023$

ergeben, so dass bei stärkern Vergrösserungen die polaren Sterne für Bestimmung der Fadendistanz besonders vorteilhaft sind. — Als von der Mitte unsers Jahrhunderts hinweg der **Chronograph** (159) zur Verfügung stand, der einerseits die Vermehrung der Faden und dadurch eine vollständigere Elimination der zufälligen Beobachtungsfehler ermöglichte, und anderseits den Hörfehler an einen Tasterfehler vertauschte, — ferner das **Chronoskop** (159), welches die Mittel an die Hand gab, die kleinsten Zeitunterschiede mit Sicherheit zu messen, — so änderten sich die Verhältnisse bedeutend: Denn wenn sich auch ergab, dass sehr geübte Beobachter einen einzelnen Fadenantritt mit Auge und Ohr fast ebenso sicher als mit dem Chronographen bestimmten, so erhielt doch z. B. (A. N. 1284—86 von 1860) Karl Ferdinand **Pape** (Verden 1834 — Altona 1862; Obs. Altona) aus vergleichenden Beobachtungen das Resultat, dass bei guten Instrumenten, d. h. bei solchen, wo die Instrumentalfehler gegen die Beobachtungsfehler vernachlässigt werden dürfen, der wahrscheinliche Fehler einer Durchgangsbeobachtung bei Anwendung des Chronographen von $0^s{,}055$ auf $0^s{,}021$ reduziert werde, so dass Eine chronographische Beobachtung etwa $(0{,}055 : 0{,}021)^2 \risingdotseq 7$ Beobachtungen mit Auge und Ohr ersetze. — Anhangsweise erwähne ich noch, dass die 1, wenn auch die oben aus ihr abgeleiteten Resultate allgemeine Giltigkeit haben, natürlich nicht für alle Beobachter und alle Verhältnisse passt. So z. B. fand ich aus 432 Sterndurchgängen, welche ich im Sommer 1867, behufs der Längenvergleichung mit Rigi und Neuenburg, bei Vergrösserung 180 an je mindestens 10 Faden chronographisch beobachtete, die von ihr wesentlich variierende Formel

$$w_n = \sqrt{0^s{,}043^2 + (180:n)^2 \cdot 0{,}037^2 \cdot Se^2\, d + 0^s{,}065^2 \cdot Co^2\, z} \qquad 2$$

in welcher das neue Glied mit gewissen konstruktiven Verhältnissen zusammenhängt, welche im Zürcher Meridiansaale im Sommer das Durchlüften erschweren, so dass ich ihm den Namen „Semper-Glied“ gegeben habe. — *c.* Das gewöhnliche Verfahren, um die Personaldifferenz $a - b = p$ zweier Beobachter zu bestimmen, besteht darin, dass a einen Stern α an den ersten, einen Stern β aber an den letzten, dagegen b beide Sterne an allen übrigen Faden beobachtet, so dass man, wenn die Angaben jedes Beobachters für sich reduziert werden,

$$\alpha_a = \alpha_b + p \qquad \beta_a = \beta_b + p \qquad \text{also} \qquad p = {}^1/_2\,(\alpha_a + \beta_a - \alpha_b - \beta_b) \qquad 3$$

hat. Da jedoch das Okular bei dieser Operation nur selten für beide Beobachter vollständig ajüstiert sein wird, so ist es bei seitlicher Fadenbeleuchtung unumgänglich notwendig, dieselbe nach Umsetzen der Beleuchtung noch-

mals zu wiederholen, damit sich im allgemeinen Mittel ein (vgl. Eff. di Milano per 1819 und Brief an Gautier von 1856 III 17 in Notiz 396) schon durch Francesco **Carlini** (Mailand 1783 — ebenda 1862: Dir. Obs. Mailand) bemerkter und sodann, ohne etwas hievon zu wissen, infolge einer bei der Längenvergleichung Neuenburg-Zürich aufgetretenen Anomalie, erst durch mich und nachher auch durch **Hirsch** (vgl. Mitth. 256 von 1869/70) einlässlich studierter und zuweilen sehr beträchtlicher Fehler eliminiere. — Eine andere Methode besteht darin, dass man künstlich eine Erscheinung, bei deren Eintreten sich ein Strom (wie bei der Elongation eines elektrischen Pendels; vgl. Mitth. 39 von 1876) schliesst oder (wie beim Durchgange des von Hirsch an seiner Nachtmire angebrachten Hilfspendels durch die Ruhelage: vgl. die in 159:d citierte Schrift) öffnet, herbeiführt und auch durch Niederdrücken eines Tasters beobachtet, — die sich am Chronograph oder Chronoskop ergebende Zeitdifferenz als Personalfehler betrachtet, — und sodann die Gleichung zweier Beobachter diesen Personalfehlern entnimmt. — Für andere Methoden und weitern Detail hebe ich aus der zahlreichen Speciallitteratur noch „R. **Radau**, Über die persönlichen Gleichungen bei Beobachtung derselben Erscheinungen durch verschiedene Beobachter (Carls Repert. I von 1865), — Ch. **Wolf**, Recherches sur l'équation personelle dans les observations de passages, sa détermination absolue, ses lois et son origine (Ann. Obs. Paris: Mém. VIII von 1866), — F. **Kaiser**, Über einen neuen Apparat zur absoluten Bestimmung von persönlichen Fehlern bei astronomischen Beobachtungen (Amst. Versl. 1868), — **Christie** and **Turner**, The personal equation machine of the roy. Observatory Greenwich (Monthly Not. 1887), — W. F. **Wislicenus**, Untersuchungen über die absoluten persönlichen Fehler bei Durchgangsbeobachtungen. Leipzig 1888 in 4., — G. **Rayet**, Recherches sur les erreurs accidentelles de passage par la méthode de l'œil et de l'oreille (Ann. Bordeaux III von 1889), — **Bakhuijzen**, Beschreibung eines Apparates zur Bestimmung des persönlichen Fehlers bei Durchgangsbeobachtungen. Haag (1889) in 4., — etc.", hervor. Ferner für die Versuche, die Gleichung durch Elimination der Beobachter zu beseitigen: „C. **Braun**, Das Passagenmikrometer. Leipzig 1865 in 8., und: Bericht über die zu Kalocsa ausgeführten Arbeiten. Münster 1886 in 4., — J. **Repsold**, Durchgangsinstrument mit Uhrbewegung (A. N. 2828 von 1888), und: Neuer Vorschlag zur Vermeidung des persönlichen Zeitfehlers bei Durchgangsbeobachtungen (A. N. 2940 von 1889), — etc." — *d.* Vorläufig mag nur erwähnt werden, dass schon C. v. **Littrow** in der „Bestimmung der Meridiandifferenz Leipzig-Dablitz. Wien 1868 in 4." hervorhob, wie auch beim Ablesen von Scalen und Registrierstreifen, beim Notieren von Coincidenzen, etc., kurz fast überall Personaldifferenzen auftreten. — Zum Schlusse erinnere ich noch an die, verwandte Gebiete beschlagenden Abhandlungen „Charles-Louis **André** (Chauny in Aisne 1842 geb.; Dir. Obs. Lyon), Etude de la diffraction dans les instruments d'optique et son influence dans les observations astronomiques. Paris 1876 in 4., — Hermann **Struve** (Pulkowa 1854 geb.; Sohn von Otto; Obs. Pulkowa), Über den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. Petersburg 1882 in 4., — Hugo **Seeliger**, Über den Einfluss dioptrischer Fehler des Auges auf das Resultat optischer Messungen. München 1886 in 4., — etc."

383. Die Veränderlichkeit der Polhöhe. — Die schon (366) auseinandergesetzte Methode, die Polhöhe aus grössten Höhen abzuleiten, wird offenbar bei Benutzung des Meridiankreises und der

im vorhergehenden (379 u. f.) besprochenen Verfahren und Untersuchungen noch viel zuverlässigere Resultate ergeben, und so sind denn auch wirklich auf diesem Wege gar manche schöne Reihen solcher Bestimmungen erhalten worden [a]. Jedoch zeigen sich auch da bei Vergleichung von Serien, die an demselben Orte teils durch verschiedene Beobachter, teils zu verschiedenen Zeiten erhalten wurden, Differenzen, welche die aus der Übereinstimmung der Werte innerhalb der einzelnen Serie geschlossene Unsicherheit wesentlich übersteigen; ob aber dieselben durch Personaldifferenzen in Höheneinstellungen [b], durch ein mangelhaftes Einführen der Temperaturen in die Refraktionsformeln [c], etc., überhaupt durch Beobachtungs- und Rechnungsfehler, vollständig erklärt werden können, oder ob eine mit wirklichen Veränderungen in der Lage der Lotlinie oder Erdaxe zusammenhängende merkliche, sei es periodische, sei es sekuläre **Veränderlichkeit der Polhöhe** anzunehmen ist, lässt sich gegenwärtig noch kaum mit voller Sicherheit entscheiden, doch ist das Zutreffen des letztern Umstandes in der allerneusten Zeit sehr wahrscheinlich geworden [d].

Zu 383: *a.* So z. B. ergab sich im Mittel aus zahlreichen Beobachtungen die Polhöhe in

Greenwich		Pulkowa		
1836—49: $\varphi = 51^0\ 28'$	38",15	1842—43: $\varphi = 59^0\ 56'$	18",727	$\pm$ 0",013
1851—65	38,13	1863—70	18,654	14
1866—83	38,15	1871—73	18,501	14

wobei bemerkt werden mag, dass die von **Christie** (Nature 1884) mitgeteilten Greenwicher Bestimmungen von den verschiedensten Beobachtern, aber immer aus Circumpolarsternen, — die drei Pulkowaer Serien der Reihe nach von **Peters, Gyldén** und **Nyrén** erhalten wurden. — *b.* Als Jean-Baptiste-Aimable **Gaillot** (St-Jean-sur-Tourbe in Marne 1834 geb.; Obs. Paris) 1077 in den Jahren 1856—61 am Mauerkreise von Gambey erhaltene Bestimmungen, welche im Mittel für Paris $\varphi = 48^0\ 50'\ 11'',80$ ergaben, nach den Beobachtern ordnete, fand er merkliche Personaldifferenzen, und zwar im Min. für **Chacornac** 11",44, im Max. für **Löwy** 12",27. Früher hatte **Laugier** aus 650 an demselben Instrumente ausgeführten Beobachtungen sogar nur 11",19 gefunden, während damals **Mauvais** aus 1350 Beobachtungen am Mauerkreise von Fortin 11",85 erhielt. — Während ich aus 1141 Messungen, welche ich (Mitth. 44 von 1877) 1874—77 am Kern'schen Meridiankreise der Zürcher Sternwarte ausführte, den Schlusswert $\varphi = 47^0\ 22'\ 39'',991 \pm 0'',004$ ableitete, ergaben 2071 Bestimmungen, welche A. **Wolfer** (Mitth. 47 von 1878) 1875—77 zur Kontrole am Ertel'schen Meridiankreise machte, bei ganz gleicher Behandlung 39",795 $\pm$ 0",003, und auch die von uns nach verschiedenen Methoden angestellten Studien ergaben (Mitth. 51 und 53 von 1880/1) grosse Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines merklichen Personalfehlers in Höheneinstellungen. — *c.* Als **Gaillot** die erwähnten Polhöhenbestimmungen nach den 6 Jahrgängen ordnete, erhielt er die Sekundenfolge 11,89 11,53 11,89 11,73 12,16 11,64

der sich nichts systematisches entnehmen lässt; als er dagegen den „Excès de la moyenne mensuelle sur la moyenne générale“ berechnete, erhielt er für die 12 Monate die charakteristische Folge

-0,23 -0,06 -0,03 0,10 0,16 0,25 0,25 0,16 0,13 -0,07 -0,11 -0,27

welche er sehr nahe durch die Formel

$$d\varphi = 0'',20 \cdot \text{Si}\,[360 \cdot (t - 95) : 365,25]$$

darstellen konnte, in welcher t die Anzahl der seit Anfang Jahres verflossenen Tage bezeichnet. Wie er selbst betonte, scheint dieser Gang mit der Lufttemperatur zusammenzuhängen, — wohl am ehesten mit ihrer Einführung in die Refraktionstafel, da bei den Zürcher Serien, für welche eine solche durch Einbeziehung von Refraktionssternen unnötig wurde, sich (vgl. Mitth. 48 von 1879) keine Spur eines solchen Temperaturganges zeigte. Immerhin ist das Faktum, dass sich auch bei den in der neuesten Zeit in Berlin, Potsdam und Prag unternommenen Messungen ein ganz entsprechender jährlicher Gang wie bei den Pariser Bestimmungen zeigte, höchst merkwürdig, und bietet für die Ansicht, es möchte derselbe irgendwie mit den im folgenden zu besprechenden Verhältnissen zusammenhängen, ein nicht zu unterschätzendes Belege. Vgl. dafür namentlich die 1890 von Th. **Albrecht** publizierten „provisorischen Resultate“ jener Reihen, und die 369: a erwähnte Schrift von **Küstner**, welche dieselben grossenteils veranlasste. — *d.* Wenn ältere Astronomen, wie z. B. Pierre **Petit** (Montluçon bei Bourges 1598 — Lagny-sur-Marne 1667; Geograph Ludwig XIII.) in seiner „Dissertatio de latitudine Lutetiæ. Parisiis 1660 in 4. (Anhang zur Astronomia physica von Duhamel)“, eine Veränderlichkeit der Polhöhe behaupten wollten, so konnte man sie durch Hinweis auf die Unsicherheit der frühern Bestimmungen abfertigen; aber wenn ein **Bessel** 1844 VI 1 an Humboldt schreibt: „**Ich habe Verdacht gegen die Unveränderlichkeit der Polhöhe.** Meine sehr schön untereinander stimmenden Beobachtungen mit dem neuen Kreise verkleinern die Polhöhe fortwährend, vom Frühling 1842 bis jetzt zwar nur um 0'',3, aber selbst diese Kleinigkeit scheint mir nicht ein Beobachtungsfehler zu sein; denn nach meiner jetzigen Beobachtungsart wird alles eliminirt was constanten Einfluss auf die Mittel der einzelnen Sätze haben könnte. **Ich denke dabei an innere Veränderungen des Erdkörpers, welche Einfluss auf die Richtung der Schwere erlangen**“, und wenn man aus den Abhandlungen „George Howard **Darwin** (Down in Kent 1845 geb.; Sohn von Charles Robert Darwin; Prof. astr. Cambridge), On the influence of geological changes on the Earths axis of rotation (Ph. Tr. 1877), und: **Schiaparelli**, De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques. St-Pétersbourg 1889 in 8.“ erfährt, dass in der That grössere Verschiebungen, wie sie namentlich zur Zeit, wo die Erde noch eine gewisse Plasticität besass, vorkommen konnten, die Lage der Pole sehr bedeutend beeinflussen dürften, ja aus analogen Gründen mit der Lotablenkung (371) auch der zweite Schenkel des betreffenden Winkels variieren könnte, so lässt sich denn doch die Sache nicht mehr so einfach abthun. Dagegen fehlen allerdings gegenwärtig noch zureichende faktische Nachweise, da sich die oben mitgeteilten ältern Reihen von Greenwich und Pulkowa in dieser Richtung total widersprechen und die erwähnten neuen Reihen erst bei längerer Fortsetzung hinlänglich sichere Schlüsse zu ziehen erlauben werden.

384. Das Passageninstrument im ersten Vertikal. — Wie der Meridian wegen w = 0 = s für gewisse Untersuchungen

grosse Vereinfachungen und Vorteile darbietet, so hat für andere Bestimmungen der erste Vertikal teils wegen $w = 90^0$ (resp. 270^0), teils weil ihn ein unter kleiner südlicher Zenitdistanz culminierender Stern kurze Zeit vorher und nachher, also zweimal rasch aufeinander, passiert, seine specifischen Vorteile, um derentwillen es Übung geworden ist, auf grössern Sternwarten ein besonderes, nach seiner Konstruktion wesentlich dem Mittagsrohr entsprechendes Passageninstrument im ersten Vertikal aufzustellen, d. h. dem Meridiansaale einen zweiten Saal mit Spalte von West nach Ost zu coordinieren [a].

Zu 384: *a.* Schon Olaus **Römer** erkannte nicht nur die Vorzüge des ersten Vertikales für gewisse Bestimmungen, sondern man ersieht aus Tab. VIII der überhaupt höchst wichtigen „Basis astronomiæ", — einer Tafel, welche die Inscription „Laur. Thom. Skive del.; J. Friedlein sculp. 1704" zeigt, also 12 Jahre vor Römers Tod und 31 Jahre vor dem Erscheinen des Werkes gestochen wurde, — dass dieser grosse Astronom die beiden Passageninstrumente im Meridian und Vertikal neben einander besass, ja gewissermassen durch Aufstellung auf drei Pfeilern, von welchen einer gemeinschaftlich war, miteinander verband. Später wurde dagegen allerdings der gute Gedanke von Römer wieder vergessen, ja so ziemlich erst durch **Bessel** neuerdings ins Leben gerufen und weiter ausgebildet, wie die folgende Nummer noch des nähern zeigen wird.

385. Die Bestimmungen im ersten Vertikal. — Da für den ersten Vertikal nach 177:4'''

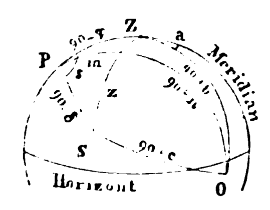
$$\text{Ct}\,\varphi = \text{Tg p} \cdot \text{Co s} \qquad 1$$

wird, so lässt sich aus der Uhrzeit des Durchganges eines bekannten Sternes durch den ersten Vertikal, aber allerdings nur unter Voraussetzung bekannter Uhrkorrektion, die Polhöhe leicht bestimmen, ja man kann sogar diese Voraussetzung unnötig machen: Wählt man nämlich, entsprechend der oben (384) gemachten Andeutung, einen Stern, dessen Poldistanz nur wenig grösser als das Komplement der Polhöhe ist, so geht er offenbar bald nacheinander zweimal durch den ersten Vertikal, und man kann somit bei kleinem Gange der Uhr von diesem absehen, somit in 1 den Stundenwinkel s durch die halbe Differenz der Uhrzeiten beider Durchgänge ersetzen [a]. Für genauere Bestimmungen sind jedoch natürlich, ähnlich wie beim Meridiankreise, die kleinen Aufstellungsfehler in Rechnung zu bringen [b], — ferner ist es ratsam, auch Beobachtungen an Seitenfaden beizuziehen [c].

Zu 385: *a.* Eliminiert man aus den zwei ersten 177:6 die Grösse dz, so erhält man nach leichter Reduktion

$$d\varphi = -\text{Tg z} \cdot \left[\frac{dw}{\text{Si w}} - \frac{\text{Co v} \cdot ds}{\text{Si s}}\right] \qquad 2$$

woraus man ersieht, dass in der That der erste Vertikal unter Anwendung eines zenitalen Sternes zur Bestimmung der Polhöhe am vorteilhaftesten ist.



— ***b.*** **Bezeichnet O den Punkt, nach welchem, bei Drehung des Instrumentes aus dem Meridiane nach dem ersten Vertikal im Sinne der täglichen Bewegung, das frühere Ostende der Drehaxe hinweist, und S einen in der optischen Axe liegenden Stern, so erhält man (bei möglichst mit 380 übereinstimmender Bezeichnung) aus den Dreiecken P S O und P Z O**

$$\mathrm{Si}\,c = \mathrm{Si}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,n - \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,n\cdot\mathrm{Co}(s-m) \qquad \mathbf{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Co}\,n\cdot\mathrm{Co}\,m &= -\mathrm{Si}\,b\cdot\mathrm{Co}\,\varphi + \mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,a \\ \mathrm{Co}\,n\cdot\mathrm{Si}\,m &= \mathrm{Si}\,a\cdot\mathrm{Co}\,b \\ \mathrm{Si}\,n &= \mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,b + \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Co}\,a \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{4}$$

und somit

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,c = (\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,b + \mathrm{Co}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Co}\,a)\,\mathrm{Si}\,\delta - \mathrm{Si}\,s\cdot\mathrm{Si}\,a\cdot\mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Co}\,\delta + \\ + (\mathrm{Si}\,b\cdot\mathrm{Co}\,\varphi - \mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Co}\,a)\cdot\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,s \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

Für den ersten Vertikal hätte man aber nach 177

$$\mathrm{Si}\,\delta = \mathrm{Co}\,z\cdot\mathrm{Si}\,\varphi \qquad \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,s = \mathrm{Si}\,z \qquad \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,s = \mathrm{Co}\,z\cdot\mathrm{Co}\,\varphi \qquad \mathbf{6}$$

und setzt man daher für eine Aufstellung in der Nähe des ersten Vertikales

$$\mathrm{Si}\,\delta = \mathrm{Co}\,z'\cdot\mathrm{Si}\,\varphi' \qquad \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,s = \mathrm{Si}\,z' \qquad \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,s = \mathrm{Co}\,z'\cdot\mathrm{Co}\,\varphi' \qquad \mathbf{7}$$

d. h. bestimmt zwei Hilfsgrössen φ' und z' durch

$$\mathrm{Tg}\,\varphi' = \mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Se}\,s \qquad \mathrm{Tg}\,z' = \mathrm{Tg}\,s\cdot\mathrm{Co}\,\varphi' \qquad \mathbf{8}$$

so werden sich z' und φ' nur wenig von z und φ unterscheiden, während 5 für die 7 in

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}\,c = \mathrm{Si}\,b\cdot\mathrm{Co}\,z'\cdot\mathrm{Co}\,(\varphi-\varphi') - \mathrm{Si}\,a\cdot\mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Si}\,z' - \\ - \mathrm{Co}\,b\cdot\mathrm{Co}\,a\cdot\mathrm{Co}\,z'\cdot\mathrm{Si}\,(\varphi-\varphi') \end{aligned} \qquad \mathbf{9}$$

übergeht, woraus, da a, b, c und $(\varphi - \varphi')$ als kleine Grössen zu betrachten sind, die einfache Beziehung

$$\varphi = \varphi' - a\cdot\mathrm{Tg}\,z' + b - c\cdot\mathrm{Se}\,z' \qquad \mathbf{10}$$

folgt, welche offenbar die Polhöhe unter Berücksichtigung der Aufstellungsfehler zu bestimmen lehrt. — ***c.*** Beobachtet man an einem Seitenfaden der Distanz f, d. h. gewissermassen mit dem Kollimationsfehler $(c + f)$, so hat man entsprechend 3

$$\mathrm{Si}\,(c+f) = \mathrm{Si}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,n - \mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,n\cdot\mathrm{Co}\,(s'-m) \qquad \mathbf{11}$$

oder, wenn hievon 3 abgezogen wird,

$$2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2 f\cdot\mathrm{Co}\,(c + {}^1\!/_2 f) = 2\,\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,n\cdot\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(s-s')\cdot\mathrm{Si}\,[{}^1\!/_2\,(s+s') - m]$$

somit, da sowohl f als die a, b, c wie kleine Grössen behandelt werden dürfen, mit Hilfe der 4

$$2\,\mathrm{Si}\,\frac{s-s'}{2} = \frac{f\,\mathrm{Si}\,1''}{\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,n\,[\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(s+s')\,\mathrm{Co}\,m - \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2(s+s')\,\mathrm{Si}\,m]} = \frac{f'\,\mathrm{Si}\,1''}{\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2(s+s')}$$

$$\text{wo} \qquad f' = f : [1 - b\,\mathrm{Ct}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,1'' - a\,\mathrm{Cs}\,\varphi\,\mathrm{Ct}\,{}^1\!/_2\,(s+s')\,\mathrm{Si}\,1''] \qquad \mathbf{12}$$

$$\text{so dass also} \qquad \mathrm{Co}\,s' - \mathrm{Co}\,s = f'\cdot\mathrm{Si}\,1''\cdot\mathrm{Se}\,\delta\cdot\mathrm{Cs}\,\varphi \qquad \mathbf{13}$$

oder auch nach 42 : 4, 5, wenn beidseitig, um s' und s in Zeit auszudrücken, mit 15 Si 1'' dividiert wird,

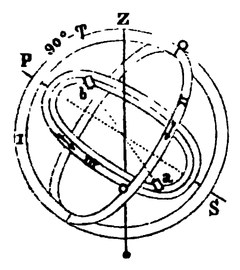
$$s - s' = \frac{f}{\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\,\mathrm{Si}\,s} + \frac{15\cdot\mathrm{Si}\,1''}{2\,\mathrm{Tg}\,s}\cdot\left(\frac{f}{\mathrm{Co}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\varphi\cdot\mathrm{Si}\,s}\right)^2 + \ldots \qquad \mathbf{14}$$

wo f, wie es für kleine Werte von a und b geschehen darf, für f' gesetzt

und zudem ebenfalls in Zeitsekunden ausgedrückt ist. — Für weitern Detail über die Bestimmungen im ersten Vertikal vgl. „**Bessel**, Über die Bestimmung der Polhöhenunterschiede durch das Passageninstrument (A. N. 49 von 1824; auch 131—32 von 1828), — **Hansen**, Über die Bestimmung der Polhöhe durch ein in der Richtung von Osten nach Westen aufgestelltes Passageninstrument nach der Bessel'schen Methode (A. N. 126 von 1827; auch 141—43 von 1828), — **Encke**, Bemerkungen über das Durchgangsinstrument von Ost nach West (Berl. Jahrb. 1843), — O. **Struve**, Tabulæ auxiliares ad transitus per planum primum verticale reducendas inservientes. Petropoli 1868 in 4., — M. **Löw**, Zur Theorie des Passageninstrumentes im ersten Vertikal (A. N. 2371 von 1881), — G. **Comstock**, On a new method of observing with the prime vertical transit (A. N. 2565 von 1883), — N. **Herz**, Theorie eines mit einem Verticalkreise versehenen Passage-Instrumentes im ersten Verticale. Wien 1891 in 4., — etc."

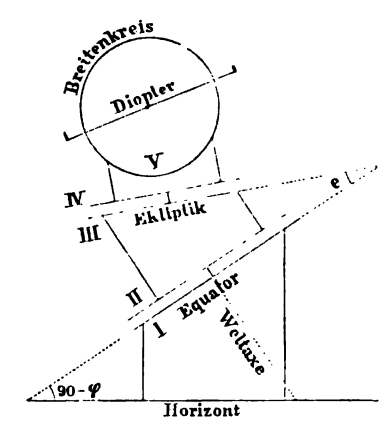
386. Armillarsphäre, Astrolabium und Torquetum. — Schon die Alten hatten sich unter dem Namen **Armillarsphäre** ein Instrument für unmittelbare Messung der Equatorcoordinaten hergerichtet, welches aus einer Zusammenstellung von drei Kreisen bestand, von denen I und II (als Meridian und Equator) unter rechtem Winkel fest verbunden waren, während sich der ein Diopterpaar tragende Kreis III (als Deklinationskreis) um den zu II senkrechten Durchmesser von I (d. h. um die Weltaxe) drehte[a]. — Als sodann **Hipparch** mit der Präcession (200) die Veränderlichkeit der Deklination und die Constanz der Breite entdeckte, erschien es wünschbar, die Armillarsphäre so abzuändern, dass auch die Lage gegen die nunmehr als Hauptgrundebene gewählte Ekliptik unmittelbar bestimmt werden könne, und es entstand so das sog. **Astrolabium**[b], welches nun mit der Armillarsphäre zu den Arabern und nach dem Abendlande überging, sowie Ausgangspunkt für verschiedene neue Konstruktionen wurde, unter denen beispielsweise das von **Regiomontan** erfundene **Torquetum** erwähnt werden mag[c].

Zu 386: *a.* Die vielleicht schon bei den ältern Alexandrinern, jedenfalls zur Zeit von **Eratosthenes** in Gebrauch gekommene, mutmasslich von Anfang an analog unsern Globen aufgestellte Armillarsphäre, wurde so orientiert, dass I in die Ebene des Meridianes fiel und die Axe PS mit der Lotrichtung den Winkel $90^0 - \varphi$ bildete; sobald daher (vgl. 57) die Kreise II und III Teilungen besassen, deren Nullpunkte respektive in I und II fielen, so brauchte man nur das Diopterpaar ab, welches in der Regel auf einem in III drehbaren Kreise sass, nach einem Sterne zu richten, um unmittelbar an II und III Stundenwinkel und Deklination ablesen zu können. —



b. Bei dem im Almagest beschriebenen **Astrolabium** lag PS noch in der Weltaxe, aber I war um dieselbe beweglich und trug noch eine zweite Axe, die mit der ersten einen Winkel von $23^1/_2{}^0$ bildete; II stand zu dieser zweiten Axe, um welche sich III drehte, senkrecht, und es stellte daher, sobald I mit

dem Kolur der Solstitien zusammenfiel, II die Ekliptik und III einen Breitenkreis vor; endlich waren zwei Kreise III von etwas verschiedenem Durchmesser vorhanden und jeder derselben mit einem Diopterkreis versehen, um gleichzeitig auf ein bekanntes Gestirn behufs Orientierung des Instrumentes und auf ein unbekanntes behufs Messung einstellen zu können. — *c.* Das von **Regiomontan** konstruierte und in den durch Schoner aus dessen Nachlass herausgegebenen „Scripta Regiomontani. Norimbergæ 1543 in 4." beschriebene **Torquetum** bestand aus einem gegen eine horizontale Tafel um die Equatorhöhe geneigten, zur Weltaxe senkrechten, geteilten Kreise I, über welchem sich konzentrisch ein Kreis II mit Index drehte; über letzterm stand ein zweiter geteilter Kreis III, der gegen ihn um die Schiefe der Ekliptik geneigt war und wieder einen innern Kreis IV mit Index hatte, der seinerseits einen zu ihm senkrechten geteilten Kreis V trug, um dessen Centrum sich ein Diopterlineal drehte. Orientierung und Gebrauch waren wesentlich dieselben wie beim Astrolabium. — Für ein etwas später durch Pet. **Apian** unter dem Namen **Meteoroskop** konstruiertes ähnliches Instrument kann auf dessen „Astronomicum Cæsareum" verwiesen werden, — endlich für ein noch vorhandenes, wahrscheinlich ebenfalls der Apian'schen Periode angehörendes Instrument dieser Kategorie, das „sehr niedlich" sein soll, auf „**Günther,** Die mathematische Sammlung des germanischen Museums zu Nürnberg (Leopoldina 1878)". — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass in Meragah die Diopter zur Abhaltung des diffusen Lichtes durch eine Röhre verbunden wurden.



387. Das Equatoreal. — Die Geschichte des schon früher (173) kurz charakterisierten Equatoreals ist naturgemäss mit der damals skizzierten des parallaktisch montierten Fernrohrs so verquickt, dass man dieselben kaum auseinander halten kann und hier nur noch Ergänzendes zu dem bereits Gegebenen beizufügen ist^a; dagegen bleibt unter der folgenden Nummer die Theorie des Equatoreals zu entwickeln, auf welche unter jener frühern Nummer noch nicht wohl eingetreten werden konnte.

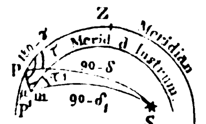
Zu 387: *a.* Der Ausspruch von **Lalande** (Astr. 3 éd. II 627), es sei ein um 1735 von **Vayringe** (Longuyon bei Luxemburg 1685 — Lunéville 1746; erst Schlosser, dann Uhrmacher, zuletzt Prof. phys. Lunéville) konstruiertes Equatoreal das älteste gewesen, welches **er gesehen** habe, darf kaum, wie es z. B. durch **Morin** in seinem „Catalogue du conservatoire des arts et métiers à Paris" geschah, so aufgefasst werden, es sei (im Widerspruche mit 173) jenes Equatoreal überhaupt als ältestes zu betrachten, — und ebenso unrichtig wäre es, mit Thom. **Dick**, vgl. dessen Schrift „The practical astronomer. London 1845 in 8.", annehmen zu wollen, es haben die ältern parallaktisch montierten Fernröhren keine graduierten Kreise besessen, ja es sei ihnen erst 1741 durch

den Uhrmacher Henry **Hindley** in London eine Equatorealplatte und ein Deklinationshalbkreis beigefügt worden; denn wenn es auch früher (wie jetzt noch) viele solche Instrumente ohne Kreise gegeben haben mag, so kam ja schon bei demjenigen von **Grünberger** (173) eine kleine geteilte Equatorealplatte vor, und **Römer** hatte sogar einen eigentlichen Teilkreis und einen Deklinationsbogen. — James **Short** lehrte in seiner „Description and uses of an equatorial telescope (Ph. Tr. 1749)" ein tragbares, auch unter jeder Breite brauchbares Instrument zu erstellen und dasselbe durch Beigabe von vier geteilten Kreisen für Azimut, Höhe, Stundenwinkel und Deklination zu einem eigentlichen Universalinstrumente zu machen, indem, wenn die Equatorealplatte der Horizontalplatte parallel gestellt werde, man dadurch ein „Equal altitude Instrument, a Transit Instrument, a **Theodolite** (vgl. 349), a Quadrant, an Azimuth Instrument and a Level" erhalte. Sein Versuch wurde nachher durch die G. Fr. **Brander** (vgl. Verz. 259), Joh. Heinrich **Hurter** (Schaffhausen 1734 — Düsseldorf 1799; erst Glaser, dann Emailmaler, später Besitzer einer mech.-opt. Werkstätte in London; vgl. Gesch. d. Verm. 144/5), etc., mit steigendem Erfolge wiederholt, — ja überhaupt im vorigen Jahrhundert sein Verfahren, für die parallaktische Aufstellung das dem Bau des Theodoliten (ja schon des Torquetums) zu Grunde liegende Princip zu verwenden, fast ausschliesslich benutzt, und höchstens für grössere Equatoreale, wo diese Aufstellung gar zu wenig Stabilität verschaffte, eine etwas andere Disposition angewandt, wie dies z. B. (vgl. Ph. Tr. 1793) durch **Ramsden** geschah, als er für G. Shuckburgh ein Equatoreal mit $5\frac{1}{2}$-füssigem Fernrohr und zwei 4-füssigen Vollkreisen zu bauen hatte. — Eine wesentliche Verbesserung erhielt die Aufstellung zu Anfang unsers Jahrhunderts im Münchner Institute, indem **Reichenbach** die Deklinationsaxe, welche an ihrem einen Ende den Refraktor und am andern den Deklinationskreis samt ergänzendem Gegengewicht trägt, in eine konische Büchse verlegte, die an das obere Ende der sich in zwei Ringen drehenden Stundenaxe angeschraubt war, — eine Anordnung, welche, unter Berücksichtigung einiger nachträglich durch **Fraunhofer** beliebten Verbesserungen, nach und nach allgemein eingeführt wurde und z. B. in „W. **Struve**, Beschreibung des grossen Refractors von Fraunhofer. Dorpat 1825 in fol." im Detail verfolgt werden kann. Im Principe ist dieselbe bis auf die neueste Zeit beibehalten worden, und die seitherigen Verdienste der **Repsold**, Friedrich Wilhelm **Eichens** (Berlin 1818 — Paris 1884; Mech. Paris), etc., bestehen wesentlich nur darin, die Equilibrierung noch besser ausgeführt, den Uhrgang wirksamer reguliert und dem Beobachter die Möglichkeit gegeben zu haben, das Instrument zu beherrschen, ohne seinen Stand am Okulare zu verlassen. Eigentliche, zu absoluten Messungen bestimmte Equatoreale werden allerdings jetzt nur noch selten gebaut, aber um so mehr grosse Refraktoren und Heliometer, für deren Montierung die entsprechenden Grundsätze ebenfalls zur Geltung kommen. — Vgl. noch „Antoine **Thury** (Nyon 1822 geb.; Prof. bot. Genf), Description de l'Equatorial Plantamour de l'Observatoire de Genève. Genève 1884 in 4."

388. Die Aufstellungsfehler und ihr Einfluss. — Wenn ein Equatoreal vorläufig ajüstiert, d. h. sein Stundenkreis in den Equator gebracht ist, ferner die Drehaxe des Fernrohrs parallel zum Stundenkreise und senkrecht zur optischen Axe steht, auch die Indexfehler der beiden Kreise bestimmt sind [a], so bleiben doch

immer noch kleine Abweichungen von der richtigen Lage und den wirklichen Werten übrig, welche analog wie beim Meridiankreise ermittelt und in Rechnung gebracht werden müssen, falls das Instrument zu genauern oder sogar zu absoluten Bestimmungen verwendet werden soll [b].

Zu 388: *a.* Um ein Equatoreal vorläufig zu ajüstieren, kann man in folgender Weise vorgehen: Man hängt an die Axe des Deklinationskreises eine Libelle, — stellt sie durch Drehen am Stundenkreise ein, — kehrt sie um und verbessert an ihr den halben Ausschlag. — Dann dreht man den Stundenkreis um 12^h, d. h. verwechselt die Lager und verbessert den halben Ausschlag an ihnen. Hat das Fernrohr ein Fadenkreuz, so centriert man dasselbe, stellt es sodann auf ein Objekt ein, legt das Fernrohr in den Lagern um, oder schlägt es nach Drehen um 12^h durch und korrigiert die halbe Abweichung an den betreffenden Korrektionsschrauben. Da die Fernrohraxe infolge der zwei ersten Operationen horizontal und dem Stundenkreise parallel ist, so muss sie, wenn letzterer im Equator liegt, der einzigen horizontalen Richtung des Equators, d. h. der Linie Ost-West, parallel sein, folglich die nach der dritten Operation zur Drehaxe senkrechte optische Axe des Fernrohrs im Meridiane spielen oder das Fadenkreuz das Meridianzeichen treffen. Es wird nun der Meridianpunkt des Stundenkreises abgelesen, beziehungsweise auf Null gebracht. Endlich stellt man das Fadenkreuz auf einen im Meridiane befindlichen Punkt bei normaler Lage des Fernrohrs, und dann nach Drehen des Fernrohrs um 180° und Durchschlagen nochmals ein; die halbe Summe der Ablesungen am Deklinationskreise giebt sodann den Polpunkt des Instrumentes, und es soll daher die mit seiner Hilfe für einen dem Zenite nahen, also durch die Refraktion unbeeinflussten, culminierenden Stern sich ergebende Poldistanz die Deklination desselben zu 90° ergänzen, — geschieht es nicht, so ist die Neigung der Hauptaxe des Instrumentes entsprechend zu verändern. — *b.* Bestimmen μ, $180^\circ - \gamma$ und m die Lage des angeblichen Poles (P') und Meridianes eines vorläufig korrigierten Equatoreales gegen den wirklichen Pol (P) und Meridian, so erhält man zwischen den auf die beiden Systeme bezüglichen Werten von Stundenwinkel (τ_1 oder τ) und Deklination (δ_1 oder δ) eines Sternes S aus Dreieck P'SP die Beziehungen



$$\mathrm{Si}\,\delta = \mathrm{Si}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\mu + \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Co}(\tau_1 + \mathrm{m}) \qquad \mathrm{Si}\,\delta_1 = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\mu - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Co}(\tau + \gamma)$$

$$\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,(\tau + \gamma) = \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) - \mathrm{Si}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\mu$$

$$\mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau + \gamma) + \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\mu \qquad 1$$

$$\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(\tau + \gamma) = \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + \mathrm{m})$$

von denen die 1., 3. und 5., oder die 2., 4. und 5. die einen aus den andern zu berechnen lehren, wenn die μ, γ und m einmal bekannt sind. — Da jedoch μ als klein betrachtet und somit auch $\delta_1 \doteq \delta$, sowie $\tau_1 + \mathrm{m} \doteq \tau + \gamma$ gesetzt werden darf, so können den 1 bequemere Näherungsformeln substituiert werden: Subtrahiert man nämlich unter dieser Voraussetzung die ersten zwei 1 von einander, so erhält man

$$\mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) \cdot \mu\,\mathrm{Si}\,1'' \doteq \mathrm{Si}\,\delta - \mathrm{Si}\,\delta_1 \doteq (\delta - \delta_1) \cdot \mathrm{Co}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

folglich
$$\delta \doteq \delta_1 + \mu \cdot \mathrm{Co}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) \qquad 2$$

und mit Hilfe dieser Beziehung ergiebt sich, wenn man in der letzten 1

beidseitig $\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + \mathrm{m})$ abzieht, ohne Schwierigkeit

$$\tau = \tau_1 + \mathrm{m} - \gamma + \mu \cdot \mathrm{Tg}\,\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(\tau_1 + \mathrm{m}) \qquad 3$$

so dass 2 und 3 jene Aufgaben wirklich in bequemster Weise zu lösen erlauben. — Um die für beide Formelnsysteme nötigen Werte von μ, γ und m, sowie den Indexfehler Δ des Deklinationskreises zu bestimmen, sucht man mit Hilfe des Niveaus den $\tau_1 = 0$ entsprechenden Punkt des Stundenkreises auf, — stellt sodann das Instrument successive auf $\tau_1 = 0$, 90, 180 und 270° ein, — wartet in jeder dieser Stellungen den Durchgang eines Sternes von bekannter (nach 177 : 7—9 auf die scheinbare Lage reduzierter) Position ab, — und notiert teils die Sternzeit, teils die sich am Deklinationskreise ergebende Ablesung $\mathrm{a} = \delta_1 - \Delta$. Man hat sodann nach 2

$$\delta' = \mathrm{a}' + \Delta + \mu \cdot \mathrm{Co\,m} \qquad \delta''' = \mathrm{a}''' + \Delta - \mu \cdot \mathrm{Co\,m}$$
$$\delta'' = \mathrm{a}'' + \Delta - \mu \cdot \mathrm{Si\,m} \qquad \delta'''' = \mathrm{a}'''' + \Delta + \mu \cdot \mathrm{Si\,m}$$

also $$\Delta = \tfrac{1}{4}\,(\Sigma\,\delta - \Sigma\,\mathrm{a}) \qquad 4$$

und $$\mu \cdot \mathrm{Co\,m} = \tfrac{1}{2}\,[\delta' - \delta''' - (\mathrm{a}' - \mathrm{a}''')] \qquad \mu \cdot \mathrm{Si\,m} = \tfrac{1}{2}\,[\delta'''' - \delta'' - (\mathrm{a}'''' - \mathrm{a}'')] \qquad 5$$

so dass sich Δ, μ, m sofort ergeben, und sodann auch γ gefunden werden kann, indem man diese Werte, sowie den aus der Sternzeit der Beobachtung im Vergleich mit der Rektascension des benutzten Sternes erhaltenen Stundenwinkel τ in die 3 einführt. — Der beschränkte Raum erlaubt mir nicht, neben dieser wohl einfachsten Behandlungsweise noch andere, z. B. die Anwendung einer Libelle nicht benötigende Verfahren auseinander zu setzen, sowie überhaupt auf weitern Detail einzutreten, und ich muss dafür auf die Specialarbeiten „J. J. **Littrow**, On the rectification of the equatoreal instrument (Mem. astr. Soc. II von 1826), — **Hansen**, Die Theorie des Equatoreal's (Sächs. Abh. IV von 1856, — auch: Leipzig 1855 in 8.), — etc.“, sowie auf einige der früher erwähnten grössern Werke über sphärische Astronomie, verweisen.

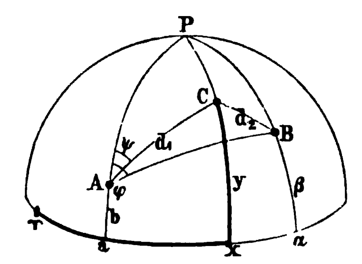
XV. Die relativen Messungen.

Schaffen und Streben ist Gottes Gebot, — Arbeit ist Leben, Nichtsthun der Tod. (Venedey.)

---

389. Regiomontans Bestimmungen durch Alignements. — Die Lage eines Gestirnes kann nicht nur wie im vorhergehenden Abschnitte **absolut**, d. h. durch direkte Messung seiner Coordinaten, sondern sie kann auch **relativ**, d. h. dadurch erhalten werden, dass man den Lagen-Unterschied gegen bereits bekannte Sterne ermittelt. Schon **Regiomontan** löste diese letztere Aufgabe in der Weise, dass er die Abstände des nach seiner Lage unbekannten Gestirnes von zwei bekannten Sternen mass[a], — dabei wo möglich die beiden Sterne so wählend, dass sie mit dem zu bestimmenden Gestirne in demselben grössten Kreise zu liegen oder mit ihm zu **alignieren** schienen[b].

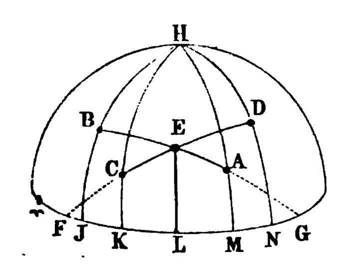
Zu 389: *a.* Sind a, b und α, β die bekannten Coordinaten zweier Sterne A und B, — d_1 und d_2 aber die gemessenen Distanzen eines Gestirnes C von denselben, so kann man aus den Dreiecken APB, ACB und APC offenbar successive AB, φ, $\varphi - \psi$, $90^0 - y$ und $x - a$ berechnen, also in der That schliesslich die gesuchten Coordinaten x und y von C finden, wie dies schon **Regiomontan** in seiner, nachmals durch Schoner in den „Scripta Regiomontani. Norimbergæ 1544 in 4." publizierten Abhandlung „De cometæ problemata XVI" lehrte. — *b.* Sucht man, z. B. mit Hilfe eines gespannten Fadens, zwei Sterne A und B auf, welche mit C in einer Geraden zu liegen scheinen, so wird die Rechnung sehr vereinfacht und in $AB = d_1 + d_2$ eine Probe für Messung und Rechnung erhalten, dagegen die Auswahl der Sterne wesentlich beschränkt, so dass **Regiomontan** z. B. zur Bestimmung des Kometen von 1472 (vgl. 280) für gut fand, von dieser Vereinfachung Umgang zu nehmen. — Noch bleibt beizufügen, dass **Regiomontan** und **Walther** bei Anwendung dieser Methode die Distanzen mit dem **Baculus astronomicus** (vgl. 433) bestimmten, während Landgraf **Wilhelm** und **Tycho**, welche bei ihren Ortsbestimmungen (373) diese Methode ebenfalls

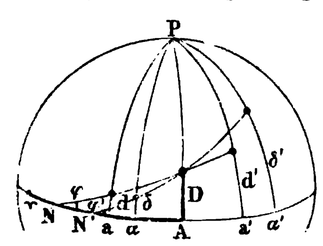


vielfach anwandten, und ebenso **Bürgi** bei der wichtigen Marsbeobachtung, welche er (89) in der Frühe des 23. Dezember 1590 machte, den Baculus mit dem grössere Genauigkeit bietenden Quadranten vertauschten.

390. Die Methode von Mästlin. — Neben der Methode von Regiomontan ist die bei Anlass des Wundersternes von 1572 (vgl. 287) durch Michael **Mästlin** eingeführte, jede Anwendung von Instrumenten ausschliessende und somit **reine** Alignements-Methode zu erwähnen, bei welcher der Ort eines Gestirnes aus den Coordinaten zweier Sternpaare berechnet wird, deren jedes mit ihm in einer Geraden zu stehen scheint [a]. Es besitzt diese Methode noch für unsere Zeit, allerdings namentlich für nachträgliche Ausnutzung älterer Angaben, eine gewisse Bedeutung, und es sind darum die betreffenden Rechnungsvorschriften auch von neuern Mathematikern wiederholt revidiert worden [b].

Zu 390: *a.* Beim Auftreten des Wundersternes von 1572 war **Mästlin** noch ein junger Theologe ohne Anstellung und Instrumente, und da er dennoch die Lage der Nova E zu bestimmen wünschte, so suchte er mit einem gespannten Faden zwei Sternpaare A, B und C, D auf, welche mit ihr je in einer Geraden zu liegen schienen, und bestimmte sodann aus deren Coordinaten diejenigen von E durch Rechnung, indem er sich nach und nach durch die Dreiecke BHA, JBG, CHD, CFK, FEG und EFL durcharbeitete, was allerdings nicht weniger als 43 Eingänge in die Tafeln erforderte. — Seine betreffende, von 1573 III 4 datierte Flugschrift „Demonstratio astronomica loci stellæ novæ“ scheint sich jedoch nur dadurch erhalten zu haben, dass sie von **Tycho** in seine „Progymnasmata (p. 544—48)“, von Adr. **Metius** in seine „Universæ astronomiæ institutio. Franeckeræ 1605 in 8.“ aufgenommen wurde, und aus letzterer Schrift „in einfaltig Teutsch vertirt“ in das 1619 von „Mathæus **Beger**, Mathematophilus Reitlingensis“ publizierte Schriftchen „Problema astronomicum. Die Situs der Sternen, Planetarum und Cometarum zu observiren ohne Instrumente, allein mit einem geraden Lineal oder Faden (s. l.). 8 S. in 4.“ überging. — Es bleibt beizufügen, dass dieses scheinbar so primitive Verfahren, welches z. B. noch von Jak. **Bernoulli** „auss Mangel dazu gehöriger Instrumente“ auf den Kometen von 1680 angewandt wurde, ganz brauchbare Resultate ergab, — ja, wie sich schon **Tycho** überzeugte, sogar bessere als die meisten der von Vorgängern und Zeitgenossen gemachten Messungen von Höhe und Azimut, von blossen Aufzeichnungen à vue gar nicht zu sprechen. — *b.* So z. B. hat **Olbers** in seiner Note „Den Ort eines Gestirnes aus beobachteten Alignements zu finden (Berl. Jahrb. 1822)“ folgenden Weg eingeschlagen: Bezeichnen a, a' und α, α' die Rektascensionen, d, d' und δ, δ' aber die Deklinationen der ihrer Lage nach als bekannt voraus-





gesetzten zwei Sternpaare, A und D aber Rektascension und Deklination des eingeschnittenen Kometen, so ergeben sich aus der vorstehenden Figur die Beziehungen

$$\mathrm{Tg}\,d = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,(a - N) \qquad \mathrm{Tg}\,d' = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,(a' - N)$$
$$\mathrm{Tg}\,\delta = \mathrm{Tg}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - N') \qquad \mathrm{Tg}\,\delta' = \mathrm{Tg}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha' - N') \qquad \mathbf{1}$$

also durch Elimination von φ oder φ'

$$\mathrm{Tg}\,(a - N) = \frac{\mathrm{Si}\,(a' - a) \cdot \mathrm{Tg}\,d}{\mathrm{Tg}\,d' - \mathrm{Co}\,(a' - a)\,\mathrm{Tg}\,d} \qquad \mathrm{Tg}\,(\alpha - N') = \frac{\mathrm{Si}\,(\alpha' - \alpha) \cdot \mathrm{Tg}\,\delta}{\mathrm{Tg}\,\delta' - \mathrm{Co}\,(\alpha' - \alpha) \cdot \mathrm{Tg}\,\delta} \qquad \mathbf{2}$$

Setzt man nun $\qquad a - N = w \qquad \alpha - N' = w' \qquad$ **3**

so erhält man mit Hilfe von 1 die bequemen Formeln

$$\mathrm{Tg}\left(w + \frac{a' - a}{2}\right) = \frac{\mathrm{Si}\,(d' + d)}{\mathrm{Si}\,(d' - d)} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{a' - a}{2}$$
$$\mathrm{Tg}\left(w' + \frac{\alpha' - \alpha}{2}\right) = \frac{\mathrm{Si}\,(\delta' + \delta)}{\mathrm{Si}\,(\delta' - \delta)} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{\alpha' - \alpha}{2} \qquad \mathbf{4}$$

nach welchen sich w und w' und sodann nach 3 und 1 auch die N, N', φ, φ' finden lassen. Sodann hat man den 1 entsprechend

$$\mathrm{Tg}\,D = \mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,(A - N) \qquad \mathrm{Tg}\,D = \mathrm{Tg}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A - N') \qquad \mathbf{5}$$

somit durch Elimination von D

$$\mathrm{Tg}\,(A - N) = \frac{\mathrm{Si}\,(N' - N) \cdot \mathrm{Ct}\,\varphi}{\mathrm{Co}\,(N' - N) \cdot \mathrm{Ct}\,\varphi - \mathrm{Ct}\,\varphi'} \qquad \mathbf{6}$$

oder, wenn

$$A - N = \frac{N' - N}{2} + x \qquad \mathbf{7}$$

gesetzt wird

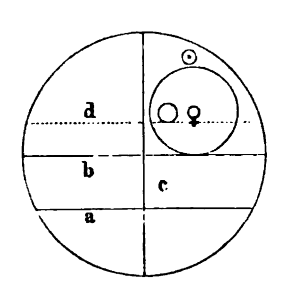
$$\mathrm{Tg}\,x = \frac{\mathrm{Si}\,(\varphi' + \varphi)}{\mathrm{Si}\,(\varphi' - \varphi)} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{N' - N}{2} \qquad \mathbf{8}$$

kann somit nach 8, 7, 5 successive auch die x, A und D finden, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist, und zwar, wie **Olbers** mit Befriedigung hervorhebt, mittelst bloss 20-maligem Eingehen in die Tafeln. — Für etwas andere Behandlung desselben Problemes vgl. „**Pingré**, Cométographie. Paris 1783—84, 2 Vol. in 4. (II 221—26), — **Delambre**, Astronomie théorique et pratique. Paris 1814, 3 Vol. in 4. (I 466—71), — **Bessel**, Berechnung des Ortes eines Gestirnes aus beobachteten Alignements von 4 Sternen (Berl. Jahrb. 1821 und Abh. I 316), — S. **Günther**, Ein Ortsbestimmungsproblem der sphärischen Astronomie (Z. für M. Ph. 26 von 1881), und: Das Alignementsproblem der sphärischen Trigonometrie (Beiträge zur Geschichte der neuern Mathematik. Ansbach 1881 in 8.), — Edmund **Weiss** (Freiwaldau in österr. Schlesien 1837 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Wien); Über die Bestimmung des Ortes eines Gestirnes durch den Durchschnitt zweier grössten Kugelkreise (Z. für M. Ph. 26 von 1881), — etc.“

391. Die Schraubenmikrometer von Gascoigne und Auzout. — Schon bei der ersten Anwendung des Fernrohrs auf astronomische Beobachtungen ergab sich das Bedürfnis, die Distanzen der gleichzeitig im Gesichtsfelde liegenden Punkte oder die Durchmesser der scheibenförmig erscheinenden Wandelsterne zu bestimmen[a], und dies veranlasste **Gascoigne**, sowie etwas später auch **Auzout**, im Gesichtsfelde des Fernrohrs ein sog. **Schraubenmikrometer** anzubringen, d. h. eine Vorrichtung, bei welcher parallele Lamellen oder Faden mittelst Schrauben, also messbar, gegen einander ver-

schoben, somit zur Coincidenz miteinander und mit den zu vergleichenden Punkten oder Rändern gebracht werden konnten [b]. Ihr Beispiel fand bald vielfache Nachahmung, und es entstand nach und nach eine ganze Reihe von solchen, im Principe mit den frühern übereinstimmenden, aber auch einzelne Modifikationen zeigenden Apparaten, mit welchen gar manche die Astronomie fördernde Daten erhalten wurden [c].

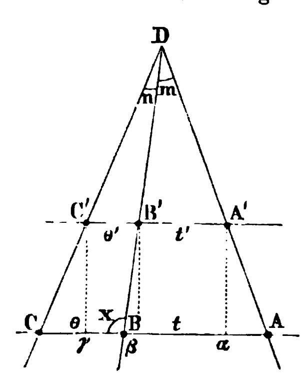
Zu 391: *a.* Obschon **Galilei** nur über holländische Fernröhren verfügte, suchte er doch schon einzelne solche Bestimmungen zu erhalten, indem er die in Frage kommenden Distanzen durch Abschätzen mit dem Durchmesser des Gesichtsfeldes verglich, wohl auch die zwischen Ein- und Austritt fallenden Schwingungen eines Pendels zählte, etc. — *b.* Dem (331) bei Anlass der Fadennetze Gesagten bleibt nur beizufügen, dass **Gascoigne** nach den bereits citierten Quellen spätestens von 1640 hinweg die Durchmesser von Sonne und Mond, die Distanzen der Pleyadensterne, etc. dadurch mass, dass er sie zwischen zwei mit Schrauben gegen einander verschiebbare Lamellen oder Faden fasste, — dass jedoch sein Verfahren damals nicht sofort allgemein bekannt wurde und so z. B. **Auzout** kaum etwas von demselben wusste, als er 1666 zu gleichem Zwecke ein verwandtes Mittel auffand und sodann in seinem „Traité du Micromètre ou manière exacte pour prendre le diamètre des planètes et la distance entre les petites étoiles. Paris 1667 in 4.“ beschrieb. Das Wesentliche des neuen Mikrometers bestand darin, dass bei ihm feste und zu ihnen parallel verschiebbare Faden kombiniert waren, und der Abstand der letztern von den erstern dadurch bestimmt wurde, dass man die Schraubenumgänge zählte, welche nötig waren, um die Coincidenz beider wieder herbeizuführen; aber die Schrauben waren damals leider noch so unvollkommen, dass **Picard** alsbald vorzog, dieselben nur zum Stellen der Faden zu benutzen, und die Distanzen dagegen dadurch zu bestimmen, dass er nach jeder Einstellung die Fadenplatte abnahm, dieselbe über eine Teilung legte und an dieser die Distanz mikroskopisch ablas. — *c.* Zwischen Gascoigne und Auzout fällt **Divini**, welcher in der seiner Tafel (234) beigegebenen Legende ausdrücklich sagt, dass er 1649 zur Aufnahme des Mondes ein astronomisches Fernrohr mit Fadennetz (telescopio instructo versus oculum, non vitro concavo, sed lente vitrea subtilissimis filis ad instar craticulæ dispositis operta) benutzt habe; also zwar Anspruch darauf hat, unter den ersten Mikrometrikern genannt zu werden, jedoch der Zeit nach gegen Gascoigne und der Bedeutung nach auch gegen Auzout zurücksteht. — Das von Gottfried **Kirch** (Guben 1639 — Berlin 1710; erst Schüler von Weigel, dann Gehilfe von Hevel, Kalendersteller in Guben, zuletzt erster Astronom der Berliner Akademie) 1696 in seinem Kalender beschriebene und früher in Deutschland häufig gebrauchte Mikrometer entsprach dem von Gascoigne, nur fehlten die Faden, und es wurden die nach ihrem Abstande zu messenden Punkte direkt zwischen die Schraubenspitzen gebracht. — Die Schraubenmikrometer, welche Ph. de **Lahire** 1702 in seinen „Tabulæ astronomicæ (p. 66)“ und J. L. **Rost** in seinem „Aufrichtigen Astronomus (p. 300—13)“ beschrieben, stimmen wesentlich mit dem von Auzout und namentlich auch miteinander überein. Letzteres rührt davon her, dass Rosts Bruder Joh. Karl 1725 bei dem über Nürnberg nach Petersburg reisenden Delisle ein solches Lahire'sches Mikrometer sah und dann eigenhändig nachbildete, — immerhin mit der Modifikation, dass er noch einen festen Horizontal-



faden und zwei feste Faden unter 45° beifügte. — Das parallaktisch montierte Fernrohr, mit welchem **Chappe** d'Auteroche 1769 in Kalifornien den Venusdurchgang beobachtete, besass ein Schraubenmikrometer mit drei festen Faden a, b, c und einem beweglichen Faden d. Um den Schraubenwert zu bestimmen, liess Chappe den einen Sonnenrand längs a laufen und brachte d mit dem andern zum Kontakt; um die Lage der Venus gegen die Sonne zu erhalten, wurde entsprechend der Figur disponiert und zugleich beobachtete man die Durchgänge der vier Ränder durch c.

392. Das Rautennetz von Bradley. — Beobachtet man die Durchgangszeiten zweier Sterne durch drei Faden oder Lamellen, welche bekannte Winkel miteinander bilden, so kann man aus diesen Zeiten die Rektascensions- und Deklinationsdifferenzen der beiden Sterne berechnen [a]. Besonders einfach gestaltet sich die Sache, wenn man, wie es **Bradley** bei Konstruktion seines **Rautennetzes** gehalten hat, die Anordnung so trifft, dass der Mittelfaden den Winkel der beiden andern Faden halbiert, und es wurde somit sein Vorschlag, der die um die Mitte des vorigen Jahrhunderts noch sehr unvollkommene Schraube entbehrlich machte, mit Recht sehr beifällig aufgenommen [b]. Auch noch später wurden mehrmals verwandte mikrometrische Vorrichtungen zur Anwendung empfohlen [c].

Zu 392: *a.* Sind nämlich m und n die gegebenen Winkel, — t, θ, t', θ' aber die aus Beobachtung der beiden Sterne geschlossenen, bereits entsprechend 378 mit $15 \cdot \text{Co}\, D$ (wo D für den unbekannten Stern abgeschätzt wird) multiplizierten Werte von AB, BC, A'B' und B'C', endlich x der Winkel, welche der mittlere Faden mit den durch die Sterne beschriebenen Parallelkreisen bildet, so erhält man aus der Figur unmittelbar



$$\frac{\theta}{t} = \frac{BC}{BD} \cdot \frac{BD}{AB} = \frac{\text{Si}\, n \cdot \text{Si}\,(x - m)}{\text{Si}\, m \cdot \text{Si}\,(x + n)} \qquad 1$$

$$\frac{\theta}{t + \theta} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{\text{Si}\, n \cdot \text{Si}\,(x - m)}{\text{Si}\,(m + n) \cdot \text{Si}\,(x - m + m)} \qquad 2$$

und aus letzterm Ausdrucke folgt

$$\text{Ct}\,(x - m) = \frac{t \cdot \text{Si}\, n - \theta \cdot \text{Si}\, m \cdot \text{Co}\,(m + n)}{\theta \cdot \text{Si}\, m \cdot \text{Si}\,(m + n)} \qquad 3$$

wonach x berechnet werden kann. — Bezeichnet d den Deklinationsunterschied der beiden Sterne, so hat man wegen $t - t' = A\alpha + B\beta$ und $\theta - \theta' = C\gamma - B\beta$

$$d = (t - t') \cdot \frac{\text{Si}\,(x - m) \cdot \text{Si}\, x}{\text{Si}\, m} = (\theta - \theta') \cdot \frac{\text{Si}\,(x + n) \cdot \text{Si}\, x}{\text{Si}\, n} \qquad 4$$

Bezeichnen ferner A, B, C, A', B', C' die Durchgangszeiten durch die betreffenden Punkte, so ist die Rektascensionsdifferenz der beiden Gestirne

$$a = A - A' + \frac{A\alpha}{15 \cdot Co\,D} = B - B' - \frac{B\beta}{15 \cdot Co\,D} = C - C' - \frac{C\gamma}{15 \cdot Co\,D} \qquad 5$$

wo mit Hilfe von 1 und 4

$$\begin{aligned} A\alpha &= d \cdot Ct\,(x - m) = (t - t') \cdot \frac{Si\,x \cdot Co\,(x - m)}{Si\,m} \\ B\beta &= d \cdot Ct\,x \qquad = \frac{\theta}{t} \cdot (t - t') \cdot \frac{Co\,x \cdot Si\,(x + n)}{Si\,n} \\ C\gamma &= d \cdot Ct\,(x + n) = \frac{\theta}{t} \cdot (t - t') \cdot \frac{Si\,x \cdot Co\,(x + n)}{Si\,n} \end{aligned} \qquad 6$$

ist, somit die Aufgabe als gelöst erscheint. — *b.* Für den speciellen Fall, wo $m = n$ ist, folgt aus 3

$$Ct\,(x - m) = \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \qquad \text{oder} \qquad Tg\,x = \frac{t + \theta}{t - \theta} \cdot Tg\,m \qquad 7$$

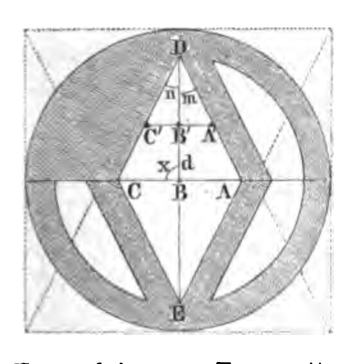
somit auch

$$\begin{aligned} Si\,2x &= \frac{(t^2 - \theta^2) \cdot Si\,2m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} & Si^2\,x &= \frac{(t + \theta)^2 \cdot Si^2\,m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \\ Co\,2x &= \frac{(t^2 + \theta^2) \cdot Co\,2m - 2t\theta}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} & Co^2\,x &= \frac{(t - \theta)^2 \cdot Co^2\,m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \end{aligned} \qquad 8$$

und mit Hilfe hievon aus 4 und 6

$$d = \frac{\theta\,(t - t')\,(t + \theta)\,Si\,2m}{t^2 + \theta^2 - 2t\theta \cdot Co\,2m} \qquad 9$$

$$A\alpha = d \cdot \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \qquad B\beta = d \cdot \frac{t - \theta}{t + \theta} \cdot Ct\,m \qquad C\gamma = d \cdot \frac{t - \theta \cdot Co\,2m}{\theta \cdot Si\,2m} \qquad 10$$



Dieser specielle Fall entspricht aber dem von **Bradley** eingeführten **Rautennetz** (réticule romboide), welches **Lacaille** am Kap fast ausschliesslich benutzte, ja das noch später vielfach im Gebrauch war. Es wurde nämlich zu dessen Konstruktion entsprechend der beistehenden Figur auf einer Kupfertafel das Netz verzeichnet und dann die Tafel so ausgeschnitten, dass nur der Ring, der Rhombus und ein Segment stehen blieb; gewöhnlich wurden noch zwei Diagonalfaden AC und DE beigegeben und das Netz so gestellt, dass AC einem Parallel entsprach. Laut dieser Konstruktion war $Tg\,m = 1/2$, $Si\,2m = 4/5$ und $Co\,2m = 3/5$, also nach 7, 9 und 10

$$Tg\,x = \frac{t + \theta}{2\,(t - \theta)} \qquad d = \frac{4\theta\,(t - t')\,(t + \theta)}{5\,(t^2 + \theta^2) - 6t\theta} \qquad 11$$

$$A\alpha = d \cdot \frac{5t - 3\theta}{4\theta} \qquad B\beta = 2d \cdot \frac{t - \theta}{t + \theta} \qquad C\gamma = d \cdot \frac{5t - 3\theta}{4\theta} \qquad 12$$

Fällt DE mit einem Deklinationskreise zusammen, so wird $t = \theta$ und $t' = \theta'$, und somit nach 11 und 12, wenn AC der Weg des einen Sternes ist,

$$\begin{aligned} x = 90^0 \qquad A\alpha = t - t' \qquad B\beta = 0 \qquad C\gamma = t - t' \\ d = 2\,(t - t') = AC - A'C' = 15\,(C - C' - A + A')\,Co\,D \end{aligned} \qquad 13$$

und nach 5 $\qquad a = \tfrac{1}{2}\,(A - A') + \tfrac{1}{2}\,(C - C') = B - B' \qquad 14$

so dass der Mittelfaden, dessen Anwendung Beleuchtung erfordern würde, entbehrlich ist; das dunkle Segment lässt ohne Beleuchtung unterscheiden, ob

der zu bestimmende Stern über oder unter der Mitte durchgeht, da er nur in ersterm Falle dauernd verschwindet. — *c.* Vgl. „J. C. **Burckhardt**, Über den Gebrauch eines vollkommenen Vierecks statt des Bradley'schen Rhomboidalnetzes. (Mon. Corr. I von 1800), — B. **Valz**, Description d'un nouveau réticule (Corr. astr. III 353 von 1819)", — sowie die auf letztere bezüglichen Bemerkungen von **Horner** (Brief an Gautier von 1831 IV 22 in Notiz 352).

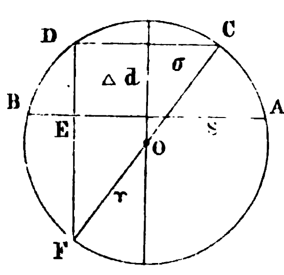
393. Einige andere Mikrometer früherer Zeit. — Neben den bereits beschriebenen Mikrometern und den im folgenden als Hilfsmittel der Gegenwart einlässlich zu behandelnden Kreis-, Doppelbild- und Positions-Mikrometern, wurden zeitweise noch mehrere andere mikrometrische Vorrichtungen benutzt, von welchen z. B. die keilförmigen Lamellen von **Huygens** [a], die Gitterwerke der **Malvasia** und **Mayer** [b] und die Glasmikrometer von **Brander** [c] erwähnt werden mögen [d].

Zu 393: *a.* Am Schlusse seines „Systema Saturninm. Hagæ Com. 1659 in 4." erwähnt **Huygens**, dass er zur Messung der scheinbaren Durchmesser der Planeten oder anderer kleiner Winkel folgendes Verfahren angewandt habe: Er befestigte in der Bildebene seines Fernrohrs eine kupferne Platine mit kreisrunder Öffnung, deren scheinbaren Durchmesser er aus der Zeit ermittelte, welche ein equatorealer Stern brauchte, um ihn zu durchlaufen, dabei 4^s auf $1'$ rechnend; dann schob er durch am Rohr angebrachte Öffnungen eine schmale und lange (mutmasslich mit einer Scale versehene) keilförmige Lamelle so weit in die Bildebene ein, dass sie das zu messende Interval deckte, — mass die Breite an der Deckungsstelle mit einem Zirkel, — verglich sie mit dem Durchmesser seines Diaphragmas, in welchem einzelne fälschlich ein Kreismikrometer erkennen wollten, — und erhielt schliesslich aus einem Dreisatz den gewünschten scheinbaren Durchmesser oder Winkelabstand. — *b.* Dem in 331 über **Malvasias** Quadratgitter gesagten ist beizufügen, dass er dasselbe zur Bestimmung der Distanz zweier Faden so drehte, dass ein equatorealer Stern einem zu ihnen senkrechten Faden folgte; ferner ist zu bemerken, dass, wohl unabhängig von ihm und von einander, auch durch den Würzburger Canonicus Joh. **Zahn** (vgl. dessen „Oculus artificialis teledioptricus. Herbipoli 1685 in fol.") und den unvergesslichen Tob. **Mayer** (vgl. die „Kosmographischen Nachrichten und Sammlungen. Nürnberg 1750 in 4.") entsprechend auf Glas entworfene Gitter zur Aufnahme von Mondlandschaften, Sternhaufen u. dgl. empfohlen und wenigstens von letzterm wirklich ausgeführt und gebraucht wurden. Während jedoch **Zahn** sein Gitter mit dem Diamant einritzen wollte, so fürchtete **Mayer**, es möchte bei dieser Operation „das Glas seitwärts ausspritzen", — überzog nun das Glas mit Tusche, — und entfernte dann dieselbe, „nachdem sie trocken geworden", mit einem feinen (wie zum Schreiben geschnittenen, jedoch spaltlosen) Federkiel bis auf zwei zu einander senkrechte Systeme von Parallelen. Auch die Fadensysteme, welche er für seine Quadranten, etc., nötig hatte, erstellte sich **Mayer** (vgl. Kästners astron. Abh. II 257) auf diese Weise. — *c.* Später gelang es **Brander**, mit dem Diamant reine Linien von kaum $1/_{200}''' = 11''$ Breite zu ritzen und so ganz vorzügliche Glasmikrometer zu erstellen, auf welche sodann **Lambert** durch seine „Anmerkungen über die Brander'schen Mikrometer von Glas. Augsburg 1769 in 8." die Aufmerksamkeit lenkte. Ich besitze selbst ein von **Brander** für

mikroskopische Messungen bestimmtes Netz von 8''' P. Seite, bei dem das äusserste Quadrat in Quadratlinien, — ein inneres von 6''' Seite in Viertelsquadratlinien, — das innerste von 4''' Seite sogar in Hundertstelsquadratlinien geteilt ist, — und dennoch alle Linien durch die Loupe tadellos erscheinen. — *d.* Alle übrigen Hilfsmittel für mikrometrische Messungen, welche von Dom. **Cassinis** etwa 1696 proponierten „Réticule de 45°" bis zu dem von **Stampfer** 1841 ausgedachten „Lichtpunkt-Mikrometer" und noch seither vorgeschlagen wurden, auch hier aufzuzählen, würde mich viel zu weit führen.

394. Das Kreismikrometer. — Die glückliche Idee von **Boscovich**, dass man den im Fernrohr durch das letzte Diaphragma gebildeten Kreis als Mikrometer gebrauchen könne, indem sich bei bekanntem Radius aus der keine Beleuchtung erfordernden Beobachtung der Ein- und Austrittszeiten zweier Gestirne der Positionsunterschied dieser letztern berechnen lasse [a], wurde alsbald nach allen Richtungen weiter ausgebildet [b], und nachdem **Olbers** und **Bessel** die praktische Brauchbarkeit dieses **Kreismikrometers** erwiesen und seine Theorie allseitig festgestellt hatten [c], gelang es **Fraunhofer**, dasselbe in so vorzüglicher Weise darzustellen, dass es den übrigen Präcisionsinstrumenten ebenbürtig wurde [d].

Zu 394: *a.* Durch den Kometen von 1739 veranlasst, zeigte **Boscovich** in seiner „De novo telescopii usu ad objecta coelestia determinanda Dissertatio. Roma 1739 in 4. (auch Nova acta erudit. 1740, pag. 158—67)", dass gerade für Vergleichung eines solchen, eine Feldbeleuchtung kaum erlaubenden Objektes, mit einem benachbarten Sterne die Beobachtung ihrer Ein- und Austrittszeiten in das Gesichtsfeld des Fernrohrs ein passendes Hilfsmittel abgebe, d. h. die Rektascensions- und Deklinations-Differenz zu berechnen erlaube. Es war ihm nämlich nicht nur klar geworden, dass, wenn t_1 und t_2 die für den Stern (a, d), τ_1 und τ_2 aber die für den Kometen erhaltenen Zeiten bezeichnen, die Rektascensionsdifferenz



$$\Delta a = \tfrac{1}{2}(\tau_1 + \tau_2) - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) \qquad \mathbf{1}$$

sei, sondern dass laut beistehender Figur, wenn 2 s und 2 σ die von den beiden Gestirnen durchlaufenen Sehnen sind, Δ d aber deren dem Deklinationsunterschiede gleiche Distanz und r den Radius des Kreises bezeichnet, die Beziehungen

$$2s = 15(t_2 - t_1)\cdot \mathrm{Co\,d} \qquad 2\sigma = 15(\tau_2 - \tau_1)\cdot \mathrm{Co\,d}$$

$$BE = s - \sigma \quad EA = s + \sigma \quad BE\cdot EA = DE\cdot EF \text{ oder } s^2 - \sigma^2 = \Delta d\cdot(DF - \Delta d)$$

$$4r^2 = 4\sigma^2 + DF^2 = 4\sigma^2 + \left(\frac{s^2-\sigma^2}{\Delta d} + \Delta d\right)^2 = \frac{(s^2-\sigma^2)^2}{\Delta d^2} + 2(s^2+\sigma^2) + \Delta d^2 \qquad \mathbf{2}$$

bestehen, also bei bekanntem Radius des Diaphragmas (vgl. 395 und 398) sich auch die Deklinationsdifferenz berechnen lasse. — *b.* Nachdem nämlich der leere Kreis durch **Lacaille** (vgl. Mém. Par. 1742), **Koch** (vgl. Berl. Jahrb. 1793), etc., neuerdings als brauchbar erwiesen worden war, ersetzten ihn nahe gleichzeitig Joh. Gottfried **Köhler** (Gauernitz bei Dresden 1745 — Dresden 1801; Insp. d. math. Sal. in Dresden) und J. G. **Repsold** (vgl. Geogr. Eph. III 319

von 1799 und Brief Horner an Gautier von 1821 V 28 in Notiz 352) durch einen in der Bildebene aufgehängten schmalen Ring von Messing, so dass man die zu beobachtenden Gestirne schon vor ihrem Antritte sehen und überdies die Beobachtungen verdoppeln konnte. — *c.* In Beziehung auf die unter den folgenden Nummern speciell zu behandelnde Theorie des Kreismikrometers mag vorläufig erwähnt werden, dass sie schon durch **Boscovich** wesentlich über die grundlegenden 1 und 2 hinausgeführt, sodann durch die **Kästner** (vgl. dessen Astr. Abh.), **Fixlmillner** (vgl. die Acta astron. Cremif.), etc., weiter entwickelt, namentlich aber durch **Olbers** und **Bessel** (vgl. deren Briefwechsel) vielfach besprochen, und von letzterm in seiner Abhandlung „Über das Kreismikrometer (Mon. Corr. 24 von 1811)“ zu einem vorläufigen Abschlusse gebracht wurde. — *d.* Eine sehr bedeutende Verbesserung erhielten die **Kreis-** oder **Ringmikrometer** in konstruktiver Hinsicht, als **Fraunhofer** (vgl. Corr. astr. V von 1821) die Messingringe durch in Plangläser eingesetzte Stahlringe, wohl auch (vgl. A. N. 43 von 1823) durch auf Glastafeln eingeäzte konzentrische Kreise ersetzte, wobei jedoch nicht vergessen werden darf, dass letzteres Verfahren schon 1807 durch **Horner** (vgl. dessen Brief an Gautier von 1822 III 22 in Notiz 352) zur Anwendung gebracht worden war.

395. Die Bestimmung des Radius, der Rektascensions- und Deklinations-Unterschiede. — Um mit einem Kreismikrometer operieren zu können, muss man (vgl. 394) vor allem aus den Winkel kennen, unter welchem sein Radius von der Mitte des Objektives aus erscheint, d. h. seinen sog. scheinbaren Radius, der zur Not bei bekannter Focaldistanz aus dem wirklichen Radius abgeleitet [a], besser mit einem Winkelinstrument direkt gemessen [b], wohl am besten aber aus den Ein- und Austrittszeiten zweier bekannter Sterne berechnet wird [c]. — Ist einmal diese Fundamentalbestimmung durchgeführt, so hält es nicht schwer, die bei der letzterwähnten Methode benutzten geometrischen Beziehungen so zu arrangieren, dass nach ihnen unter vorläufiger Abschätzung der Deklinationsdifferenz zwischen dem bekannten und dem unbekannten Sterne diese letztere mit beliebiger Annäherung berechnet werden kann [d], — und die Rektascensionsdifferenz ergiebt sich (394) offenbar, indem man für jeden der beiden Sterne das Mittel aus den beobachteten Zeiten nimmt und diese Mittel vergleicht [e].

Zu 395: *a.* Bezeichnet R den wirklichen Radius des Kreismikrometers und P die Focaldistanz, so kann man den scheinbaren Radius r nach

$$\operatorname{Tg} r = R : P \qquad 1$$

berechnen; da aber hieraus

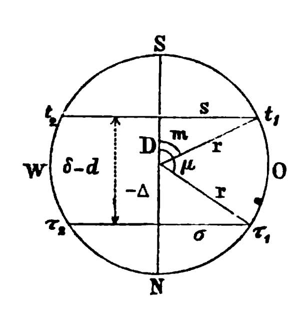
$$dr = \frac{P}{(P^2 + R^2) \cdot \operatorname{Si} 1''} \cdot dR - \frac{R}{(P^2 + R^2) \cdot \operatorname{Si} 1''} \cdot dP \qquad 2$$

folgt, woraus sich z. B. für $R = 12^{mm}$, $P = 1200^{mm}$, $dR = 0{,}1^{mm}$ und $dP = 1{,}0^{mm}$ successive

$$dr = 171'',8 \cdot dR - 1'',7 \cdot dP = \sqrt{17{,}2^2 + 1{,}7^2} = \pm 17'',3$$

ergiebt, so ersieht man, dass diese Bestimmungsweise ganz ungenügend ist — zugleich aber auch, wie notwendig es ist, das Mikrometer immer genau in

gleicher Distanz vom Objektiv zu erhalten. — *b.* Für die von **Gauss** beliebte direkte Messung von r vgl. 378. — *c.* Während **Boscovich** den Radius seines Diaphragmas (vgl. 398) mit Hilfe der Sonne bestimmte, und **Kästner** (l. c.) denselben aus der Durchgangszeit eines Sternes von bekannter Deklination, welchen er möglichst genau einem Durchmesser folgen liess, ableitete, so wandte dagegen schon **Fixlmillner** (l. c.) die jetzt noch meistgebrauchte Methode an, dafür zwei Sterne von bekannter Deklination zu verwenden. Es würde hiezu offenbar zur Not schon die von **Boscovich** aufgestellte 394 : 2 hinreichen, jedoch bietet folgende, überdies auch der Refraktion Rechnung tragende Entwicklung, welche wesentlich mit der von **Bessel** (l. c.) gegebenen übereinstimmt, noch bequemere Mittel: Besitzt ein unter der Polhöhe φ parallaktisch aufgestelltes Fernrohr den (angenähert am Stundenkreise ablesbaren) Stundenwinkel S, und bezeichnet t die halbe Differenz der Zeiten t_1 und t_2, zu welchen ein Stern (a, d) ein- und austritt, k aber die Refraktionskonstante, so ist (unter Beihilfe von 177 : 7, 9) nach den früher (394) entwickelten Grundsätzen die Hälfte der von dem Sterne im Abstande D vom Centrum durchlaufenen Sehne



$$s = 15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d' \quad \text{wo} \quad d' = d + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + d) \qquad 3$$

und

$$\mathrm{Tg}\,n = \mathrm{Ct}\,\varphi \cdot \mathrm{Co}\,S \qquad 4$$

ist. Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

$$\sigma = 15\,\tau \cdot \mathrm{Co}\,\delta' \quad \text{wo} \quad \delta' = \delta + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + \delta) \qquad 5$$

ist, und somit den Abstand der beiden Sehnen

$$D - \Delta = \delta' - d' = \delta + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + \delta) - [d + k \cdot \mathrm{Ct}\,(n + d)] =$$
$$= \delta - d - k \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d) \cdot \mathrm{Cs}\,(n + \delta) \cdot \mathrm{Cs}\,(n + d) \qquad 6$$

Anderseits ergiebt sich aus der Figur, dass

$$D - \Delta = r\,(\mathrm{Co}\,m - \mathrm{Co}\,\mu) = 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m)$$
$$\sigma \pm s = r\,(\mathrm{Si}\,\mu \pm \mathrm{Si}\,m) = 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu \pm m) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(\mu \mp m)$$

also

$$\mathrm{Tg}\,\frac{\mu + m}{2} = \frac{D - \Delta}{\sigma - s} \qquad \mathrm{Tg}\,\frac{\mu - m}{2} = \frac{D - \Delta}{\sigma + s} \qquad r = \frac{D - \Delta}{2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m)} \qquad 7$$

Man kann daher nach 3—7 successive n, s, σ, $D - \Delta$, μ, m und r berechnen, und da **Bessel** durch seine „Beobachtungen verschiedener Sterne der Pleyaden (Astr. Unters. I 209—38)“ die Möglichkeit verschafft hat, sich leicht ein passendes Sternenpaar auszusuchen, so unterliegt es somit keiner Schwierigkeit, den Radius durch wiederholte Beobachtungen auf das genaueste zu ermitteln. Dies bei verschiedenen Stellungen des Mikrometers auszuführen und dadurch zu prüfen, ob letzteres wirklich einen Kreis repräsentiere, dürfte seit **Fraunhofer** kaum mehr nötig sein. — *d.* Da nach oben, abgesehen von dem kleinen (in 397 speciell zu besprechenden) Einflusse der Refraktion

$$\mathrm{Si}\,m = 15\,t \cdot \mathrm{Co}\,d : r \qquad \mathrm{Si}\,\mu = 15\,\tau \cdot \mathrm{Co}\,\delta : r$$
$$\delta = d + 2\,r \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu + m) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\mu - m) \qquad 8$$

so kann man m direkt berechnen, — μ und δ aber durch Näherung, indem man vorerst im Ausdrucke für μ die Unbekannte δ durch d oder noch besser durch einen bei der Beobachtung abgeschätzten Wert ersetzt, — sodann mit dem erhaltenen Näherungswerte auch ein provisorisches δ berechnet, — mit diesem, unter Beihilfe der angemerkten logarithmischen Differenzen, die Rechnung wiederholt, — etc. — *e.* Die Rektascensionsbestimmung bedarf wohl

kaum einer weitern Erläuterung; dagegen mag noch beigefügt werden, dass man bei einem **Ringmikrometer**, anstatt jeden der beiden Kreise einzeln zu behandeln, zweckmässiger in folgender Weise vorgeht: Sind r' und r'' die beiden Radien, und setzt man

$$\tfrac{1}{2}(r' + r'') = r \qquad \tfrac{1}{2}(r' - r'') = \varrho \qquad \text{oder} \qquad r' = r + \varrho \qquad r'' = r - \varrho \qquad \mathbf{9}$$

so geht $r' \cdot Co\, m' = D = r'' \cdot Co\, m''$ in $(r + \varrho) \cdot Co\, m' = (r - \varrho) \cdot Co\, m''$ über, woraus

$$\varrho = r \cdot \frac{Co\, m'' - Co\, m'}{Co\, m'' + Co\, m'} = r \cdot Tg\, \frac{m' + m''}{2} \cdot Tg\, \frac{m' - m''}{2} \qquad \mathbf{10}$$

folgt. Ist ferner t_1, t_2, t_3, t_4 die Folge der beobachteten Zeiten, und bezeichnen s' und s'' die halben Sehnen, so hat man

$$r' \cdot Si\, m' = s' = {}^{15}\!/_{2} \cdot (t_4 - t_1) \cdot Co\, d \qquad r'' \cdot Si\, m'' = s'' = {}^{15}\!/_{2}\, (t_3 - t_2) \cdot Co\, d \qquad \mathbf{11}$$

und erhält daher mit Hilfe von 10 einerseits

$$\frac{s' \pm s''}{2} = \frac{(r + \varrho) \cdot Si\, m' \pm (r - \varrho)\, Si\, m''}{2} = r \cdot Si\, \frac{m' \pm m''}{2} \cdot Se\, \frac{m' \mp m''}{2} \qquad \mathbf{12}$$

während anderseits

$$D = \frac{r' \cdot Co\, m' + r'' \cdot Co\, m''}{2} = r \cdot Co\, m' \cdot Co\, m'' \cdot Se\, \frac{m' + m''}{2} \cdot Se\, \frac{m' - m''}{2} \qquad \mathbf{13}$$

folgt. Setzt man aber

$$\tfrac{1}{2}(s' + s'') = r \cdot Si\, A \qquad \tfrac{1}{2}(s' - s'') = r \cdot Si\, B \qquad \mathbf{14}$$

so ergiebt sich nach 12

$$Si\, A = Si\, \tfrac{1}{2}(m' + m'') \cdot Se\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \qquad Si\, B = Si\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \cdot Se\, \tfrac{1}{2}(m' + m'')$$

und hieraus nach bekannten goniometrischen Formeln

$$Co\, A = Se\, \tfrac{1}{2}(m' - m'') \cdot \sqrt{Co\, m' \cdot Co\, m''} \qquad Co\, B = Se\, \tfrac{1}{2}(m' + m'') \cdot \sqrt{Co\, m' \cdot Co\, m''}$$

wofür 13 in

$$D = r \cdot Co\, A \cdot Co\, B \qquad \mathbf{15}$$

übergeht, somit D nach 11, 14 und 15 leicht berechnet werden kann. Bestimmt man so für jeden zweier Sterne seine Distanz vom Mittelpunkte des Mikrometers, so ergiebt sich aus Kombination dieser Distanzen sofort die Deklinationsdifferenz, — nur wird diese entsprechend dem Frühern noch einmal zu revidieren sein, wenn für den einen Stern in 11 vorerst für d nur ein approximativer Wert eingeführt werden konnte. Die Rektascensionsdifferenz endlich wird in diesem Falle offenbar erhalten werden, indem man für jeden Stern das Mittel aus sämtlichen vier Beobachtungszeiten nimmt und diese Mittel von einander subtrahiert.

396. Der Einfluss von Beobachtungsfehlern. — Die bei Anlass der Beobachtungen am Meridiankreise besprochenen Personalfehler machen sich auch beim Kreismikrometer geltend, indem sie die Zeitangaben für Ein- und Austritt fälschen[a] und dadurch Fehler in Bestimmung der Sehnen veranlassen, die sich auch bei Berechnung der Radien, somit bei Ermittlung von Positionsdifferenzen in gedoppeltem Masse, geltend machen[b]. Nachdem man schon früher allmälig auf diese Verhältnisse aufmerksam geworden war[c], erwarb sich namentlich **Argelander** das Verdienst, dieselben näher zu untersuchen und darauf gestützt eine Reihe von Vorschriften für die Beobachtungen am Kreismikrometer aufzustellen[d].

Zu 396: *a.* Glaubt man infolge einer Art Sehfehler den Eintritt eines Sternes schon in der Distanz $AB = f$ vom Kreise zu sehen, so wird dadurch die Sehne um $AD \fallingdotseq f : \mathrm{Si}\, m$ verlängert, also, wenn f in Zeitsekunden ausgedrückt ist, die Zeitangabe des Eintrittes um $f : (\mathrm{Si}\, m \cdot \mathrm{Co}\, d)$ gefälscht, oder, da sich mit dem Sehfehler f auch noch (382) ein vom Sterne unabhängiger Hörfehler g verbinden wird, um

$$d\,t_1 = \sqrt{\frac{f^2}{\mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d} + g^2} = \frac{f'}{\mathrm{Si}\, m \cdot \mathrm{Co}\, d} \quad \text{wo} \quad f'^2 = f^2 + g^2 \cdot \mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d \qquad 1$$

Entsprechend hat man für einen zweiten Stern

$$d\,\tau_1 = \sqrt{\frac{f^2}{\mathrm{Si}^2 \mu \cdot \mathrm{Co}^2 \delta} + g^2} = \frac{f''}{\mathrm{Si}\, \mu \cdot \mathrm{Co}\, \delta} \quad \text{wo} \quad f''^2 = f^2 + g^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \mu \cdot \mathrm{Co}^2 \delta \qquad 2$$

folglich, da für die Austritte $d t_2 = d t_1$ und $d \tau_2 = d \tau_1$ ist,

$$d\,\frac{t_2 \pm t_1}{2} = \frac{f'}{\sqrt{2} \cdot \mathrm{Si}\, m \cdot \mathrm{Co}\, d} \qquad \text{und} \qquad d\,\frac{\tau_2 \pm \tau_1}{2} = \frac{f''}{\sqrt{2} \cdot \mathrm{Si}\, \mu \cdot \mathrm{Co}\, \delta} \qquad 3$$

— *b.* Ersetzt man $D - \Delta$ durch D und differenziert die nun aus 395 folgenden Beziehungen

$$D = r\,(\mathrm{Co}\, m - \mathrm{Co}\, \mu) \qquad s = r \cdot \mathrm{Si}\, m \qquad \sigma = r \cdot \mathrm{Si}\, \mu \qquad 4$$

nach allen in ihnen enthaltenen Grössen, so erhält man

$$dD = (\mathrm{Co}\, m - \mathrm{Co}\, \mu) \cdot dr - r\,(\mathrm{Si}\, m \cdot dm - \mathrm{Si}\, \mu \cdot d\mu)$$
$$ds = r \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot dm + \mathrm{Si}\, m \cdot dr \qquad d\sigma = r\, \mathrm{Co}\, \mu \cdot d\mu + \mathrm{Si}\, \mu \cdot dr$$

und hieraus, indem man dm und $d\mu$ eliminiert, sodann $ds = 15\, dt \cdot \mathrm{Co}\, d$ und $d\sigma = 15\, d\tau \cdot \mathrm{Co}\, \delta$ einführt, ferner 3 benutzt, successive

$$\begin{aligned} dD &= \mathrm{Tg}\, \mu \cdot d\sigma - \mathrm{Tg}\, m \cdot ds - D \cdot \mathrm{Se}\, \mu \cdot \mathrm{Se}\, m \cdot dr : r \\ &= \frac{15 f''}{\mathrm{Co}\, \mu \cdot \sqrt{2}} - \frac{15 f'}{\mathrm{Co}\, m \cdot \sqrt{2}} - \frac{D}{r} \cdot \frac{dr}{\mathrm{Co}\, \mu \cdot \mathrm{Co}\, m} \\ &= 15 \cdot \sqrt{\frac{f'^2}{2\,\mathrm{Co}^2 m} + \frac{f''^2}{2\,\mathrm{Co}^2 \mu} + \left(\frac{D \cdot dr}{15 \cdot r \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot \mathrm{Co}\, \mu}\right)^2} \end{aligned} \qquad 5$$

oder

$$\begin{aligned} dr &= r\,[\mathrm{Si}\, \mu \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot d\sigma - \mathrm{Co}\, \mu \cdot \mathrm{Si}\, m \cdot ds - \mathrm{Co}\, \mu \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot dD] : D \\ &= \frac{r}{D}\left[\frac{15 f''}{\sqrt{2}} \cdot \mathrm{Co}\, m - \frac{15 f'}{\sqrt{2}}\, \mathrm{Co}\, \mu - dD \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot \mathrm{Co}\, \mu\right] \\ &= \frac{15 r}{D} \cdot \sqrt{\frac{f'^2}{2} \cdot \mathrm{Co}^2 \mu + \frac{f''^2}{2} \cdot \mathrm{Co}^2 m + \left(\frac{dD \cdot \mathrm{Co}\, m \cdot \mathrm{Co}\, \mu}{15}\right)^2} \end{aligned} \qquad 6$$

während, wenn A die Rektascensionsdifferenz bezeichnet,

$$dA = d\tau - dt = \sqrt{\frac{f'^2}{2\,\mathrm{Si}^2 m \cdot \mathrm{Co}^2 d} + \frac{f''^2}{2\,\mathrm{Si}^2 \mu \cdot \mathrm{Co}^2 \delta}} \qquad 7$$

folgt, woraus sich leicht Beobachtungsregeln ableiten lassen. So z. B. ergiebt sich, dass, wenn man zur Bestimmung des Radius zwei Sterne wählt, deren Abstandskomponente D demselben nahe kömmt, und den einen nahe am Mittelpunkte ($m \fallingdotseq 90^0$), also den andern nahe am Rande ($\mu \fallingdotseq 0$) durchgehen lässt, $dr' \fallingdotseq 10 \cdot \sqrt{f^2 + g^2 \cdot \mathrm{Co}^2 d}$, d. h. der Wert von einer kleinen Unsicherheit in D nicht beeinflusst wird. — *c.* Schon 1742 machte **Lacaille** (l. c.) darauf aufmerksam, dass man Deklinationsdifferenzen mit dem Kreismikrometer um so genauer bestimme, je weiter die beiden Gestirne vom Mittelpunkte abstehen, ohne jedoch noch näher auf die Natur der in Betracht kommenden Fehlerquellen

hinzuweisen, was erst in der neuern Zeit durch die **Bessel** (vgl. seinen „Nachtrag zur Theorie des Kreismikrometers" in Mon. Corr. 26 von 1812), **Gauss** und **Struve** (vgl. 382), etc., geschehen zu sein scheint. — *d.* Ganz besonders einlässlich beschäftigte sich **Argelander** mit diesen Verhältnissen und besprach dieselben (wie ich aus den Aufzeichnungen von Fr. Henzi, vgl. 592, weiss) in seinen Vorlesungen im Detail. So z. B. teilte er mit, dass er aus einer längern Beobachtungsreihe bei den mittlern Werten $m = 12^\circ 40' = \mu$ und $d = 23^\circ 30' = \delta$ durchschnittlich die Fehler $f' \cdot \text{Se}\, d \cdot \text{Cs}\, m = 0^s{,}469$ in *Æ* und $15 f' \cdot \text{Se}\, m = 1'',458$ in D, also im Mittel $f' = 0^s{,}0946$, — bei den mittlern Werten $m = 54^\circ 27' = \mu$ und $d = 14^\circ 0' = \delta$ dagegen $f' = 0^s{,}1443$, — folglich nach 1'' die Werte $f = 0^s{,}0895$ und $g = 0^s{,}1891$ gefunden habe. Anlehnend an diese Resultate machte er sodann folgende Entwicklung: Sind d und δ gleich, m und μ aber gleich oder supplementär, so ergeben sich nach 1, 2, 7 und 5, wenn der Fehler in Deklination ebenfalls in Zeit ausgedrückt und eine gute Bestimmung des Radius vorausgesetzt wird,

$$f'^2 = f^2 + g^2 \cdot \text{Si}^2 m \cdot \text{Co}^2 d = f''^2 \qquad dA = f' \cdot \text{Cs}\, m \cdot \text{Se}\, d \qquad dD = f' \cdot \text{Se}\, m \qquad \mathbf{8}$$

woraus der Fehler in der Position $dP = \sqrt{dA^2 + dD^2}$ folgt, und somit, wenn die Tausendstel-Sekunde als Einheit gewählt wird, die obigen Werten von f und g entsprechende Tafel:

m	f'			dA			dD			dP		
	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°	d = 0°	30°	60°
90°	165	150	113	165	173	226	∞	∞	∞	∞	∞	∞
75	161	147	112	167	176	232	624	583	433	646	609	491
60	150	137	108	173	183	249	300	274	216	347	329	330
45	133	123	102	188	200	288	188	174	144	266	265	322
30	113	108	96	227	249	384	131	125	111	262	279	400
15	97	95	91	373	424	703	100	98	94	386	435	709
0	90	90	90	∞	∞	∞	90	90	90	∞	∞	∞

aus der z. B. hervorgeht, dass dP für mittlere Werte von m einen Minimalwert annimmt. Um diese Verhältnisse noch genauer zu ermitteln, kann man die aus 8 folgende Formel

$$dP^2 = dA^2 + dD^2 = \frac{f^2 + g^2 \cdot \text{Si}^2 m \cdot \text{Co}^2 d}{\text{Si}^2 m \cdot \text{Co}^2 m \cdot \text{Co}^2 d} \cdot (1 - \text{Si}^2 m \cdot \text{Si}^2 d) \qquad \mathbf{9}$$

nach m differentieren, woraus

$$\frac{d\,(dP^2)}{dm} = 2\,\frac{h^2 \cdot \text{Si}^4 m + 2 f^2 \cdot \text{Si}^2 m - f^2}{\text{Si}^3 m \cdot \text{Co}^3 m \cdot \text{Co}^2 d} \quad \text{wo} \quad h^2 = g^2\, \text{Co}^4 d - f^2 \cdot \text{Si}^2 d \qquad \mathbf{10}$$

folgt. Es wird also dP ein Minimum, wenn

$$h^2 . \text{Si}^4 m + 2 f^2 \cdot \text{Si}^2 m - f^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \text{Si}^2 m = f\left[\sqrt{h^2 + f^2} - f\right] : h^2 \qquad \mathbf{11}$$

ist, und hieraus ergiebt sich z. B., dass für die Argelander'schen Konstanten dP ein Minimum wird, wenn für Sterne der Deklination d = 0, 30, 60° je $m = 36^\circ 21'$, $39^\circ 43'$ und $51^\circ 24'$ gewählt wird, wofür 9 die Minimalwerte $dP = 0^s{,}254$, 0,258 und 0,318 ergiebt, — u. s. w. — Aus 8 folgt ferner, dass dA für $m = 90^\circ$ und dD für $m = 0$ oder 180° Minimalwerte erhalten. Frägt man nun, wie viele Beobachtungen p' in *Æ* bei m zu machen sind, um ein gleich sicheres Resultat wie aus p Beobachtungen bei 90° zu erhalten, so ist dies, da sich

diese Zahlen (52) wie die Quadrate der Fehler verhalten müssen, nach 8 der Fall, wenn

$$p' : p = d A_m^2 : d A_{90}^2 = (f^2 + g^2 \cdot Si^2 m \cdot Co^2 d) Cs^2 m : (f^2 + g^2 \cdot Co^2 d) \qquad 12$$

Frägt man dagegen, wie viele Beobachtungen q' in D bei m nötig sind, damit sie q Beobachtungen in 0 oder 180 ersetzen, so erhält man entsprechend

$$q' : q = d D_m^2 : d D^2_{0,180} = (f^2 + g^2 Si^2 m \cdot Co^2 d) \cdot Se^2 m : f^2 \qquad 13$$

und frägt man endlich, wie sich p und q verhalten müssen, damit die Bestimmungen in Æ und D gleichwertig werden, so ergiebt sich

$$p : q = d A^2_{90} : d D^2_{0,180} = (f^2 + g^2 Co^2 d) \cdot Se^2 d : f^2 \qquad 14$$

Aus Kombination dieser drei Proportionen erhält man aber ohne Schwierigkeit

$$p' = p + \frac{f^2 \cdot Ct^2 m}{f^2 + g^2 Co^2 d} \cdot p = p + q \cdot Ct^2 m \cdot Se^2 d$$

$$q' = q + \frac{f^2 + g^2 Co^2 d}{f^2 \cdot Ct^2 m} \cdot q = q + p \cdot Tg^2 m \cdot Co^2 d$$

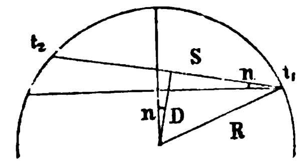
und somit die sich entsprechenden Beziehungen

$$Tg\, m = Se\, d \qquad \text{und} \qquad p' = p + q = q' \qquad 15$$

welche die Richtigkeit des von **Argelander** aufgestellten, ebenso merkwürdigen als praktisch wichtigen Satzes erweisen, dass man aus p + q Beobachtungen auf Einer Sehne oder auf den beiden Sehnen, für welche Tg m = Se d ist, beide Positionskomponenten ebensogut bestimmt, als wenn man speciell die Eine aus p Beobachtungen am Centrum und die Andere aus q Beobachtungen am Rande ableitet, — wobei man überdies des Vorteiles geniesst, die Vergleichsterne nicht wechseln zu müssen. Für d = 0, 30, 60° ergeben sich nach 15 die Werte m = 45° 0', 49° 7', 63° 27'. — Noch bleibt beizufügen, dass der oben als eine Konstante, aus kleinen Sternen bestimmte Sehfehler f für sehr helle Sterne infolge der Irradiation, und ebenso für Planeten, Kometen, etc., wesentlich andere Werte annimmt: So z. B. erhielt **Argelander** 1843 aus Beobachtungen des Kometen Faye f = 0",396, d. h. einen mehr als vierfachen Wert.

397. Der Einfluss von Refraktion, Eigenbewegung und starker Deklination. — Für etwas genauere Bestimmungen mit dem Kreismikrometer muss vor allem aus, wenn es sich, wie in den meisten Fällen, um die Position eines Wandelsternes handelt, nachträglich noch dessen Eigenbewegung Rechnung getragen werden [a]; ferner hat man, namentlich bei etwas tiefem Stande der beiden Gestirne, den für sie merklich verschiedenen Einfluss der Refraktion zu berücksichtigen [b], und endlich ist für dem Pole nahe Sterne zu beachten, dass die von ihnen beschriebenen Wege nicht mehr als Sehnen betrachtet werden dürfen [c].

Zu 397: *a.* Nimmt die Rektascension eines Gestirnes (a, d) in jeder Zeitsekunde um △a Zeitsekunden, die Deklination um △d Bogensekunden zu, so wird dadurch einerseits, wenn $t_2 - t_1 = 2t$ ist, der Austritt um $2t \cdot \triangle a$, also der Durchgang durch die Mitte der Sehne um $dt = t \cdot \triangle a$ verspätet, und anderseits beschreibt das Gestirn eine um n



gegen den Parallel geneigte Sehne, so dass nahe

$$\text{Tg n} = \frac{\text{t} \cdot \triangle \text{d}}{15\,\text{t} \cdot \text{Co d}} = \frac{\triangle \text{d}}{15 \cdot \text{Co d}} \qquad 1$$

ist. Da nun $D^2 = R^2 - S^2$ wo $S = 15\,\text{t} \cdot \text{Co d}$

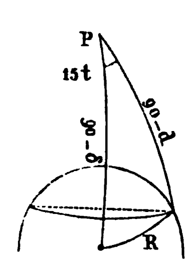
ist, so erhält man

$$\text{D} \cdot \text{dD} = -\text{S} \cdot \text{dS} \quad \text{und} \quad \text{dS} = \frac{\text{S} \cdot \text{dt}}{\text{t}} = \text{S} \cdot \triangle \text{a} \quad \text{also} \quad \text{dD} = -\frac{\text{S}^2}{\text{D}} \cdot \triangle \text{a} \qquad 2$$

Ist ferner $\triangle$t die Zeit, in welcher der Weg von der Sehnenmitte bis zum Deklinationskreis des Mittelpunktes zurückgelegt wird, so hat man

$$15 \cdot \triangle \text{t} \cdot \text{Co d} = \text{D} \cdot \text{Tg n} \quad \text{also} \quad \triangle \text{t} = \frac{\text{D} \cdot \text{Tg n}}{15 \cdot \text{Co d}} = \frac{\text{D} \cdot \triangle \text{d}}{(15 \cdot \text{Co d})^2} \qquad 3$$

Man wird somit die früher ohne Rücksicht auf die Eigenbewegung berechneten Werte für Rektascension und Deklination nachträglich noch um die durch 3 und 2 bestimmten Korrektionen $\triangle$t und dD zu vermehren haben. — *b.* Durch die Refraktion wird die von einem Sterne bei mittlerer Zenitdistanz z beschriebene Sehne nahe gleichmässig um eine Grösse gehoben, welche (177 : 7) von $\text{r} = \alpha \cdot \text{Tg z}$ abhängt, — zugleich aber, da z nach und nach aus z — dz in z + dz übergeht, wo (177 : 6) $\text{dz} = 15 \cdot \text{t} \cdot \text{Si v} \cdot \text{Co d}$ ist, also die Refraktion eine aus Tab. VI zu erhebende Veränderung dr erleidet, etwas gedreht, und zwar (177 : 7, 8) wie wenn der Stern die Eigenbewegungen $\triangle \text{a} = \text{dr} \cdot \text{Si v} \cdot \text{Se d} : (2\text{t} \cdot 15)$ und $\triangle \text{d} = \text{dr} \cdot \text{Co v} : 2\text{t}$ hätte. Während nun die mit der ersten Verschiebung zusammenhängenden Korrektionen für die beiden zu vergleichenden Sterne nahe gleich gross sind und sich daher in der Differenz beinahe aufheben, so hängen dagegen die durch die Drehung veranlassten, welche mit den eben angegebenen Werten von $\triangle$a und $\triangle$d nach den obigen 2 und 3 berechnet werden können, von den für beide Sterne meist verschiedenen D ab, und sind daher in der Regel nicht zu vernachlässigen. Da ich jedoch später (460) noch in allgemeinerer Weise auf solche Refraktionswirkungen zurückzukommen haben werde, so begnüge ich mich hier mit vorstehenden, für ungefähre Berechnung ausreichenden Andeutungen und den historischen Angaben, dass schon **Boscovich** und seine ersten Nachfolger den Einfluss der Refraktion ins Auge fassten, — sodann **Lalande** (Mém. Par. 1766 und Astr. 3. éd. II 682 f.), **Kästner** (Nov. Comm. Gott. III), **Lexell** (Mém. Pét. 1774), **Cagnoli** (Trig. 440 f.), **Schubert** (Mém. Pét. 1812), etc., denselben näher zu bestimmen suchten, — namentlich aber Ludwig **Schleiermacher** (Darmstadt 1785 — ebenda 1844; Gymnasialprof. und Oberbaurat Darmstadt) und **Bessel** fast gleichzeitig (Mon. Corr. 17 von 1808) diese Untersuchungen sehr gründlich durchführten. Letzterer kam noch später (A. N. 69 von 1824) darauf zurück und es sind die von ihm aufgestellten Formeln, von welchen diejenigen von S. C. **Chandler** (A. N. 2628 von 1884) nur Modifikationen sind, noch jetzt die meist gebrauchten. Der von **Gauss** (vgl. Astr. Viert. X 215) in seinen Vorlesungen vorgezeichnete, dann wieder von C. A. **Peters** (A. N. 177 von 1830), und noch neuerdings in der Abhandlung „C. **Schrader**, Über die Wirkung der astr. Strahlenbrechung auf Beobachtungen mit dem Kreismikrometer. Göttingen 1874 in 8.“ eingeschlagene Weg, bei welchem gewissermassen der Einfluss vom Stern auf das Mikrometer übergetragen wird, erscheint mir weniger naturgemäss. — *c.* Darf für dem Pole nahe Sterne der Weg nicht mehr mit der Sehne identifiziert werden, so bleibt zwar die Rektascensionsbestimmung davon unberührt, aber die ohne Rücksicht darauf berechnete Deklination bedarf einer



kleinen Korrektion: Bezeichnet nämlich t wie oben die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen, so hat man

$$\text{Co}\,R = \text{Si}\,d \cdot \text{Si}\,\delta + \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \text{Co}\,15\,t$$

oder $\text{Si}^2\,{}^1/_2\,R = \text{Si}^2\,{}^1/_2\,(d - \delta) + \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}^2\,{}^{15}/_2\,t$

und somit

$$(d - \delta)^2 \fallingdotseq R^2 - \text{Co}\,d \cdot \text{Co}\,\delta \cdot (15\,t)^2$$
$$= R^2 - \text{Co}^2\,d \cdot (15\,t)^2 - (\text{Co}\,\delta - \text{Co}\,d) \cdot \text{Co}\,d \cdot (15\,t)^2$$

folglich, wenn $D = \sqrt{R^2 - \text{Co}^2\,d \cdot (15 \cdot t)^2}$ **4**

den ohne Rücksicht auf die Krümmung berechneten Abstand des Centrums von der Sehne bezeichnet,

$$(d - \delta)^2 \fallingdotseq D^2 - (d - \delta)\,\text{Si}\,d \cdot \text{Co}\,d \cdot (15\,t)^2 \cdot \text{Si}\,1''$$

oder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$d - \delta \fallingdotseq D - (d - \delta)\,\text{Si}\,d \cdot \text{Co}\,d\,.\,(15\,t)^2 \cdot \text{Si}\,1'' : 2\,D$$

und somit, wenn man diese Gleichung nach $(d - \delta)$ löst, dabei nur die zwei ersten Glieder des Quotienten beibehaltend,

$$d - \delta \fallingdotseq D - {}^1/_2\,\text{Si}\,d \cdot \text{Co}\,d\,(15\,t)^2 \cdot \text{Si}\,1'' \qquad \mathbf{5}$$

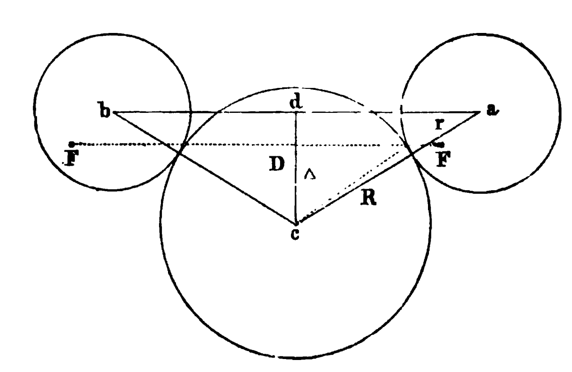
Schreibt man aber diese Gleichung für beide Sterne auf und nimmt die Differenz, so erhält man

$$\begin{aligned} d_1 - d_2 &= D_1 - D_2 - {}^1/_2\,\text{Si}\,1''\left(\text{Tg}\,d_1\,\text{Co}^2\,d_1\,(15\,t_1)^2 - \text{Tg}\,d_2\,\text{Co}^2\,d_2\,(15\,t_2)^2\right) \\ &\fallingdotseq D_1 - D_2 - {}^1/_2\,\text{Si}\,1''\,\text{Tg}\,{}^1/_2\,(d_1 + d_2)\left[R^2 - D_1{}^2 - (R_2 - D_2)^2\right] \\ &= (D_1 - D_2) \cdot \left[1 + {}^1/_2\,(D_1 + D_2)\,\text{Tg}\,{}^1/_2\,(d_1 + d_2)\,\text{Si}\,1''\right] \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

woraus sich die nötige Korrektion ergiebt.

398. Die Bestimmung von Sonnenfleckenpositionen. — Der Radius eines Kreismikrometers kann auch aus den Zeiten abgeleitet werden, zu welchen die Sonne mit demselben in äusserer oder innerer Berührung steht, und obschon der auf diese Weise erhaltene Wert eine etwas geringere Genauigkeit besitzen mag, so ist er doch entschieden vorzuziehen, wenn es sich speciell um Beobachtungen an der Sonne handelt, zumal dabei zugleich die Distanz der von dem Sonnenmittelpunkte beschriebenen Sehne vom Mittelpunkte des Mikrometers und die Durchgangszeit des erstern durch den Deklinationskreis des zweiten erhalten wird [a]. Beobachtet man sodann z. B. die Ein- und Austrittszeiten von Flecken, so ergeben sich aus denselben durch leichte Rechnung [b] auch die Distanzen der durch sie beschriebenen Sehnen vom Centrum, sowie ihre Durchgangszeiten durch jenen Deklinationskreis, also durch Vergleichung mit den für den Mittelpunkt erhaltenen Werten ihre Positionen auf der Sonne [c].

Zu 398: *a.* Da sich die Deklination d der Sonne während ihrem Durchgange kaum merklich ändert, so kann man annehmen, dass ihr Mittelpunkt eine Gerade a b des Abstandes D vom Mittelpunkte c des Mikrometers beschreibe. Erhält man aber t als Zwischenzeit der beiden äussern Berührungen



oder der entsprechenden Lagen a und b des Sonnencentrums, so hat man nach dem Frühern $ab = 2 \cdot ad = m \cdot t \cdot Co\,d$ zu setzen, wo $m = 15$ oder $= 15 \times 0{,}9972$ ist, je nachdem t in wahrer Sonnenzeit oder in Sternzeit bestimmt wird. Man hat somit, wenn r den scheinbaren Sonnenradius bezeichnet,

$$D^2 = (R + r)^2 - \tfrac{1}{4}\, m^2 \cdot t^2 \cdot Co^2\, d \qquad 1$$

und entsprechend, wenn t′ die Zwischenzeit der innern Berührungen ist,

$$D^2 = (R - r)^2 - \tfrac{1}{4}\, m^2 \cdot t'^2 \cdot Co^2\, d \qquad 2$$

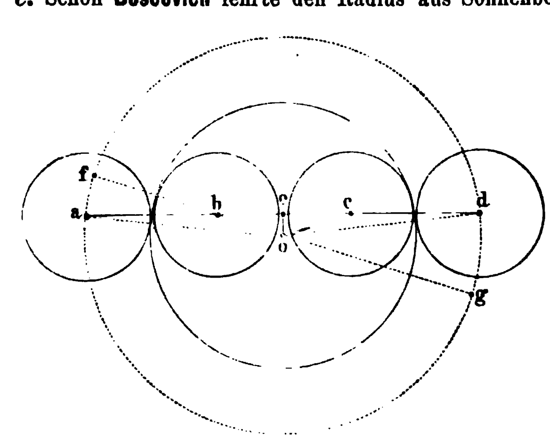
woraus

$$R = \frac{m^2 \cdot Co^2\, d \cdot (t + t')\,(t - t')}{16\, r} \qquad 3$$

folgt. — *b.* Bezeichnet Δ die Entfernung der Bahn eines Fleckens F vom Mittelpunkte und τ die Zwischenzeit zwischen Ein- und Austritt desselben, so hat man entsprechend 1

$$\Delta^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}\, m^2 \cdot \tau^2 \cdot Co^2\, d \qquad 4$$

und kann somit Δ, folglich auch die Deklinationsdifferenz D — Δ berechnen, während sich die Rektascensionsdifferenz einfach ergiebt, indem man von dem Mittel der für die Sonnenränder in wahrer Sonnenzeit erhaltenen Ein- und Austrittszeiten dasjenige der für den Flecken erhaltenen subtrahiert. — *c.* Schon **Boscovich** lehrte den Radius aus Sonnenbeobachtungen in folgender Weise zu bestimmen: Sind $ad = \alpha$ und $bc = \beta$ aus den 4 Berührungszeiten bekannt, so sind es auch $ab = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)$ und $bd = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$. Anderseits hat man $fo = R + r$ und $bo = R - r$, also $fb = fo - bo = 2r$ und $bg = fo + bo = 2R$, während geometrisch $fb \times bg = ab \times bd$ oder also $4rR = \tfrac{1}{4}(\alpha - \beta)\cdot(\alpha + \beta)$, woraus sich für R eine vollständig mit der oben

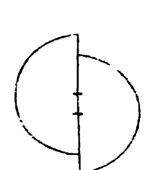


nach **Bessel** (Mon. Corr. 24 von 1811) abgeleiteten 4 übereinstimmende Formel ergiebt. — Vgl. ferner „**Spörer**, Beobachtungen von Sonnenflecken (A. N. 1315 und 20 von 1861; auch Anclam 1862)“.

399. Die ersten Heliometer. — Nachdem schon **Römer** gezeigt hatte, dass man mit einem Fernrohr, das zwei Objektive

besitze, „welche einander genähert und von einander entfernt werden können“, im Stande wäre, die Durchmesser der Wandelsterne zu messen [a], kamen etwas mehr als ein halbes Jahrhundert später, mutmasslich unabhängig von ihm und von einander, Servington **Savery** und Pierre **Bouguer** auf denselben Gedanken [b], und bald darauf erkannte John **Dollond**, dass man die gleiche Aufgabe noch viel einfacher lösen könne, indem man dem Objektive eines Fernrohrs ein zweites, drehbares und zerschnittenes Objektiv vorsetze, dessen beide Hälften messbar gegen einander verschiebbar seien, ja auf solche Weise ein vorzügliches Mittel erhalten werde, um überhaupt die gegenseitige Lage zweier Punkte zu bestimmen [c].

Zu 399: *a.* J. B. **Duhamel** erzählt nämlich auf pag. 148 seiner „Regiæ scientiarum academiæ historia. Parisiis 1701 in 4.“ unter anderm: „Die 12 decembri 1675 D. **Römer** legit tractatum de ratione dimetiendi diametros Lunæ et aliorum siderum ope Telescopii duobus vitris objectivis instructi quæ ad moveri et removeri possunt“. — *b.* Im Jahre 1743 schlug Servington **Savery** von Exeter der Roy. Society vor, kleine Distanzen dadurch zu messen, dass man, mit Hilfe zweier neben einander stehender und gegenseitig verschiebbarer Objektive, Doppelbilder erzeuge, und dann das Bild des einen Richtpunktes mit dem Doppelbilde des andern zusammenbringe. Seine Abhandlung, welche **Bradley** zur Begutachtung übergeben wurde, blieb jedoch bei diesem liegen und wurde erst 1753 unter dem Titel „A new way of measuring the diameter of the Sun“ in den Phil. Trans. abgedruckt, als Jam. **Short** erfuhr, es habe **Bouguer** nicht nur 1748 der Pariser Akademie dieselbe Idee in seiner Abhandlung „De la mesure des diamètres des planètes (Mém. Par. 1748, erschienen 1752)“ vorgetragen, sondern auch bereits mit Erfolg angewandt. — *c.* In demselben Jahre 1753, wo das neue **Heliometer** in England bekannt wurde, legte **Short** der Roy. Society im Namen von John **Dollond** eine „Description of a contrivance for measuring small angles (Ph. Tr. 1753)“ vor, welche zeigte, dass derselbe Zweck durch Bisection des Objektives noch viel einfacher erreicht werden könne, wobei die zur Herbeiführung jener Coincidenz notwendige Grösse der Verschiebung ein Mass für die Distanz, die Richtung der Verschiebung aber den Positionswinkel ergebe. Übrigens scheint auch **Bouguer** (vgl. den in Compt. rend. 1873 II 3 abgedruckten, von 1751 I 19 datierenden Brief von Delisle an Bose) auf die neue Fährte gekommen zu sein, jedoch dieselbe nicht weiter verfolgt zu haben, da der so gut unterrichtete **Lalande** nichts davon sagt, sondern (Astr. 3. éd. II 639 f.) bei einlässlicher Beschreibung des Heliometers die französische und englische Konstruktion ganz auseinander hält. Noch mag beigefügt werden, dass die von **Dollond** ausgeführten Heliometer in einem zerschnittenen, mit den nötigen Bewegungen versehenen Sammelglase bestanden, welches dem gewöhnlichen Objektive des Fernrohrs vorgesteckt wurde, während für die Okularröhre ein Einsatzstück beigegeben war, — und endlich der Kuriosität wegen, dass **Lambert** (vgl. Beiträge III 221) versuchte, sich durch Zerschneiden eines Brillenglases ein kleines und billiges Heliometer zu erstellen.



400. Die neuern Heliometer. — Durch unmittelbare Bisection der Objektivlinse eines grössern Fernrohrs ein wirksames **Heliometer** als selbständiges Instrument zu erstellen, scheint von Dollond noch nicht versucht worden zu sein, während dagegen bereits **Fraunhofer** zu Anfang des laufenden Jahrhunderts die sich entgegenstellenden konstruktiven Schwierigkeiten fast gänzlich überwand [a]. In der neuern Zeit haben sodann namentlich die jüngern **Repsold** Instrumente dieser Art geliefert, welche für die feinsten Messungen genügen [b], jedoch würde es hier zu weit führen, auf den eigentlichen Detail einzutreten und es muss dafür, sowie für die Theorie dieses komplizierten, kostbaren und daher trotz seiner Vorzüge wenig verbreiteten Instrumentes, auf die Speciallitteratur verwiesen werden [c]. Ebenso muss ich mich darauf beschränken, die hübsche Idee von **Houzeau**, das Heliometer durch eine gewisse Abänderung für Beobachtung des Venusdurchganges von 1882 dienstbar zu machen, nur kurz zu erwähnen [d].

Zu 400: *a.* Das erste von München gelieferte Heliometer war dasjenige, welches **Gauss** im Sommer 1814 erhielt und auf 43″ Brennweite 34‴ Öffnung besass; er schrieb über dasselbe 1814 IX 13 sowohl an Schumacher (vgl. Briefwechsel) als an Horner (vgl. Notiz 269) in sehr anerkennender Weise und fügte in letzterm Briefe bei: „Dies schöne Instrument zeichnet sich auch dadurch aus, dass es zur Repetition eingerichtet ist, was durch unabhängige Beweglichkeit beider Objektivhälften bewirkt wird“. Vergleiche für dasselbe und das etwas später an **Olbers** gelieferte Exemplar auch die zu jener Zeit von dem Münchner Institute in Lithographie ausgegebene Abbildung (Verz. 8). — Im Jahre 1824 nahm sodann **Fraunhofer** für Königsberg ein grösseres Heliometer von 70‴ Öffnung auf 8′ Brennweite in Arbeit; jedoch konnte dasselbe erst nach seinem 1826 erfolgten Tode vollendet und 1829 an **Bessel** abgeliefert werden, welcher nun im folgenden Jahre (A. N. 189 von 1830) eine „Vorläufige Nachricht“ und sodann 1841 seine grundlegende Abhandlung „Besondere Untersuchung des Heliometers der Königsberger Sternwarte (Astr. Unters. I 55—152; einzelne Partien schon A. N. 415 von 1840)“ gab. — *b.* Durch die den **Repsold** gelungene Vervollkommnung des Heliometers hat dieses Instrument, welches überdies keiner Feldbeleuchtung bedarf, nach dem Zeugnisse aller damit Vertrauten dem Positionsmikrometer (402) entschieden Vorrang abgewonnen, und so soll z. B. das neuerlich von dieser Firma für das Yale-College in New-York gelieferte Heliometer eine nach allen Richtungen geradezu wundervolle Leistung sein. — *c.* Ausser der erwähnten Schrift von Bessel sind namentlich die beiden Werke „**Hansen**, Ausführliche Methode mit dem Fraunhofer'schen Heliometer Beobachtungen anzustellen. Gotha 1827 in 8., — und: Hugo **Seeliger**, Theorie des Heliometers. Leipzig 1877 in 8.“ zu vergleichen. Ferner verweise ich auf die Abhandlungen: „R. **Straubel**, Über die Berechnung der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer. Jena 1888 in 8., — und: H. **Battermann**, Untersuchungen über die Gestalt der Bilder und die Theorie der Messungen ausserhalb der optischen Axe von astronomischen Instrumenten; mit specieller Berücksichtigung des Heliometers mit ebener Führung (A. N. 2878

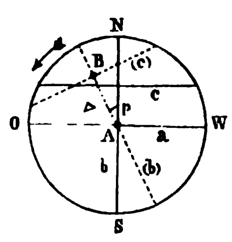
bis 2880 von 1889)". — *d.* Für den Venusdurchgang von 1882 liess nämlich **Houzeau** (vgl. Ann. Brux. V von 1884) durch H. **Grubb** in Dublin zwei Linsen von 4^{m},24 und 0^{m},14 Focaldistanz zerschneiden und nach den Zeichnungen von **Niesten** zu zwei Heliometern so zusammenstellen, dass jedes derselben von jeder der Linsen die eine Hälfte erhielt, somit ein grosses und ein kleines Bild erzeugte; dabei waren die beiden Hälften so gestellt, dass ihre Bilder mit demselben Okulare deutlich gesehen wurden, und die Verhältnisse so gewählt, dass das kleine Bild der Sonne ein wenig grösser als das grosse der Venus ausfiel, somit letzteres durch Verschieben der kleinen Linse centrisch auf ersteres gelegt und somit in gewohnter Weise Distanz und Position abgelesen werden konnte.

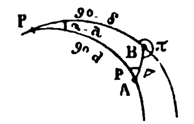
401. Einige andere Doppelbildmikrometer. — Ausser dem Heliometer sind im Laufe der Zeiten noch mehrere andere Doppelbildmikrometer vorgeschlagen worden, von welchen beispielsweise dasjenige angeführt werden mag, welches **Rochon** mit Hilfe doppeltbrechender Krystalle erstellte [a], — ferner dasjenige, welches **Amici** erhielt, indem er zwischen Objektiv und Okular eine zerschnittene Hilfslinse einschob [b], — und vor allem aus dasjenige, welches **Airy** nach langjährigen Versuchen dadurch zu stande brachte, dass er die Bisection auf eine der Okularlinsen übertrug [c].

Zu 401: *a.* Vgl. das „Mémoire sur un micromètre objectif", welches Alexis-Marie de **Rochon** (Brest 1741 — Paris 1817; Dir. Obs. Brest, später Akad. Par.; „Vie" durch Delambre, Paris 1819 in 4.) 1777 der Pariser Akademie vorlegte und sodann in sein „Recueil de mémoires sur la mécanique et sur la physique. Brest 1783 in 8." aufnahm. Es wurde noch später teils durch ihn selbst, teils durch **Arago**, wiederholt besprochen und etwas abgeändert, scheint jedoch nie zu grösserer praktischer Bedeutung gelangt zu sein. — *b.* Vgl. **Amici**, Lettres sur un nouveau micromètre intermédiaire (Corresp. astr. IX von 1823)". Sein Vorschlag wurde später von **Steinheil** neuerdings aufgenommen. — *c.* Den Grundgedanken **Airys**, die Bisection auf das Okular überzutragen, hatte schon **Ramsden** (vgl. Ph. Tr. 1779), aber die Ausführung gelang ihm noch nicht in befriedigender Weise, und ebenso ging es später **Watkins**, **Jones**, etc., ja auch **Airy** hatte noch nach 1840, wo er sein Mikrometer in den Greenwicher Beobachtungen beschrieb, dasselbe mehrfach abzuändern, bis er ganz befriedigende Resultate erhielt: Schliesslich blieb er bei einem terrestrischen Okular mit vier Linsen stehen, von welchen, vom Auge ab gerechnet, die dritte durchschnitten war; das zu betrachtende Bild fällt ausserhalb der Linsen, und der Apparat lässt sich somit, wie jedes andere positive Okular, vor den Fäden des Fadenmikrometers anbringen. Für weitern Detail und die betreffenden theoretischen Untersuchungen verweise ich auf „**Airy**, On a new construction of the divided eye glass micrometer (Mem. Astr. Soc. 15 von 1846), — und: **Kaiser**, Untersuchung des Airy'schen Doppelbildmikrometers (Ann. Leyden III von 1872)". — Anhangsweise erinnere ich noch an „**Jeaurat**, Sur les lunettes displantidiennes ou de double image (Mém. Par. 1779)", wo ein Mikrometer beschrieben wird, bei welchem „une image droite et une image renversée" erzeugt und benutzt werden.

402. Die Positionsmikrometer. — Mit dem Heliometer vermag gegenwärtig nur noch das sog. **Positionsmikrometer** zu konkurieren, welches von dem früher beschriebenen Schraubenmikrometer, abgesehen von besserer Ausführung, wesentlich darin abweicht, dass seine Fadenebene messbar gedreht werden kann, ohne dass dabei der Kreuzungspunkt der festen Faden seine Lage verändert, wodurch ebenfalls möglich wird, vollständige und scharfe Positionen zu erhalten [a].

Zu 402: *a.* Schon bei dem durch W. **Herschel** in seiner „Description of a micrometer taking the angles of position (Ph. Tr. 1781)“ beschriebenen Schraubenmikrometer war die für das **Positionsmikrometer** charakteristische Eigenschaft wenigstens im Principe vorhanden, wenn auch gewöhnlich angenommen wird, dasselbe datiere erst von 1824, wo es **Fraunhofer** gelang, ihm durch vorzügliche Ausführung eine so grosse Vollkommenheit zu verschaffen, dass es zu den feinsten Messungen tauglich erschien. Es besitzt ausser zwei festen, zu einander senkrechten Faden (a, b) mindestens noch Einen, zu einem der erstern (z. B. zu a) parallelen und mit einer feinen Mikrometerschraube verschiebbaren Faden (c). — Soll es zur Bestimmung von Rektascensions- und Deklinations-Differenzen verwendet werden, so dreht man das ganze Mikrometer so, dass ein Stern dem Faden a folgt, und lässt sodann beide Sterne durch b gehen, zugleich c auf den zweiten Stern einstellend: Die Differenz der Durchgangszeiten giebt sodann unmittelbar die Rektascensionsdifferenz, — die Drehung der Mikrometerschraube aber, welche nötig ist, um c zur Coincidenz mit a zurückzuführen, die Deklinationsdifferenz. — Will man dagegen die Lage eines Sternes B gegen einen Stern A und dessen Deklinationskreis festlegen, d. h. also den einen Stern auf den andern, anstatt durch rechtwinklige Coordinaten, durch Polarcoordinaten beziehen, so wird, nachdem wieder a durch Drehen des Mikrometers so gestellt ist, dass ihm A folgt, die nunmehrige Lage am Positionskreise, dessen Teilung gewöhnlich von Nord über Ost läuft, abgelesen, — sodann A in das Fadenkreuz gebracht und darin, bei parallaktischer Montierung mit Hilfe des Uhrwerks, festgehalten, — nunmehr das Mikrometer gedreht, bis b durch B geht und auch c nach B gebracht: Die Ablesungen an der Trommel der Mikrometerschraube und am Positionskreise geben sodann unmittelbar die Distanz $AB = \triangle$ und den Positionswinkel p. — Zur Vermittlung beider Bestimmungsweisen dienen die nach den sog. Gauss'schen Formeln (90) unmittelbar aus beistehender Figur folgenden Beziehungen





$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(\pi - p)\cdot \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}\triangle &= \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(\delta - d)\cdot \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(a - \alpha)\\
\mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(\pi + p)\cdot \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}\triangle &= \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(\delta - d)\cdot \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(a - \alpha)\\
\mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(\pi - p)\cdot \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}\triangle &= \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(\delta + d)\cdot \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(a - \alpha)\\
\mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(\pi + p)\cdot \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}\triangle &= \mathrm{Co}\ \tfrac{1}{2}(\delta + d)\cdot \mathrm{Si}\ \tfrac{1}{2}(a - \alpha)
\end{aligned} \qquad 1$$

welchen meistens, da $\triangle$, $a - \alpha$ und $\delta - d$ als klein zu betrachten sind, und dann zugleich $\pi \simeq 180^\circ + p$ oder $\tfrac{1}{2}(\pi + p) \simeq 90^\circ + p$, sowie $\tfrac{1}{2}(\delta + d) \simeq d$ gesetzt werden dürfen, die aus ihnen folgenden bequemen Näherungsformeln

$$\alpha - a = \triangle \cdot \mathrm{Si}\ p \cdot \mathrm{Se}\ d \qquad \delta - d = \triangle \cdot \mathrm{Co}\ p \qquad 2$$

substituiert werden dürfen. — Für einen Vorschlag, Kreis- und Positions-Mikrometer zu verbinden, vgl. „H. **Kobold**, Das Positions-Ringmikrometer (Copernicus 1881)".

403. Die Theorie der Mikrometerschrauben. — Der Grad der Genauigkeit, welcher bei Messungen mit Heliometer und Positionsmikrometer erhältlich ist, hängt wesentlich von der Vollkommenheit der eingesetzten Mikrometerschrauben ab, da die Messungen auf der Voraussetzung beruhen, dass das durch die Schraube bewirkte lineare Vorrücken der an dem Schraubenkopfe abgelesenen Bewegung proportional sei. Wenn nun auch angenommen werden darf, dass laut den beim Schneiden einer Schraube üblichen Manipulationen die verschiedenen Schraubengänge identisch werden, so ist dagegen in der Regel jeder einzelne derselben mit gewissen systematischen Fehlern behaftet und die sog. **Theorie der Schrauben** besteht zunächst in Lösung der Aufgabe, diese systematischen Fehler darzustellen und entweder zu eliminieren oder in Rechnung zu bringen [a].

Zu 403: *a.* Jeder Ablesung u am Schraubenkopfe ist eine kleine Korrektion beizufügen, welche man nach dem Vorgange von **Bessel** gleich

$$a_1 \cdot \mathrm{Co}\, u + b_1 \cdot \mathrm{Si}\, u + a_2 \cdot \mathrm{Co}\, 2u + b_2 \cdot \mathrm{Si}\, 2u + \ldots\ldots$$

setzen kann, wo die $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ für verschiedene Gänge derselben Schraube als nahe gleichwertig angesehen werden dürfen. Hat man somit beim Messen einer Distanz f am Schraubenkopfe die Ablesungen u und u' erhalten, so hat man einerseits

$$\begin{aligned} f &= u' - u + a_1(\mathrm{Co}\, u' - \mathrm{Co}\, u) + a_2(\mathrm{Co}\, 2u' - \mathrm{Co}\, 2u) + \ldots \\ &\quad + b_1(\mathrm{Si}\ u' - \mathrm{Si}\ u) + b_2(\mathrm{Si}\ 2u' - \mathrm{Si}\ 2u) + \ldots \\ &= u' - u - 2a_1\, \mathrm{Si}\, {}^1/_2(u'+u)\cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2(u'-u) - 2a_2\, \mathrm{Si}\ (u'+u)\cdot \mathrm{Si}\,(u'-u) - \ldots \\ &\quad + 2b_1\, \mathrm{Co}\, {}^1/_2(u'+u)\cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2(u'-u) + 2b_2\, \mathrm{Co}\,(u'+u)\cdot \mathrm{Si}\,(u'-u) + \ldots \end{aligned} \qquad 1$$

während anderseits für die Grösse f ein nahe richtiger Wert erhalten werden muss, wenn man sie von verschiedenen Anfangsstellungen der Schraube aus misst (z. B. das 0.00, 0.10, 0.20, ... 0.90 eines hundertteiligen Schraubenkopfes auf den Anfangspunkt von f einstellend) und aus sämtlichen Werten das Mittel zieht. Das so gefundene f wird nun mit jedem einzelnen Werte von u' — u so nahe übereinstimmen, dass man füglich in den Korrektionsgliedern u' durch u + f ersetzen darf, wofür 1 in

$$\begin{aligned} u' - u - f &= 2a_1 \cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2 f \cdot \mathrm{Si}\ (u + {}^1/_2 f) + 2a_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \cdot \mathrm{Si}\ (2u + f) + \ldots \\ &\quad - 2b_1 \cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2 f \cdot \mathrm{Co}\,(u + {}^1/_2 f) - 2b_2 \cdot \mathrm{Si}\, f \cdot \mathrm{Co}\,(2u + f) - \ldots \end{aligned} \qquad 2$$

übergeht. Schreibt man aber letztere Gleichung für alle zur Bestimmung von f benutzten Werte von u auf, so ergeben sich nach der gewohnten Weise die zur Ermittlung der a und b dienenden Normalgleichungen, und zwar reduzieren sich dieselben mit Hilfe goniometrischer Beziehungen sehr wesentlich, so z. B. bei Benutzung der oben erwähnten 10 Anfangsstellungen auf

$$\begin{aligned} &\Sigma(u'-u-f)\cdot \mathrm{Si}\ (u+{}^1/_2 f) = 10a_1\cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2 f \qquad \Sigma(u'-u-f)\, \mathrm{Si}\ (2u+f) = 10a_2\cdot \mathrm{Si}\, f \\ &\Sigma(u'-u-f)\cdot \mathrm{Co}(u+{}^1/_2 f) = -10b_1\cdot \mathrm{Si}\, {}^1/_2 f \qquad \Sigma(u'-u-f)\, \mathrm{Co}(2u+f) = -10b_2\cdot \mathrm{Si}\, f \end{aligned} \qquad 3$$

etc., so dass die Berechnung eine ganz leichte wird. — Setzt man in 2 suc-

cessive für u rechts die Werte -2α, $-\alpha$, 0, α, 2α ein, und addiert die erhaltenen 5 Gleichungen, so erhält man bei Beschränkung auf die vier ersten Glieder

$$\Sigma(u'-u) - 5f = 2A \cdot Si\,{}^1/_2 f \cdot (a_1\, Si\,{}^1/_2 f - b_1 \cdot Co\,{}^1/_2 f) + 2B \cdot Si\,f \cdot (a_2 \cdot Si\,f - b_2 \cdot Co\,f) \qquad 4$$

wo $A = 1 + 2\,Co\,\alpha + 2\,Co\,2\alpha \qquad B = 1 + 2\,Co\,2\alpha + 2 \cdot Co\,4\alpha$

Bezeichnet aber s die Seite des regelmässigen Zehnecks des Radius r, so ist einerseits $s = 2r \cdot Co\,72^0$ und anderseits (57:4) $s = {}^1/_2\, r\,(\sqrt{5}-1)$, und somit $Co\,72^0 = {}^1/_4(\sqrt{5}-1) = Co\,288^0$, folglich $Co\,144^0 = 2\,Co^2\,72^0 - 1 = -{}^1/_4(\sqrt{5}+1)$, also

$$1 + 2\,Co\,72^0 + 2 \cdot Co\,144^0 = 0 = 1 + 2 \cdot Co\,144^0 + 2 \cdot Co\,288^0 \qquad 5$$

Es verschwinden also für $\alpha = 0{,}20 = 72^0$ sowohl A als B, so dass in diesem Falle nach 4

$$f = {}^1/_5 \cdot \Sigma(u'-u) \qquad 6$$

d. h. wenn man eine Distanz mittelst einer Mikrometerschraube fünfmal misst, dabei successive die Anfangsstellungen — 0.40, — 0.20, 0, 0.20, 0.40 benutzend, so ist das Mittel aus den fünf erhaltenen Resultaten von den durch die vier ersten Glieder von 2 dargestellten systematischen Fehlern der Schraube frei.

404. Die praktische Untersuchung. — Um die praktische Verwertung der soeben auf Grundlage einer betreffenden Musterarbeit von **Bessel** [a] entwickelten Theorie der Schraube zu verdeutlichen, erscheint es am besten, einen konkreten Fall ins Auge zu fassen, und so lasse ich unten ein Beispiel folgen, welches ich eben derselben entnehme [b]. Für weitern Detail verweise ich teils auf jene Arbeit, teils auf einige seither erschienene andere Untersuchungen [c].

Zu 404: *a.* Für die Arbeit von **Bessel** vgl. 400:a. — *b.* Um die Schraube seines Heliometers zu untersuchen, mass **Bessel** z. B. eine etwa der Hälfte eines Schraubenganges entsprechende Distanz 100 mal in der Weise, dass er ihrem Anfangspunkte successive die Trommelstellungen 55.0, 55.1, 55.2, ... 64.9 entsprechen liess, und erhielt so unter anderm die korrespondierenden Werte

u =	55.0	56.0	57.0	58.0	59.0	60.0	61.0	62.0	63.0	64.0
u' — u =	0.4985	4995	5030	5005	4985	4985	4980	5020	5015	5045

so dass der Anfangsstellung 0.0 in dieser Partie der Schraube das in die folgende Tafel eingetragene mittlere Mass 0,50045 entsprach:

u		u' — u	△u	du	(u' — u)'	△u'
0,0 =	0°	0,50045	249	239	0,49785	— 11
1	36	49690	— 106	238	772	— 24
2	72	49440	— 356	— 132	832	36
3	108	49240	— 556	— 516	792	— 4
4	144	49260	— 536	— 462	762	— 34
5	180	49555	— 241	— 21	815	19
6	216	49905	109	320	823	27
7	252	50140	344	260	748	— 48
8	288	50340	544	36	788	— 8
9	324	50350	554	40	848	52
Mittel		f = 0,49796	± 398		0,49796	± 31

Die Tafel enthält auch die Ergebnisse für die übrigen Anfangsstellungen, den Mittelwert $f = 0{,}49796$ (179^0 $16',04$) und dessen Vergleichungen $\triangle u$ mit den Einzelwerten, welche einen ausgesprochenen systematischen Gang erzeigen, sowie endlich deren Mittelwert $\triangle u = \pm 0{,}00398$. — Mit Hilfe dieser Werte ergeben sich sodann nach 403 : 3 für die Berechnung der a und b die Normalgleichungen

$$10{,}000 \cdot a_1 = 0{,}01304 \qquad -10{,}000 \cdot b_1 = 0{,}02483$$
$$0{,}128 \cdot a_2 = 0{,}00014 \qquad 0{,}128 \cdot b_2 = 0{,}00033 \qquad 1$$

so dass nach 403 : 2 zu jeder Ablesung u an dieser Schraube die Korrektion

$$du = 0{,}00\,1304 \cdot \mathrm{Co}\,u + 0{,}00\,1094 \cdot \mathrm{Co}\,2u - 0{,}00\,2483 \cdot \mathrm{Si}\,u + 0{,}00\,2576 \cdot \mathrm{Si}\,2u \qquad 2$$

beizufügen ist. Die nach dieser Formel für die 10 Stellungen berechneten Werte von du sind ebenfalls in die Tafel eingetragen. — Aus dieser Tafel folgt nun z. B., dass wenn 0,3 auf den Anfang der zu messenden Strecke eingestellt wird, folglich deren Ende in die Nähe von 0,8 zu liegen kömmt, an dem erhaltenen Werte 0,49240 die Korrektionen —516 und 36 anzubringen sind, wofür derselbe in $0{,}49240 + 36 - (-516) = 0{,}49792$ übergeht, wie dies in Kolumne $(u' - u)'$ der Tafel eingetragen ist. Der Mittelwert der $(u' - u)'$ stimmt ganz mit dem frühern f überein; dagegen erzeigen seine Vergleichungen $\triangle u'$ mit den Einzelwerten nicht nur viel kleinere Beträge, sondern es ist auch der systematische Gang verschwunden, so dass 2 als ziemlich guter Ausdruck der untersuchten Schraubenstelle angesehen werden darf. — Anhangsweise mag erwähnt werden, dass auch das 403 : 6 entsprechende Mittel der bei den Stellungen 0.6, 0.8, 0, 0.2, 0.4 erhaltenen Einzelwerte von $u' - u$ mit f bis auf zwei Einheiten der letzten Stelle übereinstimmt. — *c.* Der Litteratur füge ich noch bei: „G. **Müller**, Untersuchungen über Mikrometerschrauben. (Berlin 1876) in fol., — **Winnecke**, Über ein neues Hilfsmittel die periodischen Fehler von Mikrometerschrauben zu bestimmen (A. N. 2179 von 1878), — C. **Reichel** und A. **Westphal**: Über Erzeugung und Untersuchung von Mikrometerschrauben (Z. f. Instr. 1881), — Victor **Knorre** (Nicolajev 1840 geb., Obs. Berlin; Sohn von Karl Friedrich Kn., Dorpat 1801 — Berlin 1883, Dir. Obs. Nicolajev, und Enkel von Ernst Friedrich Kn., Neuhaldensleben 1759 — Dorpat 1810, Prof. math. und Obs. Dorpat), Untersuchungen über Schraubenmikrometer (A. N. 2996—97 von 1890), — etc."

XVI. Die Geodäsie.

Der grosse Mann eilt seiner Zeit voraus, — Der Kluge geht mit ihr auf allen Wegen, — Der Schlaukopf beutet sie gehörig aus, — Der Dummkopf stellt sich ihr entgegen.
(Bauernfeind.)

405. Die geographische Ortsbestimmung. — Während früher unter **Geodäsie** zunächst die sog. „Feldmesskunst“ verstanden wurde [a], fasst man jetzt unter diesem Namen meistens die Lehren und Verfahren zusammen, welche sich auf Bestimmung der Grösse und Gestalt der Erde beziehen, und bei dieser Auffassung bildet die Ermittlung der geographischen Länge und Breite oder die sog. **geographische Ortsbestimmung** offenbar eine Fundamentalaufgabe der Geodäsie, so dass wir uns vor allem aus mit dieser zu befassen haben. Da nun aber (217) **einerseits** die geographische Breite mit der Polhöhe übereinstimmt und die Längendifferenz zweier Orte der Differenz der Ortszeiten in einem und demselben Momente proportional ist, — und **anderseits** die Methoden zur Bestimmung der Polhöhe und der richtigen Ortszeit bereits in einem frühern Abschnitte (XIV) einlässlich abgehandelt wurden, so bleiben zur vollständigen Lösung obigen Problemes nur noch die Mittel zu besprechen, welche zur Auffindung jener Differenz der Ortszeiten oder für eine sog. **Uhrvergleichung** vorhanden sind, und dies soll unter den nächstfolgenden Nummern absolviert werden [b].

Zu 405: *a.* Unter jener frühern Annahme, dass „Γεωδαισία = Land- oder Ackertheilung“ ein Hauptstück der Feldmesskunst sei, sprach **Coppernicus** in seiner Schrift „De revolutionibus (Cap. 13)“ aus, dass ein grosser Teil der „Geodäsie“ auf der ebenen Trigonometrie beruhe. Auch zeigt uns z. B. der Buchtitel „Geodaisia, das ist, von gewisser und bewährter Feldmessung. Durch Joh. Conratin von **Ulm** (später: Ulmer), Prediger zu Schaffhausen am Rhein. Strassburg 1580 in 8.“, was man noch am Ende des 16. Jahrhunderts unter Geodäsie verstand. — *b.* Zur Ergänzung der frühern Litteraturangaben erwähne ich: „**Bohnenberger,** Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vermittelst des Spiegelsextanten. Göttingen 1795 in 8. (2. A. durch Jahn 1852), — F. T. **Schubert,** Anleitung zur astronomischen Bestimmung von Länge und

Breite. St. Petersburg 1803 in 4. (3. A. 1818), — E. **Laugier**, Usage du cercle méridien portatif pour la détermination des positions géographiques. Paris 1852 in 4., — W. **Valentiner**, Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Leipzig 1869 in 4., — Th. **Albrecht**, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen. Leipzig 1874 in 8. (2. A. 1879), — J. **Hilfiker**, Die astronomischen Längenbestimmungen. Aarau 1881 in 8., — etc."

406. Die Uhrvergleichung durch gleichzeitige Erscheinungen. — Das nächstliegende Verfahren für Uhrvergleichungen, die nicht unmittelbar ausgeführt werden können, besteht wohl (vgl. 217) darin, an beiden Orten eine in demselben physischen Momente vor sich gehende Erscheinung zu beobachten, indem sodann die Differenz der Beobachtungszeiten unmittelbar das Gesuchte ergiebt, — und in der That wurde schon durch **Hipparch** empfohlen, die Längendifferenzen aus Beobachtungen von Mondsfinsternissen abzuleiten [a]. Später wurde auf dem Lande zu gleichem Zwecke ausserdem vielfach die zu jeder Zeit und in beliebiger Anzahl ausführbare Beobachtung von Feuersignalen oder Blickfeuern benutzt [b], — während auf dem Meere, wo überdies die eine Beobachtung durch Vorausberechnung ersetzt werden musste, neben den viel zu seltenen Mondfinsternissen vorzugsweise die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten zur Verwendung kamen [c].

Zu 406: *a.* So einfach im Principe die von **Hipparch** empfohlene Methode war, so fand sie anfänglich, wegen der Unsicherheit in der Zeitbestimmung und der Schwierigkeit, sich korrespondierende Beobachtungen zu verschaffen, nur wenig Anwendung, und so giebt **Ptolemäus** in seiner Geographie (lib. 1, cap. 4) keine einzige neuere Bestimmung dieser Art an, sondern begnügt sich, eine frühere Aufzeichnung nachträglich nutzbar zu machen, indem er anführt, dass man 331 v. Chr. in Arbela (Erbil in Ost-Assyrien) um die fünfte, in Karthago (in der Nähe des jetzigen Tunis) aber um die zweite Stunde der Nacht eine Mondfinsternis beobachtet habe. Später wurde sie dagegen häufig und entsprechend den Fortschritten der praktischen Astronomie mit immer besserm Erfolge benutzt, wie letzteres durch einige Beispiele belegt werden mag: Als im 16. Jahrhundert die spanische Regierung den Geographen Franc. **Dominguez** nach Mexiko sandte, um dort die Mondfinsternisse 1577 IX 26 und 1578 IX 15 zu beobachten, während **Alcantara** und **Juanello** mit den korrespondierenden Beobachtungen in Toledo beauftragt waren, ergab die erste Finsternis zwischen Toledo und Puebla einen Längenunterschied von $6^h\ 36^m = 99^0$, die zweite einen solchen von $6^h\ 34^m = 98\frac{1}{2}^0$, und es wurde daraus geschlossen, dass das noch etwas westlichere Mexiko um 100^0 von Toledo abstehe, was zwar nahe um $5^0 = 20^m$ zu viel war, aber doch eine erste erträgliche überseeische Länge repräsentierte; als sodann **Richer** ein Jahrhundert später in Cayenne (vgl. seine „Observations en l'isle de Cayenne. Paris 1679 in 4.") die Finsternis von 1672 IX 7 beobachtete, dabei die glückliche Neuerung einführend, nicht nur Anfang und Ende, sondern auch die Ein- und Austritte von einzelnen Bergen, etc., zu notieren, erhielt er die Länge etwa bis auf $7' = 28''$

genau, so dass ein sehr grosser Fortschritt erreicht war, — und als endlich wieder ein Jahrhundert später **Zach** in Gotha und Pierre-François-André **Méchain** (Laon in Aisne 1744 — Castellon de la Plana bei Valencia 1804; erst Baumeister, später Astronom der Marine und Akademiker) in Paris die totale Mondfinsternis von 1790 X 22 beobachteten, ergaben ihnen schon die zwei Hauptphasen allein einen nur um 2' = 8' unrichtigen Längenunterschied. Immerhin ist nicht daran zu denken, auf diesem Wege je eine grosse Genauigkeit zu erhalten, da der unscharfe Rand des Schattenkegels kein präcises Notieren erlaubt. — Anhangsweise mag an den in 234 besprochenen Vorschlag von **Langren** erinnert werden. — *b.* So bestimmte **Picard** 1671 (vgl. seine „Voyage d'Uraniborg. Paris 1680 in fol.") unter Assistenz von **Römer** die Längendifferenz zwischen Hveen und Kopenhagen mit Hilfe von grossen Feuern, die plötzlich bedeckt wurden, — so schlugen William **Whiston** (Norton 1667 — London 1752; Geistlicher und Prof. math. Cambridge; vgl. „Memoirs. London 1749—50, 2 Vol. in 8.) und Humphry **Ditton** (Salisbury 1675 — London 1715; Geistlicher und Vorsteher einer math. Schule in London) in ihrer Schrift „A new method for discovering the longitude both at sea and land. London 1714 in 8." vor, zu bestimmten Stunden an den Küsten, auf Inseln, etc., Mörser loszuschiessen und den Schall zu Zeitvergleichungen zu benutzen, während **La Condamine** in seiner Abhandlung „Manière de déterminer astronomiquement la différence en longitude de deux lieux peu éloignés (Mém. Par. 1735)" mit Recht empfahl, lieber die damit verbundene plötzliche Lichterscheinung zu verwenden, — so bestimmten, in Ausführung einer von Jos. **Delisle** gemachten Anregung, **Cassini** de Thury und **Lacaille** 1740 die Längendifferenz zwischen zwei Punkten in Languedoc und in der Provence mittelst Blickfeuern auf einem Zwischenpunkte, wobei 10 ℔ Pulver begreiflicher Weise eine auf mehr als 12 g. M. gut sichtbare Flamme gaben, da nach **Zach** (Mon. Corr. X) hiefür ½ ℔ schon reichlich genügt hätte, — etc. Dass bei letzterer Methode auf grössere Distanzen mehrere Zwischenpunkte (auf n Beobachtungspunkte n — 1 Punkte mit Blickfeuern) notwendig werden, ist selbstverständlich, und so wurde es auch bei den grossen Operationen dieser Art gehalten, welche in den Zwanzigerjahren durch die **Littrow**, **Soldner**, **Carlini**, **Plana**, etc. in Süddeutschland und Oberitalien ausgeführt wurden: Über die erstere, bei der nach Lamont von 1820—25 sogar die Verbindung von Wien über München mit Paris und Greenwich hergestellt worden sein soll, und bei der sich Littrows Sohn Karl (nach Wiener-Kalender 1882) schon 1824 beteiligte, weiss ich zwar leider für den Detail bloss auf A. N. 18 von 1822 und Corresp. astr. VII 257—73 zu verweisen, wo **Littrow** die 1822 zwischen Ofen-Wien-Bogenhausen ausgeführten Arbeiten behandelt, — während dagegen über die zweite die Schriften „Fr. **Carlini**, Relazione delle operazioni intraprese al fine di determinare le differenze di longitudine fra diversi luoghi d'Italia col mezzo de segnali a polvere dati sul monte Cimone. Milano 1822 in 8., und: Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie 1821—23. Milan 1825—27, 2 Vol. in 4., Atl. in fol.", allen wünschbaren Aufschluss geben, und überdies für einige eigentümliche Anomalien die Briefe konsultiert werden können, welche (Notiz 369) **Plana** 1824 II 28, VI 21, etc. an Gautier schrieb. — Anhangsweise ist zu erwähnen, dass schon **Halley** (Ph. Tr. 1719) und G. **Lynn** (Ph. Tr. 1727) auf die Möglichkeit hinwiesen, das Aufblitzen einer Sternschnuppe für eine Uhrvergleichung zu benutzen; es hat sich jedoch diese Methode, für welche später **Benzenberg** in

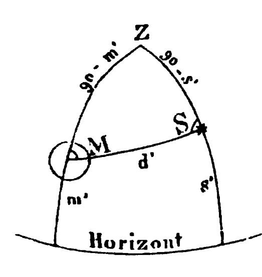
seiner Schrift „Über die Bestimmung der geographischen Lage durch Sternschnuppen. Hamburg 1802 in 8.“ neuerdings auftrat, praktisch nicht besonders bewährt. — *c.* Zur momentanen Längenbestimmung auf Reisen versahen sich schon die alten Seefahrer mit Tafeln (Kalender, Ephemeriden), in welchen für einen bestimmten Ort die Mondsfinsternisse auf Jahre hinaus nach der Zeit ihres Eintreffens angegeben waren: So besassen Christoph **Columbus** und Amerigo **Vespucci** die für Nürnberg auf 1474—1506 gestellten Ephemeriden von **Regiomontan**, so soll auf dem Geschwader **Magellans** ein auf „Abraham F. R. Schemuel **Zacut**, Tabulæ motuum coelestium. Venetiis 1496 in 4.“ gegründeter Kalender benutzt worden sein, so mögen sich wieder andere an die von **Apian** in seinem „Cosmographicus liber. Landishuti 1524 in 4.“ für 1523 bis 1570 gegebene Tafel der Finsternisse gehalten haben, etc.; aber alle diese Hilfsmittel waren noch so unzuverlässlich, dass sie Fehler von abenteuerlicher Grösse veranlassten, und so erhielt z. B. **Columbus** aus der Mondfinsternis von 1504 II 29, durch deren Voraussage er bekanntlich auf Jamaika den Eingebornen so ungemein imponierte, für seinen Lagerplatz 108¾° westliche Länge von Cadix, während er nur etwa 70° hätte finden sollen. Überdies waren die Mondfinsternisse viel zu selten, um dem Bedürfnis der Seeleute genügen zu können, und so suchte man fortwährend nach andern Mitteln, wobei ausser den unter den folgenden Nummern zu behandelnden namentlich auch die Boussole herbeigezogen wurde, wie ich dies schon früher (154) andeutete und jetzt noch durch Anführung der Schrift „Guillaume de **Nautonier**, Mécométrie de l'eymant, ou manière de mesurer les longitudes par le moyen de l'eymant. Paris 1603 in fol.“ belegen will. Da jedoch alle diese Mittel, so gut einzelne derselben principiell waren, sich damals praktisch noch nicht bewährten, so wurde es begreiflich lebhaft begrüsst, als **Galilei** nach Entdeckung der Jupitersmonde darauf hinwies, dass die Beobachtung ihrer rasch wechselnden Stellung und ihrer häufigen Verfinsterungen die gesuchte Lösung des Problemes der Meereslänge ergeben dürfte. Nachdem sodann N. Cl. Fabrice de **Peiresc** (Beaugensie in Provence 1580 — Aix 1637; Parlamentsrat in Aix) aus den vorhandenen Beobachtungen die Umlaufszeiten jener Monde ermittelt hatte, erfand derselbe eine „mechanische Theorie“, nach welcher er fortwährend ihre gegenseitige Stellung auffinden konnte, und glaubte nun, dass durch Beobachtung derselben Konfigurationen an verschiedenen Orten eine brauchbare Längenvergleichung erhältlich sein dürfte; leider entsprachen jedoch die Versuche, für welche man unter anderm einen Beobachter bis Aleppo sandte, seinen Erwartungen gar nicht, und als er überdies hörte, dass sich **Galilei** selbst mit der Ausnutzung seiner Entdeckung beschäftige, überliess er diesem das weitere. Dieser letztere setzte sich in der That bald darauf durch Vermittlung seines Freundes Elie **Diodati** (Genf 1576 — Paris 1661; Advokat am Parlament zu Paris) mit den Holländern in Verbindung, welche ihm sodann Martin **Hortensius** (Delft 1605 — Amsterdam 1639; Prof. math. Amsterdam) und Willem **Blaeu** zusandten, um bei Beobachtung der Satelliten und bei Erstellung betreffender Tafeln behilflich zu sein; aber die Erblindung liess den Greisen das angestrebte Ziel nicht erreichen, und auch Vincenzo **Reinieri** oder Renieri (Genua 1590? — Florenz 1648; Schüler Galileis und später Prof. math. Pisa), dem er die Fortsetzung der Beobachtungen überbunden hatte, konnte das beim Erscheinen des ersten Bandes seiner „Tabulæ motuum coelestium universales. Florentiæ 1639—47, 2 Vol. in 4.“ gegebene Versprechen, Satelliten-Tafeln zu liefern, nicht einlösen. Da auch die früher von **Marius** in seinem „Mundus jovialis-

Noribergæ 1614 in 4." und die nachher von **Hodierna** als „Mediceorum Ephemerides. Panormi 1656 in 4." gegebenen Tafeln ungenügend waren, so konnte damals von praktischer Verwertung des neuen Mittels noch keine Rede sein, und diese wurde erst möglich, nachdem **Cassini** und dessen Nachfolger eine neue Grundlage geschaffen hatten, mit der wir uns aber erst später (464—66) befassen können. — Auch die auf Beobachtung von Bedeckungen durch den Erdmond (Sonnenfinsternisse und Sternbedeckungen) gegründeten Verfahren werden uns erst später (477 und 480) beschäftigen; dagegen mögen hier noch folgende auf das Problem der Meereslänge bezügliche Schriften älterer Zeit aufgeführt werden: „P. **Bouguer**, Nouveau traité de navigation. Paris 1753 in 4. (spät. A. durch Lacaille und Lalande 1760—93), — John **Robertson**, The elements of navigation. London 1754, 2 Vol. in 8. (Histor. Einleitung durch Jam. Wilson; 6. ed. durch W. Wales), — Don Jorge **Juan**, Compendio de navegacion. Cadiz 1757 in 4., — **Maskelyne**, The british mariners guide. London 1763 in 4., — E. **Pézénas**, Astronomie des marins. Avignon 1766 in 8., und: Histoire critique de la découverte des longitudes. Avignon 1775 in 8.", — und endlich: „**Levêque**, Le guide du navigateur, ou Traité de la pratique des observations et des calculs nécessaires au navigateur. Nantes 1779 in 8.", ein Werk, das **Lalande** als das zur Zeit vollständigste dieser Art bezeichnete.

407. Längenbestimmung aus Monddistanzen. — Bei dem Monde bewirken grosse Parallaxe und rasche Bewegung, dass seine Lage mit Ort und Zeit der Beobachtung schnell wechselt, und es muss somit möglich sein, aus betreffenden Messungen an verschiedenen Orten die Längendifferenz dieser letztern abzuleiten [a]. Namentlich sahen **Pigafetta** und **Werner** schon zu Anfang des 16. Jahrhunderts ziemlich gleichzeitig ein, dass sich Bestimmungen der Abstände des Mondes von benachbarten Fixsternen ganz besonders hiefür eignen dürften [b], und wenn diese Methode erst weit später zur Bestimmung der sog. **Meereslänge** in allgemeinern Gebrauch kam, so rührte dies zunächst davon her, dass die zur Vorausberechnung der Abstände für einen Vergleichungsort notwendigen Mondtafeln anfangs noch gar zu unverlässlich, sowie die zur Ausnutzung der Beobachtung dienenden Vorschriften und Hilfstafeln noch viel zu roh und unbequem waren [c].

Zu 407: *a.* Der erste auf der raschen Ortsveränderung des Mondes beruhende Versuch einer überseeischen Längenbestimmung scheint derjenige gewesen zu sein, welchen Amerigo **Vespucci** (Florenz 1451 — Sevilla 1512 Steuermann in spanischen und portugiesischen Diensten), an der Küste von Venezuela machte: Er beobachtete nämlich 1499 VIII 22, dass der Mond daselbst um $7\frac{1}{2}^h$ Abends etwa 1^0, um Mitternacht aber $5\frac{1}{2}^0$ östlich von Mars stand; er hatte sich also per Stunde um 1^0 entfernt, musste somit um $6\frac{1}{2}^h$ Ortszeit in Konjunktion gewesen sein, während **Regiomontan** in seinen für Nürnberg berechneten Ephemeriden dieselbe Konjunktion auf Mitternacht setzte, — folglich musste **Vespucci** schliessen, es liege seine Station um etwa $12 - 6\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}^h$ westlich von Nürnberg, was allerdings mindestens um $\frac{1}{2}^h$ zu viel war. — Ich füge bei, dass **Vespucci** eigentlich den Vornamen „Albericus" besessen

haben soll, der erst später in „Amerigo“ umgewandelt worden sei, nachdem man dem neuen Kontinente entsprechend dem Vorschlage des Freiburger Geographen Martin **Waldseemüller** (Hylacomylus) den (nach Jul. Marcou einer Hügelkette in Nicaragua zugehörenden) Namen **Americ** beigelegt habe; dass als Benennung „Columbia“ passender gewesen wäre, ist selbstverständlicher als **Vespucci** für diese Wahl verantwortlich machen zu wollen und wegen ihr dessen Verdienste herabzusetzen. — *b.* Die Bestimmung der Länge aus Monddistanzen beruht auf folgender Überlegung: Bezeichnet d' die gemessene und um den scheinbaren Halbmesser des Mondes vermehrte Distanz eines Sternes vom Mondrande, d aber die gleichzeitige geocentrische Distanz desselben Sternes vom Mondcentrum, und sind m' und s' die gemessenen scheinbaren, durch Refraktion und Parallaxe verdorbenen Höhen von Mond und Stern, so hat man, da von einem entsprechenden Einflusse auf das Azimut Umgang genommen werden darf, nach 92 : 1



$$d' - d = -\Delta m' \cdot \text{Co}\, M - \Delta s' \cdot \text{Co}\, S \qquad 1$$

wo, wenn α die Refraktionskonstante und π die Mondparallaxe bezeichnet, nach 168 und 231

$$\Delta m' = \alpha \cdot \text{Ct}\, m' - \pi \cdot \text{Co}\, m' \qquad \Delta s' = \alpha \cdot \text{Ct}\, s' \qquad 2$$

ist, während nach 87 : 2

$$\text{Co}\, M = \frac{\text{Si}\, s' - \text{Si}\, m' \cdot \text{Co}\, d'}{\text{Co}\, m' \cdot \text{Si}\, d'} \qquad \text{Co}\, S = \frac{\text{Si}\, m' - \text{Si}\, s' \cdot \text{Co}\, d'}{\text{Co}\, s' \cdot \text{Si}\, d'} \qquad 3$$

folgt. Substituiert man nun aus 2 und 3 in 1, so ergiebt sich

$$d = d' - \frac{\pi}{\text{Si}\, d'} \cdot \left(\text{Si}\, s' - \text{Si}\, m' \cdot \text{Co}\, d'\right) + \frac{\alpha}{\text{Si}\, d'} \cdot \left(\frac{\text{Si}\, s'}{\text{Si}\, m'} + \frac{\text{Si}\, m'}{\text{Si}\, s'} - 2\, \text{Co}\, d'\right) \qquad 4$$

so dass man mit Leichtigkeit die der Zeit der Messung entsprechende geocentrische Distanz und sodann durch Interpolation die Zeit finden kann, zu welcher an einem andern Orte von bekannter Lage, für welchen die geocentrischen Örter für eine Folge von Zeiten vorausberechnet wurden, dieselbe Distanz hatte: Die Vergleichung dieser auf Grundlage der Tafeln berechneten Zeit mit der Beobachtungszeit giebt aber offenbar die gesuchte Längendifferenz. — Es gereicht nun Antonio **Pigafetta** (Vicenza 1491 — Novisa 1534; Gefährte von Magellan) und Joh. **Werner** (vgl. dessen „Cl. Ptolemæi geographia, liber primus. Norimbergæ 1514 in fol.“ und die in 406 erwähnte Cosmographie Apians) zu grosser Ehre, dass sie ungefähr gleichzeitig und wohl unabhängig von einander die der vorstehenden, mutmasslich zuerst durch Israel **Lyons** (Cambridge 1739 — London 1775; Rechner beim Board of Longitude) in ähnlicher Weise durchgeführten Entwicklung zu Grunde liegenden Principien aufstellten; aber grossen praktischen Wert erlangte diese Methode erst weit später, da zu jener Zeit (auch ganz abgesehen von der, bei dem damaligen Zustande der Trigonometrie und der ungenügenden Kenntnis der Refraktionsverhältnisse, vorhandenen Unmöglichkeit brauchbare Rechnungsvorschriften aufzustellen) die Mondtafeln für die unentbehrlichen Vorausbestimmungen noch gar zu unvollkommene Grundlagen boten, und so z. B. (vgl. Peschel 365) noch der berühmte spanische Seemann Pedro de **Sarmiento**, welcher 1579/80 den Seeweg aus der Südsee ins atlantische Meer auffand, als er aus mit dem Kreuzstabe gemessenen Mondabständen die Länge der Insel

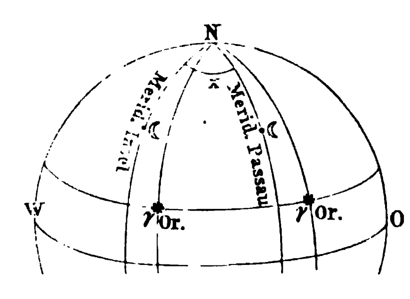
Ascension zu ermitteln versuchte, für dieselbe 3° westlichen Abstand von Cadiz erhielt, während er mindestens 8° hätte finden sollen. — *c.* Etwas später wurde die Methode der Monddistanzen namentlich auch durch **Morin** in seiner „Longitudinum terrestrium et coelestium scientia. Parisiis 1634 in 4." kultiviert und empfohlen, was jedoch (vgl. Delambre V 238—74) nur zu langwierigen Kontroversen und, da immer noch zuverlässige Mondtafeln fehlten, zu keinen praktischen Fortschritten führte; fast mehr machte sich, wenn auch nur indirekt, ein Franzose **Saint-Pierre** um dieselbe verdient, als er sie 1674 Karl II. von England empfahl: Die Folge war nämlich, dass der König eine Kommission zur Prüfung des Vorschlags niedersetzte, zu welcher auf Wunsch von Moore auch **Flamsteed** beigezogen wurde, und sodann auf die Erklärung dieses letztern, dass die vorgeschlagene Methode sich praktisch nicht bewähren könne, bis die Sternkataloge und Mondtafeln auf bessere Beobachtungen basiert seien, sofort den Befehl gab, hiefür auf einem Hügel des königlichen Parkes zu Greenwich eine Sternwarte zu erbauen, welche wirklich schon im folgenden Jahre **Flamsteed** übergeben, aber allerdings anfänglich, da schon der Bau die damals enorm erscheinende Summe von 520 ℔ = 13000 Fr. verschlungen hatte, nur kärglich ausgerüstet wurde (vgl. 347). Später besserten sich diese Verhältnisse fortwährend, so dass durch die Arbeiten in Greenwich nach und nach eine sichere Grundlage für die Mondtafeln geschaffen wurde und die Methode der Monddistanzen im folgenden Jahrhundert mit Erfolg an dem Wettkampfe Teil nehmen konnte, welcher durch die von den seefahrenden Nationen wiederholt auf sichere Bestimmung der Meereslänge ausgesetzten hohen Preise animiert wurde. Wir werden auf diesen Kampf, in welchem auch die Erfindung des Spiegelsextanten (352) eine nicht unerhebliche Rolle spielte, noch wiederholt (namentlich in 409 und dann wieder in Abschnitt XIX) zurückzukommen haben und erwähnen hier nur noch **einerseits**, dass die Methode der Monddistanzen einen ersten wirklichen oder praktischen Erfolg hatte, als sie durch Karsten **Niebuhr,** welchen Tob. **Mayer** nicht nur instruiert, sondern mit einem eigenhändig geteilten Oktanten, einer Abschrift seiner noch ungedruckten Mondtafeln und einer Sekundenuhr von Mudge versehen hatte, auf seiner Reise nach Arabien (1762—67; vgl. 369) zur Anwendung kam, — **anderseits,** dass sie bald darauf einen grossen Impuls erhielt, als **Maskelyne,** nachdem er dieselbe schon in seinem „British mariner's guide. London 1763 in 4." den Nautikern empfohlen hatte, ihnen mit Hilfe von **Lyons** und Richard **Dunthorne** (Ramsay in Huntingdonshire 1711 — Cambridge 1775; Geistlicher, dann Inhaber eines Schenkamts in Cambridge) teils in dem für 1767 und folgende Jahre ausgegebenen Nautical Almanac, teils in den „Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star from the effects of refraction and parallax. Cambridge 1772 in fol., und den: Tables requisite to be used with the Nautical Ephemeris for finding the latitude and longitude at sea. London 1781 in 8. (3. ed. 1802)" wesentlich erleichternde Hilfsmittel an die Hand gab, — **und endlich,** dass Pierre-Antoine **Véron** (Anthieux-sur-Buchy in der Normandie 1736 — Insel Timor 1770 als Astronom der Expedition von Bougainville), der Erfinder des dem Heliometer verwandten **Megameter** (von μέγας = gross im Gegensatze zu μικρός = klein) zum Messen der Monddistanzen, und der von ihm instruierte See-Offizier N. de **Charnières** (1710? — 1775?; vgl. dessen „Mémoire sur l'observation des longitudes en mer. Paris 1767 in 8." und seine, eine Beschreibung des Megameters enthaltenden „Expériences sur les longitudes faites à la mer en 1767 et 1768. Paris 1768 in 8.") nicht nur selbst mit Erfolg

die neue Methode zu praktizieren, sondern überhaupt bei der französischen Marine in Aufnahme zu bringen wussten. — Für die Geschichte und weitere Entwicklung dieses zur See bis auf die Gegenwart als sicherste Kontrole der Uhren betrachteten Verfahrens muss auf die reiche Speciallitteratur verwiesen werden, aus der ich zum Schlusse den bereits erwähnten Schriften und Abhandlungen noch folgende beifüge: „**Lacaille**, Sur l'observation des longitudes en mer par la lune (Mém. Par. 1759), — **Lexell**, Observationes circa methodum inveniendi longitudinem loci ex observata distantia lunæ a stella fixa (Comm. Petrop. 1777), — **Euler**, De inventione longitudinis ex observata lunæ distantia a quadam stella (Comm. Petrop. 1780), — Th. **Elliot**, Improvement of the method of correcting the distance of the moon (Tr. Edinb. 1 von 1784), — Jean-François **Richer** (Surème bei Paris 1743 — Paris 1800?; Mech. Paris), Compas de réduction (von Par. Akad. mit Preis bedacht, von Lalande in „Abrégé de navigation", von Lagrange in Conn. d. t. für 1796 besprochen), — **Mendoza**, Mémoria sobre algunos metodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares. Madrid 1795 in fol. (engl. London 1801), ferner: Recherches sur les solutions des principaux problèmes d'astronomie nautique. London 1797 in 4., und: Tables for nautical astronomy. London 1801 in 4. (auch später), — Nathaniel **Bowditch** (Salem 1773 — Boston 1838; erst Seefahrer, dann Versicherungsbeamter), The new american practical navigator. Boston 1800 in 8. (zahlreiche neue Ausgaben), und: Method of correcting the apparent distances of the moon (Mem. amer. Acad. 1818), — Dan. **Huber**, Über die Reduction der scheinbaren Monddistanzen (Mon. Corr. 12 von 1805; neue Bearbeitung einer 1791 verfassten, aber nicht eingereichten Preisschrift), — Charles **Guépratte** (Nancy 1777 — Brest 1855?; Marine-Offizier und Dir. Obs. Brest), Problèmes d'astronomie nautique et de navigation. Brest 1816 in 8. (3 éd. 1839, 2 Vol.), — Karl Ludwig Christian **Rümker** (Stargard 1788 — Lissabon 1862; Dir. Obs. Paramatta und Hamburg), Handbuch der Schiffahrtskunde. Hamburg 1820 in 8. (und später), und: Längenbestimmung durch den Mond. Hamburg 1849 in 8., — **Horner**, Mémoire sur la réduction des distances lunaires, contenant une méthode courte et facile avec des tables nouvelles. Gênes 1822 in 8. (auch Corr. astr. 6), und namentlich: Méthode facile et exacte pour réduire les distances lunaires avec des tables nouvelles. Gênes 1822 in 8. (auch Corr. astr. 7; hatte grossen Erfolg und wurde ins Engl., Span., Russ., etc., sogar aus dem Engl. wieder ins Franz. übersetzt; vgl. auch Briefe Horner an Gautier von 1822 VII 7 und später in Notiz 352), — **Bessel**, Neue Berechnungsart für die nautische Methode der Monddistanzen (A. N. 218 von 1832), — **Grunert**, Über die Reduktion der Monddistanzen (Archiv 24 von 1855), — William **Spottiswoode** (London 1825 — ebenda 1883; Präsid. Roy. Soc.), On a method for determining longitude by means of observations on the moon's greatest altitude (Astr. Soc. Mem. 29 von 1861), — Wilhelm **Ligowski** (Borken in Westphalen 1821 geb.; erst Oberfeuerwerker, dann Prof. math. Berlin und Kiel), Herleitung einiger Formeln zur Berechnung der wahren Distanz zwischen Sonne und Mond (Grunerts Arch. 40 von 1863; auch 43 und 51 von 1865 und 1870), — Ludwig **Schwarz**, Über die Reduction der scheinbaren und wahren Monddistanzen auf einander. Dorpat 1865 in 4. (auch histor.), — etc."

408. Längenbestimmung aus Mondculminationen. — Schon mehrere ältere Astronomen, wie **Finäus**, **Pühler**, etc., dachten daran, dass für Längenbestimmungen auf dem Lande auch die Be-

obachtungen von Mondculminationen nutzbar gemacht werden könnten [a]; aber dennoch dürfte William **Baffin** als der Erste zu bezeichnen sein, welcher die rasche Bewegung des Mondes in Rektascension in praktischer Weise zu verwerten wusste [b], — ja dessen noch etwas rohes Verfahren wurde erst im Laufe des 18. Jahrhunderts nach und nach durch die **Jonchère, Chabert, Toaldo, Pigott,** etc. vervollkommnet [c], — um sodann im Anfange des laufenden Jahrhunderts durch **Nicolai** seine definitive Gestaltung zu erhalten [d].

Zu 408: *a.* Das von Orontius **Finäus** in seiner Abhandlung „De invenienda longitudinis locorum differentia, aliter quam per lunares eclipses. Lutetiæ 1544 in fol." vorgeschlagene, jedoch nur an fingierten Beispielen durchgeführte Verfahren war nicht nur noch ebenso roh als dasjenige von **Vespucci** (407), sondern sogar zum Teil unrichtig, so dass man ihn hier kaum zu erwähnen hätte, wäre es nicht (vgl. Peschel 367) wahrscheinlich, dass er später seine Methode etwas verbesserte und zu Gunsten derselben in dem Werke „De mundi sphæra, sive Cosmographia. Parisiis 1555 in 4. (lib. 5, cap. 3)" vorschlug, die Mondculminationen für den Pariser Meridian vorauszuberechnen. — Bedeutend verfeinert tritt unsere Methode in der beiläufig schon mehrmals erwähnten Schrift „Christoff **Puehler** (Syclas in Ungarn 1500? — Passau 1570?; Schüler von Tannstetter), Ein kurtze und grundliche anlaytung zu dem rechten verstand Geometriæ. Dilingen 1563 in 4. (mit Dedikation von 1561 II 9 an Abt Bartholomeo zu Allerspach, in der Puehler sagt, dass er vor 4 Jahren, also 1557, „mit grosser und beschwerlicher Kranckheit heimgesucht" worden sei)" auf: **Puehler** beobachtete nämlich 1557 X 10 (also wohl angeblich, da er in jenem Jahr schwer krank darnieder lag) auf einer unter 14° Breite gelegenen (nicht genannten) Insel, dass bei Culmination des Mondes der Deklinationskreis des Sternes γ Orionis nur 6° 50′ östlich vom Meridiane stand, während nach den Ephemeriden dieser Abstand bei Culmination des Mondes in Passau bereits 9° 47′ betragen haben musste; es war also der Mond von der Insel bis Passau um 2° 55′ zurückgeblieben.



Unter Annahme, dass sich die Sonne zwischen zwei Culminationen um 57′ gegen die Sterne verspäte, der Mond aber in einem Sonnentage um 15° 22′, bestimmte er sodann die Längendifferenz x aus der Proportion 15° 22′ : 360° 57′ = 2° 55′ : x, d. h. setzte x = 68° 31′, wie es etwa für eine Insel im Meerbusen von Bengalen passen würde. — Ganz in ähnlicher Weise ging Johannes **Krabbe** (Münden 1560? – Wolfenbüttel 1630?; fürstl. braunschw. wolfenb. Geometer) in Cap. 45 seiner Schrift „Neues Astrolabium samt dessen Nutzen und Gebrauch. Wolfenbüttel 1608 in 4. (auch 1609 und 1625)" vor, zur Erläuterung ebenfalls eine 1584 XI 7 auf einer fernen Insel gemachte Beobachtung fingierend. — Anhangsweise mag beigefügt werden, dass in der Schrift „**Marci** de Kronland, De longitudine s. differentia inter duos meridianos una cum motu vero lunæ inveniendo ad tempus datæ observationis. Pragæ 1650 in 8.", neben der Bestimmung der Länge durch Finsternisse, namentlich auch proponiert wird, an

einem Orte zu einer bestimmten Zeit das Azimut des Mondes zu messen, — daraus unter Voraussetzung der Polhöhe, der Neigung der Mondbahn, der Länge des Mondknotens und der Lage des zur Zeit der Beobachtung culminierenden Punktes der Ekliptik, durch Benutzung von fünf rechtwinkligen Kugeldreiecken die Länge des Mondes zur Beobachtungszeit zu berechnen, — und schliesslich aus einer Ephemeride die Zeit zu suchen, zu welcher der Mond diese Länge an dem Orte besass, auf welchen sich die Ephemeride bezieht: Aus der Differenz der beiden Zeiten wird sodann auf den Unterschied der beiden Meridiane geschlossen. Die an einem fingierten Beispiele durchgeführte Lösung kann als scharfsinnig bezeichnet werden, hatte aber offenbar (auch abgesehen von der Vernachlässigung der Parallaxe) keinen praktischen Wert, da die Voraussetzungen kaum zulässig und die Rechnungen zu mühsam waren. — Für die von **Bouguer** empfohlene Längenbestimmung aus Mondhöhen vgl. dessen „Nouveau traité de navigation. Paris 1753 in 4. (Nouv. éd. par Lacaille 1769)", — für eine von **Radau** proponierte Methode, aus Azimutaldifferenzen und Zenitdistanzen von Mond und einem Sterne eine Längenvergleichung zu erhalten, A. N. 1294 von 1861. — *b.* Bemerkenswert ist, dass **Rothmann** (vgl. Mon. Corr. XII von 1805) etwa 1567 Tycho aufforderte, fleissige Mondbeobachtungen zur Bestimmung der Längendifferenz zwischen Kassel und Uranienburg zu machen; da aber keine Resultate bekannt sind, so ist dennoch William **Baffin** (1584—1622; engl. Seefahrer, dessen Name die Bay an der Westküste von Grönland trägt) als der erste zu betrachten, der die neue Methode mit Erfolg in die Praxis einführte, da uns **Peschel** (gestützt auf „Rundall, Voyages towards the North-West") nicht nur Andeutungen über betreffende Versuche desselben A. 1612, sondern über eine im Sommer 1615, wo sein Schiff lange in der Hudsonsstrasse zwischen Eis festlag, wirklich ausgeführte Bestimmung folgenden Detail zu geben weiss: „Nachdem **Baffin** am 21. Juni eine Mittagslinie gezogen und die Breite des Ortes zu 63° 40' bestimmt hatte, gelang es ihm am nächsten Tage, durch eine Sonnenhöhe die Zeit des Monddurchganges, der in London (nach den Ephemeriden) $4^h\ 54^m\ 30^s$ stattgefunden hatte, auf $5^h\ 4^m\ 52^s$ (oder um 622^s später) zu bestimmen. Der Mond hatte an jenem Tage eine östliche Bewegung von 12° 38' (oder $3025\frac{1}{3}^s$), so dass er 74° 5' (oder $622 : 3025\frac{1}{3} = 0{,}206^d = 4{,}94^h$) westlichen Abstand von London erhielt, ein Ergebnis, welches sich nach Sir E. W. Parry der Wahrheit (allerdings bei dem damaligen Zustande der Instrumente und Tafeln als ein Geschenk des Zufalls) bis auf 1° nähert". — *c.* Nachdem die Methode von **Baffin** durch die Schriften „Dorothei **Alimari**, Mathematici Veneti, Longitudinis aut terra aut mari investigandæ methodus. Londini 1715 in 8., — Charles **Leadbetter**, A compleat system of Astronomy. London 1728, 2 Vol. in 8., — etc." etwas allgemeiner bekannt und genauer präcisiert worden war, und etwas später der Ingenieur Etienne Lécuyer de la **Jonchère** (Montpensier 1690 — England 1740) und der (sonderbarer Weise von Lalande ignorierte) Seemann Joseph-Bernard Marquis de **Chabert** (Toulon 1723 — Paris 1805) bei verschiedenen Gelegenheiten (vgl. namentlich die von dem Erstern dem englischen Parlamente gewidmete Schrift „Découverte des longitudes estimées généralement impossibles à trouver, suivies de Tables dressées sur le premier méridien, pour en procurer à toutes personnes l'usage facile tant par terre que par mer, tous les jours et en tous lieux. 1734 ou 1735, s. l. in 8." und das von dem Zweiten 1766 in die Par. Mém. eingerückte „Mémoire sur l'état actuel de l'entreprise pour la rectification des cartes marines de la Méditerranée")

empfohlen hatten, möglichst häufig nicht nur die Culminationen des Mondes, sondern ausserdem diejenigen benachbarter und besonders in Deklination wenig verschiedener Sterne zu beobachten, erwarben sich die Jos. **Toaldo** (vgl. dessen „De methodo longitudinum ex observato transito Lunæ per meridianum ad cel. D. Nevil Maskelyne Epistola. Patavii 1784 in 4.") und Edw. **Pigott** (vgl. dessen von 1786 datierenden Brief an Maskelyne, der nebst einem Nachtrage unter dem Titel „The latitude and longitude of York determined from a variety of astronomical observations; together with a recommendation of the method of determining the longitude of places by observations of the Moon's transit over the meridian" in die Phil. Trans. jenes Jahres aufgenommen wurde) nahe gleichzeitig um unsere Methode ein grosses Verdienst, indem sie nicht nur nachwiesen, wie man durch den eben erwähnten Zuzug von Sternen im Parallel des Mondes von den Instrumentalfehlern unabhängig werde, sondern namentlich auch **Maskelyne** zu veranlassen wussten, von da ab im Naut. Alm. zu Gunsten korrespondierender Beobachtungen für jede Culmination des Mondes den auf dieselbe bezüglichen Daten auch eine Auswahl von passenden Vergleichsternen beigeben zu lassen. Durch Angabe der nach dieser Methode bereits erhaltenen Bestimmungen belegte ferner sowohl **Toaldo** (mit 11 Best. in den Jahren 1783 bis 1784) als **Pigott** (mit 21 Bestimmungen in den Jahren 1781—85) die Brauchbarkeit derselben, und letzterer stellte überdies eine Anzahl bemerkenswerter Regeln auf, welche er bei Beobachtung und Berechnung befolgt wissen wollte, von denen hier zur Vergleichung mit den sofort zu entwickelnden Formeln der Gegenwart noch die Analogie: „The increase of the moon's Æ in 12 hours, found by computation, is to 12 hours as the increase of the moon's Æ between two places, found by observation, is to the difference of meridians" wörtlich beigefügt werden mag. — *d.* Bezeichnen T_1 und T_2 die Durchgangszeiten des sichtbaren Mondrandes an zwei unter den Längen l_1 und l_2 aufgestellten Passageninstrumenten, s ihre gemeinschaftliche Korrektion für den Radius, s_1 und s_2 ihre Verbesserungen wegen den Instrumentalfehlern (vgl. 435), — korrespondieren ferner diesen Zeiten in Beziehung auf den Ausgangsmeridian die Zeiten $T + t_1$ und $T + t_2$, in derem aus $T + t_1 = \tau - \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ und $T + t_2 = \tau + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ folgendem Mittel $\tau = T + \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ der Mond die Rektascension α besitzt, — und ist endlich α^* die Rektascension eines im Parallel des Mondes stehenden, also mit ihm von den Instrumentalfehlern nahe gleich influierten, dieselben Instrumente zu den Uhrzeiten $T_1^* = T_1 - \Delta\alpha_1$ und $T_2^* = T_2 - \Delta\alpha_2$ passierenden Sternes, so hat man, falls ΔT_1 und ΔT_2 die Uhrkorrektionen auf Sternzeit sind,

$$T_1 + \Delta T_1 \pm s - s_1 = \alpha - \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{8}(t_2 - t_1)^2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \\ - \frac{1}{48}(t_2 - t_1)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots\ldots$$

$$T_2 + \Delta T_2 \pm s - s_2 = \alpha + \frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{8}(t_2 - t_1)^2 \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \\ + \frac{1}{48}(t_2 - t_1)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} + \ldots\ldots \qquad 1$$

$$T_1^* + \Delta T_1 - s_1 = \alpha^* \qquad T_2^* + \Delta T_2 - s_2 = \alpha^*$$

und somit einerseits, wenn man bei den dritten Differentialquotienten stehen bleibt,

$$T_2 - T_1 + \Delta T_2 - \Delta T_1 = (s_2 - s_1) + (t_2 - t_1)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{24}\cdot(t_2 - t_1)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} \qquad 2$$

während anderseits

$$T_2 - T_1 + \triangle T_2 - \triangle T_1 = (T_2^* + \triangle \alpha_2) - (T_1^* + \triangle \alpha_1) + \triangle T_2 - \triangle T_1 = s_2 - s_1 + \triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1 \quad 3$$

Hieraus ergiebt sich aber

$$\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1 = (t_2 - t_1) \cdot \frac{d\alpha}{dt} + {}^1/_{24} \cdot (t_2 - t_1)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3}$$

oder, wenn man $t_2 - t_1$ im zweiten Gliede rechts durch den Näherungswert $(\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1) : {}^{d\alpha}/dt$ ersetzt und sodann $t_2 - t_1$ ausrechnet,

$$t_2 - t_1 = \frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{d\alpha/dt} - \frac{1}{24 \cdot d\alpha/dt} \cdot \left(\frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{d\alpha/dt}\right)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} \quad 4$$

Nun waren aber die Ortszeiten der beiden Beobachtungen

$$T + t_1 + l_1 = T_1 + \triangle T_1 \qquad T + t_2 + l_2 = T_2 + \triangle T_2$$

also hat man unter Benutzung von 3 und 4

$$l_2 - l_1 = T_2 - T_1 + \triangle T_2 - \triangle T_1 - (t_2 - t_1) = = \frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{d\alpha/dt}\left(\frac{d\alpha}{dt} - 1\right) + s_2 - s_1 - \frac{1}{24 \cdot d\alpha/dt} \cdot \left(\frac{\triangle \alpha_2 - \triangle \alpha_1}{d\alpha/dt}\right)^3 \cdot \frac{d^3\alpha}{dt^3} \quad 5$$

oder, wenn man die in den neuern Ephemeriden für jeden Tag gegebene Rektascensionsbewegung des Mondes in einer **Mondstunde**

$$d\alpha/dt : (1 - d\alpha/dt) = \lambda \quad 6$$

setzt, und das letzte, nur bei mehr als zwei Stunden Längendifferenz einen bemerkbaren Betrag annehmende Glied vernachlässigt,

$$l_2 - l_1 = (\triangle \alpha_1 - \triangle \alpha_2) : \lambda + s_2 - s_1 \quad 7$$

eine Regel, welche sich von der oben nach **Pigott** gegebenen und dann noch lange festgehaltenen oder wenigstens (vgl. G. Love in Mon. Corr. 8 von 1803, A. Mackay in „The theory and practice of finding the longitude. 3. ed. London 1810, 2 Vol. in 8.“, etc.) nicht richtig abgeänderten, sich **wesentlich** dadurch unterscheidet, dass λ an die Stelle von ${}^{d\alpha}/dt$ getreten ist. — Es fallen somit bei dieser Methode, für welche, wie schon angedeutet, Friedrich Bernhard Gottfried **Nicolai** (Braunschweig 1793 — Mannheim 1846; Dir. Obs. Mannheim) durch seine Abhandlungen. „Über die Methode Längen durch Rektascensionsdifferenzen gewählter Vergleichssterne vom Monde zu bestimmen (A. N. 1 von 1821), und: Berechnung der Meridiandifferenz zweier Orte aus korrespondierenden Mondsculminationen (A. N. 26 von 1823)“ eine neue Aera eröffnete, Uhrkorrektion, Mondradius, Fehler der Mondtafeln, etc. fast ganz ausser Betracht, ja es ist einzig **und nur einfach** die nach 380 leicht zu bestimmende Grösse $s_2 - s_1$ als Korrektionsglied übrig geblieben. Immerhin darf nicht verhehlt werden, dass die Sicherheit der Bestimmung durch den, wenn auch wohl durch **Quetelet** (vgl. seinen Brief an Gautier von 1837 II 16 in Notiz 387) bedeutend überschätzten Einfluss der Diffraktion erheblich leidet: Da nämlich durch letztere das Bild des Mondes um so mehr ausgedehnt wird, je kleiner die Öffnung des Fernrohrs ist, so werden die Antritte des ersten Mondrandes mit einem kleinern Instrumente früher, diejenigen des zweiten später beobachtet werden als mit einem grössern, und so ergab sich, vgl. „**Struve**, Vergleichung der mit einem kleinen tragbaren Durchgangsinstrument von Ertel (26^{mm} Öffnung) und den mit dem dreifüssigen Meridiankreise (110^{mm} Öffnung) beobachteten Geraden Aufsteigungen des Mondes und der Mondsterne (A. N. 237 von 1833)“ den beiden Beobachtern W. **Feodorow** und E. W. **Preuss** ein durchschnittlicher Unterschied von $\pm 0^s{,}336$, — fast übereinstimmend mit den $\pm 0^s{,}316$, welche

Jul. **Maurer** in seiner Diplomarbeit von 1879 für diesen Fall auf Grund der Weber'schen Diffraktionstheorie gefunden hatte. — Für weitern Detail verweise ich noch auf: „**Lindenau**, Über die Zuverlässigkeit der Längenbestimmungen durch Mondculminationen (Mon. Corr. 12 von 1805), — **Zach**, Notice historique sur la méthode de déterminer la longitude par le passage de la lune (Corr. astr. 6 von 1822), — Francis **Baily** (Newbury in Berkshire 1774 — London 1844; Geldmäkler und Präs. Astr. Soc.), On the method of determining the difference of meridian by the culmination of the moon (Mem. Astr. Soc. 2 von 1824), — Thomas **Olivecrona** (Messvick in Wermland 1818 — Stockholm 1842; Obs. Stockholm), De longitudine terrestri e stellis una fere cum luna culminantibus determinanda dissertatio. Upsaliæ 1841 in 4., — **Airy**, On the weights to be given to the separate results for terrestrial longitudes, determined by the observation of transits of the moon and fixed stars (Mem. Astr. Soc. 19 von 1850), — **Chauvenet**, Longitude by transits of the moon and a star over the same vertical circle (Astron. Journ. 104 von 1857), — Yvon **Villarceau** (Vendôme 1813 — Paris 1883; Obs. und Akad. Paris), Note sur la détermination des longitudes terrestres au moyen des culminations lunaires (Conn. d. t. 1876), — etc." — Vgl. auch die in 435 : c nachgetragene Entwicklung.

409. Längenbestimmung mit Chronometern. — Als Rainer **Gemma** Frisius in seiner Schrift „De principiis astronomiæ et cosmographiæ. Antuerpiæ 1530 in 4." vorschlug, die (122) kurz zuvor erfundenen tragbaren Uhren zur direkten Uhrvergleichung zu benutzen, waren diese Hilfsapparate noch viel zu unzuverlässig, um mit ihnen auch nur auf dem Lande erträgliche Längen zu bestimmen, geschweige um behufs Ermittlung der Meereslänge die Zeit des Ausgangsortes gewissermassen mit sich zu führen [a], — ja noch lange blieben alle Anstrengungen, auch nur einigermassen brauchbare Zeithalter oder **Chronometer** zu beschaffen, ohne den gewünschten Erfolg [b], — und es gelang erst im 18. Jahrhundert, in dieser Richtung so erhebliche Fortschritte zu machen, dass die Anwendung der Principien von Gemma mit den übrigen Methoden konkurrieren konnte [c]. Seither sind dann allerdings auf dem Lande und auf der See manche von schönem Erfolge begleitete Chronometer-Expeditionen ausgeführt worden [d], ja bei Bestimmung der Meereslänge spielen die Chronometer gegenwärtig weitaus die erste Rolle, wenn auch auf längern Reisen immer noch nicht ausser Acht gelassen werden darf, die so erhaltenen Resultate nach andern Methoden zu kontrolieren.

Zu 409: *a.* Noch etwas vor Gemma sollen der schon öfter genannte Kosmographe **Alonso** de Santa Cruz und Ferdinand **Columbus** (ein Sohn von Christoph) an dieses in der That nächstliegende Verfahren gedacht haben; aber da ihre Chronometer „Sand- und Wasseruhren, Räderwerke durch Gewichte bewegt, ja selbst in Öl getränkte Dochte" waren, so konnte von praktischem Erfolge erst nicht die Rede sein. — *b.* Als Peter **Crüger** 1615 (vgl. Hansch) in einem an **Kepler** gerichteten Briefe die Idee aussprach, dass man behufs

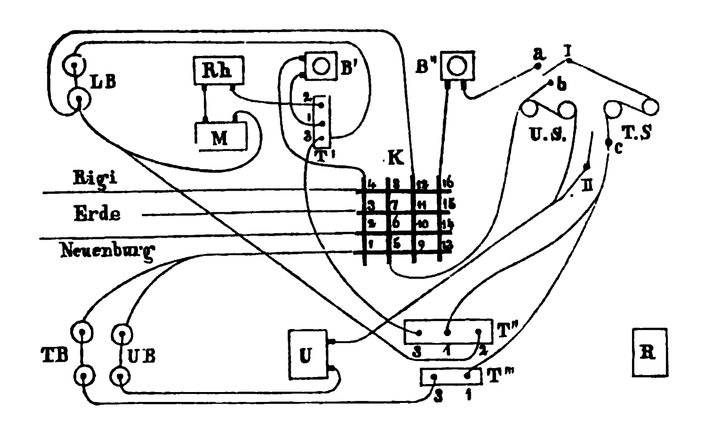
Längenbestimmung die Angaben zweier Sonnenuhren mittelst einer Räderuhr vergleichen könnte, antwortete ihm dieser mit vollem Recht, es sei zweifelhaft, ob die Räderuhr nicht mehr fehlen könnte als die Schätzung der Distanz, — wolle man sich aber auf letztere verlassen, so könne man ja den Mittagsunterschied leicht aus ihr und den beiden Polhöhen berechnen. — Etwas günstigere Verhältnisse traten dann allerdings ein, als es **Huygens** gelang, ein besseres regulierendes Princip in die Uhren einzuführen, indem dieser ausgezeichnete Mann sofort daran dachte, seine Pendeluhr dadurch auch seetüchtig zu machen, dass er (vgl. Berthoud, Histoire I 383) als Motor eine Stahlfeder anwandte, und sowohl die Aufhängung des Pendels, als diejenige der ganzen Uhr zweckentsprechend abzuändern suchte. Der Erfolg schien anfänglich, wie zwei von ihm 1663 XI 11 und 18 aus Paris an Sir Rob. Moray (vgl. Letters of scient. Men I 104 u. f.) gerichteten Briefen hervorgeht, ziemlich befriedigend: Die Uhr blieb auf dem Meere auch bei den stärksten Stürmen im Gange, und einzelne grössere Abweichungen schienen sich auf ungenaue Befolgung der für Behandlung der Uhr gegebenen Instruktionen oder mangelhafte Ausführung der vorgeschriebenen Kontrolbeobachtungen zurückführen zu lassen. Auch noch als 1664 ein Freund von Huygens, der Major **Holmes**, zwei solche Uhren auf eine Seereise mitnahm, wurden (vgl. Brief von Huygens von 1665 II 5 im Journ. d. Sav. von 1665) ganz ordentliche Resultate erhalten, so dass **Huygens** die grösste Freude hatte und immer auf weitere Verbesserung dachte; aber schliesslich erreichte er das Ziel dennoch nicht in genügender Weise. — *c.* Nachdem das englische Parlament 1714 eine Kommission zur Prüfung der Längenfrage ernannt und deren Berichterstatter, welcher kein minderer als **Newton** war, empfohlen hatte, durch eine Preisausschreibung die Gelehrten und Künstler zu neuen Anstrengungen zu ermutigen, erschien noch im gleichen Jahre unter dem Titel „An act for providing a public reward, for such person or persons as shall discover the longitud at sea“ die berühmte Bill, welche für eine bis auf $^1/_2{}^0$ sichere Methode der Längenbestimmung zwischen England und Amerika eine Belohnung von 20000 ℔ Sterling versprach, und kleinere Preise von 15000 oder 10000 ℔, wenn die Sicherheit auch nur auf $^2/_3{}^0$ oder 1^0 gehe, — ferner zur Prüfung der eingehenden Arbeiten einen eigenen „Board of longitude“ einsetzte. Durch diese hohen Preise und den mit der Lösung verbundenen Ruhm wurden nun wirklich die grössten Anstrengungen hervorgerufen, und zwar nach doppelter Richtung, indem die praktischen Mechaniker Längenuhren von genügender Genauigkeit zu erstellen, die Mathematiker und Astronomen die Mondtheorie und die Mondtafeln hinlänglich zu verbessern suchten. Wir werden die Erfolge in letzterer Richtung in Abschnitt XIX zu besprechen haben und beschränken uns hier darauf, einige auf die Längenuhren bezügliche historische Notizen beizufügen: Zunächst ist zu erwähnen, dass es **Harrison**, nachdem er (171) schon etwa 1725 sein Rost-Pendel konstruiert hatte, auch gelang, die von **Huygens** (123) als Surrogat des Pendels in die Federuhren eingeführte Spirale (Unruhe) gegen die Wärme zu kompensieren, und so spätestens 1735 eine tragbare Uhr zu erstellen, welche unter Anwendung der auch von seinem Vorgänger benutzten Cardan'schen Aufhängung (153) sich auf mehreren Seereisen ganz ordentlich bewährte, — ja durch fortwährende Verbesserungen nach und nach Werke zu liefern, durch die alle Forderungen der Parlamentsakte mehr als erfüllt wurden, so dass ihm schliesslich (wenn auch erst nach langen und widerwärtigen Verhandlungen, in welchen Maskelyne nicht die schönste Rolle gespielt zu haben scheint, — und nur ratenweise) die

volle Prämie von 20000 ₶ zufiel. Ferner will ich erwähnen, dass die Fein-Uhrmacherei, welche der sich schon von 1703 hinweg ebenfalls mit Längenuhren beschäftigende Henry **Sully** (England 1679 — Paris 1728) nach Frankreich brachte, auch in diesem Lande alsbald grosse Fortschritte machte, zumal ebenfalls Pensionen und Preise für bedeutendere Leistungen in Aussicht standen. Es würde mich dagegen viel zu weit führen, die betreffenden Arbeiten der Ferd. **Berthoud,** Pierre **Leroy** (Paris 1717 — Vitry bei Paris 1785; Sohn und Geschäftsnachfolger von Julien: Tours 1686 — Paris 1759), etc., ihren Wettstreit mit den englischen Uhrmachern, und die neuern Fortschritte dieser Branche ebenfalls eingehend zu behandeln, und ich beschränke mich darauf, zum Schlusse noch anzuführen, dass es seither auch gelang, den früher ausschliesslich gebräuchlichen Dosen- oder Box-Chronometern ganz wirksame Taschen- oder Pocket-Chronometer beizufügen. — *d.* Als erste grössere Chronometer-Expeditionen erwähne ich diejenigen, durch welche unter der Leitung von **Schumacher** 1821 Altona und Kopenhagen, unter derjenigen von Johann Ludwig **Tiarks** (Waddewarden in Ostfriesland 1789 — Jever 1837; erst Biblioth. Brit. Mus., dann Geodät in engl. Diensten) 1823/4 Greenwich und Altona, und unter derjenigen von Theodor II von **Schubert** (Petersburg 1789 — Stuttgart 1865; Sohn von Th. in 12:o und General in russ. Diensten) 1833 Kronstadt, Stockholm und Altona verbunden wurden, — als grösste und wichtigste dieser Art aber die von W. **Struve** geleitete und in dem Werke „Expédition chronométrique entre Poulkowa, Altona et Greenwich. St-Pétersbourg 1844—46 in 4.“ einlässlich beschriebene Operation.

410. Längenbestimmung mit Hilfe telegraphischer Verbindungen. — Sobald zwei Punkte telegraphisch verbunden und mit zweckmässig eingeschalteten Chronographen versehen sind, so kann man die dem Meridianunterschiede entsprechende Differenz der Ortszeiten finden, sobald man auf jedem der beiden Punkte abwechselnd Zeichen giebt, welche auf beiden Chronographen neben die gleichzeitigen Uhrstände notiert werden, — oder man kann die Verspätung eines Sternes von dem einen Meridiane zum andern bestimmen, indem man den Stern an beiden Punkten successive beobachtet und alle Fadendurchgänge auf beiden Chronographen notieren lässt [a]. Diese neue Art der Uhrvergleichung hat sich seit 1844, wo sie durch den Amerikaner Karl **Wilkes** zum ersten Male in Anwendung gebracht wurde, in der Praxis so ausgezeichnet bewährt, dass sie gegenwärtig für Längenbestimmungen auf dem Lande fast ausschliesslich gebraucht wird [b].

Zu 410: *a.* Als Beispiel wähle ich die von mir 1867 VI 29 bis VIII 13 mit **Plantamour** (Astron. Station auf Rigi-Kulm) und **Hirsch** (Sternwarte Neuenburg) zu Gunsten der kurz zuvor ins Leben getretenen geodätischen Association (434) gleichzeitig nach beiden Methoden ausgeführte Längenvergleichung, und verdeutliche zunächst (unter Hinweisung auf 158) die von mir auf der als Vermittlungsstation gewählten Sternwarte Zürich dafür getroffene Disposition durch nachfolgende Figur, in welcher TB und UB die je aus 10 Minotto-Elementen bestehenden Lokalbatterien für Taster und Uhr bezeichnen, —

LB die erst aus 120 kleinen Daniell'schen, später aus 80 Daniell'schen und 40 Minotto-Elementen bestehende Linienbatterie, — U die alle zwei Sekunden



den Uhrstrom herstellende Hilfsuhr, — R den zur Kontrole benutzten Regulator, — US und TS Uhrschreiber und Tasterschreiber des Chronographen, — T', T" und T''' Sprech-, Linien- und Lokal-Taster, — B' und B" Boussolen, — M den Morse oder Schwarzschreiber, — Rh den Rheostaten, — und endlich K den zur jeweiligen Herstellung der nötigen Verbindungen dienenden Kettenwechsel: Bei letzterem stellte beständig bei 5 ein Stift die Verbindung zwischen den sich dort kreuzenden Lamellen her, während der Gleitwechsel I auf a oder b gebracht wurde, je nachdem Rigi (R) und Neuenburg (N) in Verbindung mit Zürich (Z) gebracht oder für lokale Beobachtungen ausgeschaltet werden sollten; in ersterm Falle erforderte der Austausch

zwischen	R-Z-N	R-Z	N-Z
dass für Gebrauch des			
Morse	4 · 10	4 · 11	2 · 11
Chronographen	16 · 10	16 · 11	14 · 11

Stifte erhielten, — im zweiten Falle musste, wenn speciell der Standunterschied der beiden Chronographenfedern, oder die sog. **Federnparallaxe**, bestimmt werden sollte, auch noch der Gleitwechsel II auf c gestellt werden; um endlich N. und R. unter Ausschluss von Z. miteinander zu verbinden, genügte es, bei 2 und 4 Stifte zu stecken. Ich füge bei, dass in Neuenburg und auf dem Rigi, da diese nur als Endstationen zu funktionieren hatten, natürlich etwas einfachere Dispositionen getroffen werden konnten. — Als Beispiel für die Längenbestimmung selbst wähle ich die 1867 VII 3 in Zürich und Neuenburg je an 21 Faden beobachteten, an den beidseitigen Chronographen notierten, folglich auch als Zeichen benutzbaren Durchgänge von μ' Sagittarii, und stelle (auf die in 380 behandelte Ermittlung von Instrumentalfehler, Uhrkorrektion etc. hier nicht eintretend) die sich aus ihnen nach den beiden Methoden ergebenden Bestimmungen für die Längendifferenz L und die für den Strom zum Durchlaufen von Linien und Apparaten nötige Zeit T in folgender Weise schematisch zusammen, unter p die nach 382 bestimmte Personaldifferenz zwischen Hirsch und mir verstehend:

I. Aus den Ablesungen am Zürcher Chronographen ergab sich

Durchgangszeit . N:	18ʰ	2ᵐ	10ˢ,300 + p	Z:	17ʰ 55ᵐ 44ˢ,469
Instr. Korr. . . .			— 0,484		+ 2,892
Culminationszeit . N:	18	2	9,816 + p	Z:	17 55 47,361
Z:	17	55	47,361		
Differenz		6	22,455 + p		
Versp. d. Zürch. Chron.			0,055	in 6ᵐ,4	
L + T =		6ᵐ	22ˢ,510 + p		

II. dagegen aus den Ablesungen am Neuenburger Chronographen

Durchgangszeit . N:	18ʰ	5ᵐ	49ˢ,577 + p	Z:	17ʰ 59ᵐ 23ˢ,719
Instr. Korr. . . .			— 0,484		+ 2,892
Culminationszeit . N:	18	5	49,093 + p	Z:	17 59 26,611
Z:	17	59	26,611		
Differenz		6	22,482 + p		
Versp. d. Neuenb. Chron.			0,002	in 6ᵐ,4	
L — T =		6ᵐ	22,484 + p		
und somit aus I u. II 2 T =			0ˢ,026		L = 6ᵐ 22ˢ,497 + p

III. ferner aus den Durchgängen in Zürich als Zeichen betrachtet

wie oben . . . . Z′:	17ʰ	55ᵐ	44ˢ,469		Federnparallaxe
„ „ . . . . . Z″:	17	59	23,719	Z .	+ 0ˢ,052
Z′ — Z″:	—	3	39,250	N .	— 0,034
Korr. für Federnp. . .	+		0,086	Diff.	+ 0,086
Korr. auf 18ʰ	—		0,037		
Z — N — T =	—	3ᵐ	39ˢ,201		

IV. und endlich aus den Durchgängen in Neuenburg

wie oben . . . N′:	18ʰ	2ᵐ	10ˢ,300 + p		Uhrkorrektion
„ „ . . . N″:	18	5	49,577 + p	Z .	+ 10ᵐ 4ˢ,162
N′ — N″:	—	3	39,277	N .	+ 2,520 — p
Korr. für Federnp. . .	+		0,086	Diff.	+ 10ᵐ 1,642 + p
Korr. auf 18ʰ	+		0,018		
Z — N + T =	—	3ᵐ	39ˢ,173		
und somit aus III u. IV 2 T =			0,028	Z — N =	— 3ᵐ 39ˢ,187
oder da die Differenz der Uhrkorrektionen					+ 10 1,642 + p
durch Addition				L =	6ᵐ 22ˢ,455 + p

so dass die beiden Methoden wesentlich zu demselben Resultate führen. Für weitern Detail auf die Publikation „E. **Plantamour**, R. **Wolf** et A. **Hirsch**, Détermination télégraphique de la différence de longitude entre la station astronomique du Righi-Kulm et les observatoires de Zurich et de Neuchatel. Genève 1871 in 4.“ verweisend, füge ich noch bei, dass im ganzen an 18 Abenden zahlreiche Sterne und Zeichen gewechselt wurden, dass sich aus erstern im Mittel L = 6ᵐ 22ˢ,344, aus letztern im Mittel L = 6ᵐ 22ˢ,324 ergab, und dass schliesslich unter Annahme von p = 0ˢ,034 die Längendifferenz Zürich-Neuenburg zu 6ᵐ 22ˢ,367 angenommen wurde. — *b.* Der Gedanke, telegraphische Verbindungen für Uhrvergleichungen zu benutzen, liegt so nahe, dass es nicht überraschend ist zu hören, es haben schon 1839 sowohl **Gauss** als **Morse** diese

Methode empfohlen; jedoch scheint sie erst 1844 durch Kapitän Karl **Wilkes** zur Bestimmung der Längendifferenz Washington-Baltimore wirklich in Anwendung gekommen zu sein, und zwar noch in der primitiven Weise, dass er an beiden Stationen auf Ortszeit regulierte Chronometer nach den Telegraphenbureaus bringen, und sodann während fünf Tagen durch Zeichen vergleichen liess, welche abwechselnd am einen Orte gegeben und am andern mit dem Ohr beobachtet wurden. Da der Erfolg nicht unbefriedigend war, so entschloss sich sodann im folgenden Jahre Alexander Dallas **Bache** (Philadelphia 1806 — Newport 1867; Urenkel von Franklin; Prof. phys. Philadelphia, dann Nachfolger von Hassler), die Längendifferenzen der Hauptpunkte der Coast Survey auf diese Weise bestimmen zu lassen, wofür nunmehr von 1846 hinweg unter Direktion von **Walker** die nötigen Arbeiten in Gang kamen: Die Sternwarten und Stationen von Washington, Philadelphia, New-York, etc. wurden mit den Telegraphenlinien verbunden, — man tauschte sowohl Zeitzeichen als Fadendurchgänge aus, wofür alsbald der Chronograph (159) vortreffliche Dienste leistete, — etc. Bald folgte auch Europa, indem schon 1848 (vgl. Wien. Sitzungsber. von 1848 XI 30) unter Leitung von **Kreil** die Längendifferenzen Wien-Prag und Wien-Olmütz auf telegraphischem Wege bestimmt wurden, und nach wenigen Jahren schlug diese Methode, welche in der Schweiz zum erstenmale 1861 durch **Plantamour** und **Hirsch** für Genf-Neuenburg Anwendung fand, wenigstens auf dem Lande alle übrigen Verfahren aus dem Felde, ja erlaubte 1866, vgl. „B. A. **Gould**, The transatlantic Longitude, as determined by the Coast Survey expedition of 1866. (Smiths. Contrib. 1869)“, mit Hilfe des kurz zuvor gelegten atlantischen Kabels auch die überseeischen Längen in sicherster Weise zu kontrolieren: Es ergab sich dabei für Washington-Greenwich die Längendifferenz $5^h\ 8^m\ 12^s,45$, während man früher durch Finsternisse und Bedeckungen durchschnittlich $14^s,86$, durch Mondculminationen $10^s,12$ und durch Chronometer $12^s,30$, also im Mittel $12^s,43$ gefunden hatte. — Anhangsweise füge ich bei, dass man früher, in Ermanglung zuverlässiger Chronographen, häufig die sog. **Methode der Coincidenzen** anwandte, welche darin bestand, dass man an jedem Beobachtungsabende zu verabredeten Zeiten zuerst auf der einen, dann auf der andern Station eine Hilfsuhr, deren Sekunden merklich von einer Sternsekunde abwichen, in die Telegraphenleitung einschaltete, und den durch sie bewirkten Sekundenschluss durch das Schlagen von Relais (158) auf beiden Stationen hörbar machte, so dass jeder der beiden Beobachter die Coincidenzen zwischen den Schlägen seiner Sternuhr und denjenigen seines Relais aufsuchen konnte; dass sich so ebenfalls eine Uhrvergleichung erhalten lässt, ist klar, und für den Detail einer solchen Operation kann z. B. auf die 1865 durch Wilhelm **Förster** (Grünberg in Schlesien 1832 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Berlin) und E. **Weiss** ausgeführte Längenbestimmung Berlin-Wien (Publ. preuss. geod. Inst. 1871) verwiesen werden.

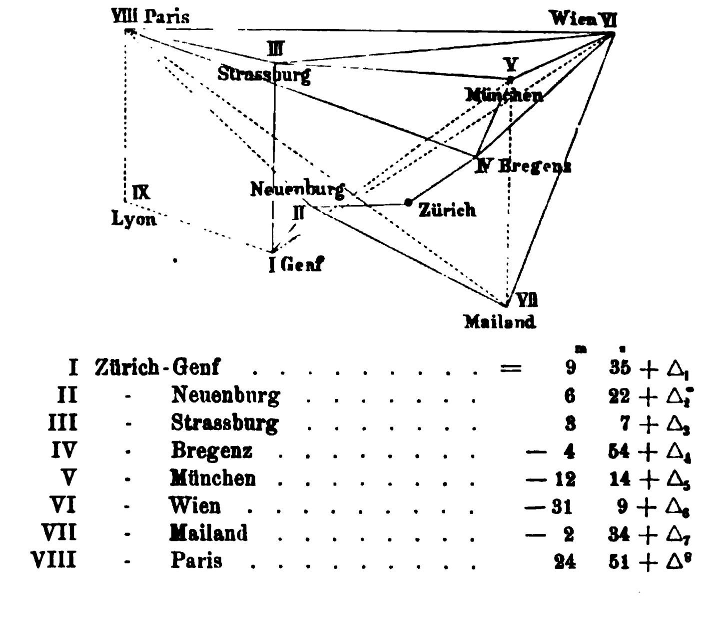
411. Die Längenausgleichung. — Die bequeme und sichere Weise der Längenbestimmung mit Hilfe der elektrischen Telegraphen hat es in Verbindung mit dem durch die neuern geodätischen Arbeiten (434) geschaffenen Bedürfnisse genauer und zahlreicher Ortsbestimmungen bereits dazu gebracht, dass für grössere Netze astronomischer Punkte sog. überschüssige Bestimmungen vorliegen,

welche eine Ausgleichung und damit eine vorzügliche Kontrole der einzelnen Bestimmungen ermöglichen *.

Zu 411: *a.* Als Beispiel einer Längenausgleichung gebe ich die von mir vor einigen Jahren auf Grund folgender 14 damals bereits auf telegraphischem Wege, teils definitiv (d), teils provisorisch (p) erhaltenen Längenbestimmungen

Nr.	Stationen	Jahr	Längendifferenz		Diff. R — B	
			Beobachtung	Rechnung	Δw	Δh
			m s	s		
1	Zürich-Neuenburg .	1867	6 22,37. d	22,33	— 4	12
2	Bregenz-Zürich . .	1872	4 53,69. d	53,87	18	19
3	Neuenburg-Genf . .	1861	3 12,97. d	13,02	5	23
4	Strassburg-Genf . .	1876	6 27,93. d	27,88	— 5	4
5	Mailand-Neuenburg	1870	8 55,99. d	56,08	9	6
6	Strassburg-Paris .	1863	21 43,56. d	43,59	3	7
7	München-Strassburg	1875	15 21,41. p	21,36	— 5	2
8	Wien-Strassburg .	1875	34 16,53. p	16,50	— 3	0
9	Bregenz-Paris . .	1874	29 45,15. p	44,93	— 22	8
10	München-Bregenz .	1874	7 19,85. p	20,02	14	— 5
11	Wien-Bregenz . .	1873	26 14,78. p	15,16	38	15
12	Wien-München . .	1875	18 55,11. d	55,13	2	— 1
13	Wien-Paris	1873	56 0,07. d	0,09	2	9
14	Wien-Mailand . .	1875	28 35,18. d	35,20	2	7

für Zürich ausgeführte Rechnung, bei welcher die definitiv berechneten Längen mit dem Gewichte 1, die provisorisch berechneten mit dem Gewichte $^1/_2$ eingeführt wurden. Ich setzte nun



				m	s
I	Zürich-Genf	. . . .	=	9	$35 + \Delta_1$
II	-	Neuenburg		6	$22 + \Delta_2$
III	-	Strassburg		3	$7 + \Delta_3$
IV	-	Bregenz		— 4	$54 + \Delta_4$
V	-	München		— 12	$14 + \Delta_5$
VI	-	Wien		— 31	$9 + \Delta_6$
VII	-	Mailand		— 2	$34 + \Delta_7$
VIII	-	Paris		24	$51 + \Delta^8$

und erhielt so, indem ich in Hundertstels-Sekunden rechnete, jede der 14 gegebenen Längen durch Kombination der Annahmen I bis VIII ausdrückte und überdies die angenommenen Gewichte einführte, die Bedingungsgleichungen

	oder									
1 = II	37 =		Δ_2						
2 = — IV	— 31 =				$-\Delta_4$				
3 = I—II	— 3 =	Δ_1	$-\Delta_2$						
4 = I—III	— 7 =	Δ_1		$-\Delta_3$					
5 = II—VII	— 1 =		Δ_2					$-\Delta_7$	
6 = VIII—III	— 44 =			$-\Delta_3$					$+\Delta_8$
7 = III—V	20,5 =			$\frac{1}{2}\Delta_3$		$-\frac{1}{2}\Delta_5$			
8 = III—VI	26,5 =			$\frac{1}{2}\Delta_3$			$-\frac{1}{2}\Delta_6$		
9 = VIII—IV	7,5 =				$-\frac{1}{2}\Delta_4$				$+\frac{1}{2}\Delta_8$
10 = IV—V	— 6 =				$\frac{1}{2}\Delta_4$	$-\frac{1}{2}\Delta_5$			
11 = IV—VI	— 11 =				$\frac{1}{2}\Delta_4$		$-\frac{1}{2}\Delta_6$		
12 = V—VI	11 =					Δ_5	$-\Delta_6$		
13 = VIII—VI	7 =						$-\Delta_6$		$+\Delta_8$
14 = VII—VI	18 =						$-\Delta_6$	$+\Delta_7$	

und aus diesen ergeben sich die Normalgleichungen

$-10 =$	$2\Delta_1$	$-\Delta_2$	$-\Delta_3$					
$39 =$	$-\Delta_1$	$+3\Delta_2$					$-\Delta_7$	
$74\frac{1}{2} =$	$-\Delta_1$		$+\frac{5}{2}\Delta_3$		$-\frac{1}{4}\Delta_5$	$-\frac{1}{4}\Delta_6$		$-\Delta_8$
$18\frac{3}{4} =$				$\frac{3}{4}\Delta_4$	$-\frac{1}{4}\Delta_5$	$-\frac{1}{4}\Delta_6$		$-\frac{1}{4}\Delta_8$
$3\frac{3}{4} =$			$-\frac{1}{4}\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$	$+\frac{3}{2}\Delta_5$	$-\Delta_6$		
$-43\frac{3}{4} =$			$-\frac{1}{4}\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$	$-\Delta_5$	$-\frac{7}{2}\Delta_6$	$-\Delta_7$	$-\Delta_8$
$19 =$		$-\Delta_2$				$-\Delta_6$	$+2\Delta_7$	
$-33\frac{1}{4} =$			$+\Delta_3$	$-\frac{1}{4}\Delta_4$		$-\Delta_6$		$+\frac{9}{4}\Delta_8$

Rechnet man nun der Reihe nach aus jeder Normalgleichung diejenige Grösse aus, nach welcher sie gebildet ist, und substituiert je ihren Wert in alle folgenden Gleichungen, so erhält man successive, erst abwärts und dann aufwärts operierend,

$\Delta_1 = -5 + 0{,}5 \cdot \Delta_2 + 0{,}5 \cdot \Delta_3$ . . . . $= 0^s{,}34664$
$\Delta_2 = 13{,}6 + 0{,}2 \cdot \Delta_3 + 0{,}4 \cdot \Delta_7$ . . . . $= 0{,}32652$
$\Delta_3 = 40{,}158 + 0{,}132 \cdot \Delta_5 + 0{,}132 \cdot \Delta_6 + 0{,}105 \cdot \Delta_7 + 0{,}526 \cdot \Delta_8 = 0{,}46676$
$\Delta_4 = 10{,}714 + 0{,}143 \cdot \Delta_5 + 0{,}143 \cdot \Delta_6 + 0{,}143 \cdot \Delta_8$ . . . . . $= 0{,}12547$
$\Delta_5 = 11{,}507 + 0{,}747 \cdot \Delta_6 + 0{,}018 \cdot \Delta_7 + 0{,}117 \cdot \Delta_8$ . . . . . $= 0{,}10199$
$\Delta_6 = 4{,}289 - 0{,}239 \cdot \Delta_7 - 0{,}296 \cdot \Delta_8$ . . . . $= -0{,}03256$
$\Delta_7 = 24{,}938 - 0{,}110 \cdot \Delta_8$ . . . . $= 0{,}24292$
$\Delta_8 = 5{,}876$ . . . . $= 0{,}05876$

oder

$I = 9^m\,35^s{,}347$ $II = 6^m\,22^s{,}327$ $III = 3^m\,7^s{,}467$ $IV = -4^m\,53^s{,}875$
$V = -12\;13{,}898$ $VI = -31\;9{,}033$ $VII = -2\;33{,}757$ $VIII = 24\;51{,}059$

Berechnet man sodann rückwärts mit Hilfe dieser letztern Werte die 1 bis 14, so erhält man die in obige Tafel als **durch Rechnung erhalten** eingetragenen Längendifferenzen und durch Vergleichung derselben mit den direkt aus

Beobachtung hervorgegangenen Werten die $R - B = \Delta w$, aus welchen sich

$$\Sigma p \cdot w^2 = 1571 \quad \text{und} \quad \sqrt{{}^1/_{14} \cdot \Sigma p w^2} = \pm 11 = \pm 0^s{,}11$$

ergeben. Die in die Tafel eingetragenen Δh endlich sind die definitiven, von den Δw begreiflicherweise zum Teil merklich abweichenden Korrektionen, welche die 14 Längendifferenzen nach Jakob **Hilfiker** (Kölliken im Aargau 1851 geb.; Obs. Neuenburg), dessen „Ausgleichung des Längennetzes der europäischen Gradmessung (A. N. 2674 von 1885)" nicht weniger als 93 Längenvergleichungen zwischen 39 Stationen umfasst, zu erhalten haben. — Seit der Zeit, wo ich vorstehende Längenausgleichung durchführte, sind noch folgende 7 betreffende und in obiger Figur bereits durch punktierte Linien angedeutete Längenvergleichungen bekannt geworden:

Nr.	Stationen	Jahr	Längendifferenz		Diff. R — B	
			Beobachtung	Rechnung	Δw	Δh
			m s	s	s	s
15	Genf-Lyon . . .	1877	5 28,32 · p	—	—	28
16	München-Genf . .	1877	21 49,36 · d	49,25	— 11	3
17	Wien-Genf . . .	1881	40 44,65 · p	44,38	— 27	— 16
18	Lyon-Paris . . .	1877	9 46,81 · p	—	—	25
19	Mailand-Paris . .	1881	27 24,96 · d	24,82	— 14	— 5
20	Neuenburg-Paris .	1877	18 28,53 · p	28,73	20	33
21	München-Mailand .	1875	9 40,15 · d	40,14	— 1	0

In dieser Supplementartafel sind die, als **durch Rechnung erhalten**, eingetragenen Längen aus Kombination der oben gefundenen I bis VIII hervorgegangen und aus ihnen die Δw berechnet, die Δh aber wieder Hilfikers Arbeit entnommen worden: Die Vergleichung dieser Δw und Δh legt für die frühere Rechnung offenbar ein befriedigendes Zeugnis ab.

412. Die ältesten Angaben über die Grösse der Erde.

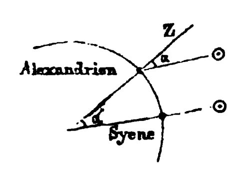
— Wenn die Erzählung begründet ist, dass die Chaldäer angenommen haben, man könnte die Erde in einem Jahre umwandern, so hat man nicht nur anzunehmen, dass sie (216) die Erde wirklich als eine Kugel betrachteten, sondern auch, dass sie deren Grösse durch eine Art Messung zu bestimmen versucht hatten; denn jene Angabe kömmt der Wahrheit zu nahe, um Resultat einer blossen Spekulation zu sein [a], und namentlich viel näher als die bei den ältern Griechen vorkommenden Erdumfänge von 40 und 30 Myriaden Stadien, obschon auch diese als Resultate von Beobachtung und Rechnung mitgeteilt werden [b].

Zu 412: *a.* Ein Jahr hält nämlich $365\frac{1}{4} \times 24 = 8766$ Zeitstunden, während der Erdumfang circa $360 \times 15 \times 1\frac{1}{2} = 8100$ Wegstunden gleichkömmt. — Wie die Chaldäer zu dieser Annahme gekommen sind, weiss man nicht. Möglicherweise hatten sie sich abstrahiert, dass nach 24-stündigem Wandern gegen Norden ein nördlicher Stern um etwa 1° höher als zuvor erscheine. — *b.* Da **Horaz** den Pythagoräer **Archytas**, einen Zeitgenossen von Plato, in

einer seiner Oden mit den Worten „Te maris et terræ, numeroque carentis arenæ mensorem cohibent, Archyta“ verewigte, so ist wohl anzunehmen, dass dieser in irgend einer Weise den Erdumfang ermittelt, und sich **Aristoteles** bei seiner Angabe (in „De coelo“; ed. Prantl p. 183), es betrage nach Berechnung der Mathematiker der Umfang der Erde etwa 400000 Stadien (was allerdings ein Stadium von nur 100 statt 184^m voraussetzen würde), zunächst auf ihn gestützt habe. — Einer wenig spätern, etwa mit Aristarch korrespondierenden Zeit, scheint **Kleomedes** in seiner Schrift „De mundo“ zu gedenken, wenn er erzählt: „Denen die in Lysimachia (Thrakien) wohnen, steht der Kopf des Drachen über dem Scheitel, in Syene aber steht der Krebs im Zenit; der Raum zwischen dem Drachen und dem Krebs ist aber (wie auch der Gnomon zeigt) der 15. Teil des Meridianes von Lysimachia und Syene (im Mittel aus dem Deklinationsunterschiede $^1/_{12}$ und dem Breitenunterschiede $^1/_{20}$), die 20000 Stadien von einander entfernt sind, so dass der ganze Kreis 300000 Stadien enthält“; denn **Archimedes** sagt in seiner Sandrechnung (Peyrard 349) ausdrücklich, man habe zeigen wollen, dass der Erdumfang 30 Myriaden Stadien halte.

413. Die Bestimmungen von Eratosthenes und Posidonius. — Die ersten Griechen, von welchen man ziemlich sicher weiss, dass sie zur Ermittlung des Erdumfanges richtige geometrische Grundsätze und wenigstens zum Teil wirkliche Messungen anwandten, waren **Eratosthenes** und der etwas spätere **Posidonius** [a], und es bildet für mich der den Grundsätzen der Erfahrungswahrscheinlichkeit konforme Umstand, dass der wirkliche Erdumfang nahe in die Mitte zwischen die von ihnen erhaltenen Extreme von 252000 und 180000 Stadien fällt, ein starkes Argument für die von einzelnen angezweifelte Realität ihrer Bestimmungen [b].

Zu 413: *a.* Die unter vorhergehender Nummer nach **Kleomedes** geschilderte Methode der Erdmessung stimmt einigermassen mit derjenigen überein, welche nach demselben Gewährsmanne **Eratosthenes** benutzte; aber immerhin deuten die Angaben über die Bestimmung dieses letztern viel sicherer auf wirkliche Messung hin. Derselbe soll nämlich erfahren haben, dass sich in Syene (dem heutigen Assuan in Ober-Egypten) die Sonne am längsten Tage in einem tiefen Brunnen spiegle oder also dort um Mittag im Zenite stehe, während er durch Messung fand, dass in Alexandrien die kleinste Zenitdistanz der Sonne (vgl. 57: c) etwa $\alpha = {}^1/_{50}$ des Kreises sei; da er nun überdies aus den Angaben der königlichen Wegmesser wusste, dass Alexandrien etwa 5000 Stadien nördlich von Syene liege, so schloss er folgerichtig, dass der Erdumfang circa $50 \times 5000 = 250000$ Stadien betragen werde, — eine Zahl, welche später auf 252000 erhöht wurde, weil dadurch für einen Grad des Erdmeridianes sich die runde Zahl von 700 Stadien ergab. — An die Genauigkeit dieser Bestimmung darf man offenbar keine zu grossen Anforderungen stellen; aber wenn man der Länge des griechischen Stadiums den üblichen Wert von 184^m,97 beilegt, so folgt für den Erdumfang der Wert von $250000 \times 184{,}97 = 46242500^m$, und da kann man sich dennoch fragen, wovon der für eine wirk-



liche Messung etwas grosse Überschuss von circa $6^1/_4$ Million Meter herrühren möchte. Da sich nun kaum jemand entschliessen dürfte, den in „J. W. **Schmitz,** Das Weltall. Köln 1852 in 8." ausgesprochenen abenteuerlichen Gedanken zu acceptieren, es habe der Umfang der Erde zur Zeit von Eratosthenes wirklich jene Grösse besessen, sei dann aber seither durch Schwinden infolge von Abkühlung jedes Jahr um 3121^m kleiner geworden, so muss man, um jenen Unterschied zu heben, von den drei bei der Berechnung mitwirkenden Faktoren entweder 50 (d. h. $\alpha = 7^0\ 20'$) auf etwa 43 (d. h. $\alpha = 8^0\ 20'$) reduzieren, was aber kaum angeht, — oder 184,97 auf etwa 158,25, was so ziemlich mit den 157,5 übereinstimmen würde, welche Friedrich Otto **Hultsch** (Dresden 1833 geb.; Rektor der Kreuzschule in Dresden) nach gründlicher Untersuchung (vgl. seine Griechische und römische Metrologie. 2. A. Berlin 1882 in 8.") als Wert des Stadiums von Eratosthenes erhielt, — oder 5000 auf etwa 4325, was ebenfalls ganz zulässig ist, da die 5000 kaum als Ergebnis einer wirklichen **Distanzmessung**, sondern wohl nur als ein approximatives **Wegmass** zu betrachten sind. Da nun **Posidonius** etwa 200 Jahre später in analoger Weise aus dem Umstande, dass Canopus auf Rhodus kaum noch aufgehe, während er in dem, nach den einen 5000 und nach andern 3750 Stadien, südlichern Alexandrien noch die Höhe von $^1/_{48}$ des Kreises erreiche, den Schluss zog, dass der Erdumfang zwischen $48 \times 5000 = 240000$ und $48 \times 3750 = 180000$ Stadien liege, also etwa $210000 \times 184{,}97 = 38\,843\,700^m$ betrage, und die Erklärung dieses Defizits (von Schmitz, der diese ihm unbequeme Messung einfach ignorierte, kaum zu sprechen) nach der Hultsch'en Methode wieder ein neues Stadium von circa $190^m{,}5$ erfordern würde, während sie sich aus der hier offen zu Tage tretenden ungenügenden Kenntnis der Distanz von selbst ergiebt, so muss ich auch die Anomalie bei Eratosthenes zunächst auf jenen dritten Grund zurückführen. — *b.* Im Mittel aus den extremen Werten von 252000 und 180000 Stadien ergiebt sich nämlich $216000 \times 184{,}97 = 39\,953\,520^m$ als Erdumfang. — Ich füge zum Schlusse bei, dass ich, entsprechend der Erzählung von **Kleomedes,** daran festhalten muss, es habe **Eratosthenes** eine wirkliche Erdmessung ausgeführt, verweise übrigens für die Gegengründe der Egyptiologen auf „**Sprenger,** Zur Geschichte der Erdmessung im Alterthume (Ausland 1867)".

414. Die Messungen der Araber. — Die erste bekannte Bestimmung der Grösse der Erde, welche allseitig auf unmittelbarer Messung beruhte und den früher (219) besprochenen Grundsätzen völlig konform war, wurde um das Jahr 827 in Vorderasien auf Befehl des Khalifen Almamum durch dessen Astronomen **Chalid ben Abdulmelik** und **Ali ben Isa** ausgeführt [a], — und es ist nur zu bedauern, dass man das erhaltene Ergebnis, nämlich dass ein Grad $56^2/_3$ arabische Meilen halte, nicht mit voller Sicherheit auf unsere gegenwärtigen Masse zu reduzieren weiss [b].

Zu 414: *a.* Nach den Berichten, welche uns der Zeitgenosse **Alfragan** und der etwas spätere **Ibn Junis** über diese Arbeiten in ihren Schriften hinterlassen haben, wurde zuerst in der Nähe von Palmyra ein Meridianbogen abgesteckt und mit Stäben gemessen, woraus sich die Länge eines Grades gleich 57 arabische Meilen ergab; sodann wurde die Operation in der nördlich vom Euphrat liegenden Ebene Siudjar in der Weise wiederholt, dass von einem

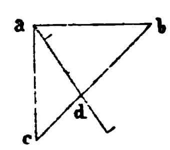
Punkte aus sowohl nach Süden als nach Norden ein Meridianbogen abgesteckt und durch zwei sich kontrolierende Gruppen von Astronomen gemessen wurde, wobei der Grad $56\frac{1}{4}$ Meilen erhielt; schliesslich wurde derselbe im Mittel aus beiden Messungen definitiv zu $56\frac{2}{3}$ festgesetzt. — *b.* Unter Annahme, dass die von Almamum eingeführte Meile 4000 sog. „schwarze", der Armlänge eines Neger-Eunuchen entnommene Ellen, und diese Elle 234''',69 P. gehalten habe, würde der arabische Grad

$$56\tfrac{2}{3} \times 4000 \times 234{,}69 : (6 \cdot 12 \cdot 12) = 61570^t$$

betragen oder (vgl. 418) etwa um $4\frac{1}{2}$ tausend Toisen zu gross sein, — jedoch wohl weniger um der Messung willen als wegen der Unsicherheit der Massübertragung.

415. Die angebliche Messung von Fernel. — Eine erste Erdmessung im Abendlande, welche der Franzose Jean **Fernel** [a] in seiner Schrift „Cosmotheoria, libros duos complexa. Parisiis 1528 in fol." gemacht zu haben vorgab, flösst schon wegen des angewandten, in einer Verschlimmbesserung der arabischen Methode bestehenden Verfahrens wenig Zutrauen ein [b], und überdies sind die schon früher ausgesprochenen Zweifel an der Realität dieser Messung durch die neuere Kritik noch verstärkt, ja sogar die Grundlagen der spätern, ein merkwürdig gutes Resultat ergebenden Neuberechnung als mutmasslich irrige erwiesen worden [c].

Zu 415: *a.* Jean **Fernel** (Clermont 1497 — Paris 1558) lebte als praktischer Arzt in Paris. — *b.* **Fernel** berichtet nämlich selbst, er habe am 25. August (1527?) in Paris mit Hilfe einer Art „Regula Ptolemaica (333)", welche aus einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke abc von 8' Kathete und einem um a drehbaren Diopterlineale bestand, an der eine Minutenteilung tragenden Hypotenuse bc die Mittagshöhe der Sonne abgelesen und daraus die Polhöhe 48° 38' abgeleitet; sodann habe er

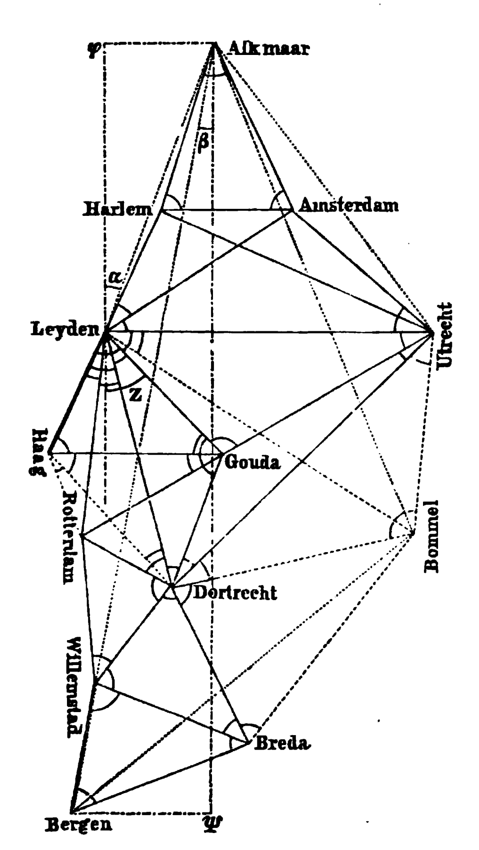


ausgemittelt, in welcher Höhe die Sonne an einer Reihe von folgenden Tagen unter 49° 38' culminieren müsste, und sei nun mit seinem Instrumente nach Norden gezogen: Als er nach einem Marsche von $1\frac{1}{2}$ Tagen die Sonnenhöhe gemessen habe, sei sie noch zu gross gewesen und er habe also weiter gehen müssen; auch am 28. habe er sie noch etwas zu gross gefunden, aber nun berechnen können, wie weit er noch zu gehen brauche, und am 29. habe wirklich die Sonnenhöhe genau die für diesen Tag vorausberechneten 46° 41' betragen, so dass er nunmehr sicher gewesen sei, sich wirklich 1° nördlich von Paris zu befinden. Er habe nun einen Wagen genommen, in welchem sich eine Glocke befand, an die nach jeder Umdrehung eines Rades ein Hammer schlug, und sei in demselben unter Zählen der Schläge nach Paris zurückgefahren. Einigermassen die Umwege und Unebenheiten berücksichtigend, habe er schliesslich 17024 Umdrehungen in Rechnung gebracht und so, da der Umfang des Rades sehr nahe 20' oder 4 sog. „geometrische Schritte" betrug, als Resultat erhalten, dass die Länge eines Grades 68096 Schritte sei, was ziemlich gut mit den Angaben der Alten übereinstimme. — *c.* Den Schritt zu $\frac{5}{6}^t$ einführend, setzte die spätere Zeit den Fernel'schen Grad gleich $56746\frac{2}{3}^t$, und als **Lalande** (Mém. Par. 1787) die ganze Rechnung revidierte, dabei namentlich

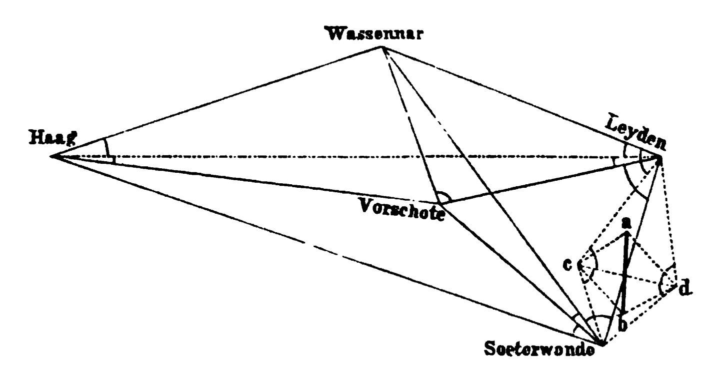
berücksichtigend, dass 1668 die Toise um 5''' verkürzt wurde, also schon aus diesem Grunde die Fernel'sche Zahl im Verhältnisse von 864 zu 859 vergrössert werden müsse, erhielt er 57070ᵗ, d. h. eine ganz merkwürdig nahe Übereinstimmung mit dem 1½ Jahrhunderte später von Picard (418) nach strenger Methode zu 57060ᵗ bestimmten Grade. — So weit wäre nun alles schön und gut; aber nun kömmt „le revers de la médaille": Ganz abgesehen davon, dass schon die von **Fernel** um volle 12' zu klein angesetzte Polhöhe von Paris wenig Zutrauen auf seine Sonnenhöhen einflösst, und dass die von **Snellius** in seinem „Eratosthenes batavus (p. 210)" ausgesprochene Meinung, es habe **Fernel** gar nicht wirklich gemessen, sondern nur das Ergebnis der arabischen Gradmessung in willkürlicher Weise in geometrische Schritte umgewandelt und seine Zeitgenossen durch ein Blendwerk getäuscht, auch manches für sich hat, — so hat die strengere Kritik der neuern Zeit auch noch die Voraussetzung, es sei der von Fernel angewandte Fuss wenigstens annähernd der Pariser-Fuss gewesen, als irrig erwiesen. Es hat nämlich A. de **Morgan** in seinen Artikeln „On Fernel's measure of a degree (Phil. Mag. 1841—42)" und dann wieder in seinen „Arithmetical books from the invention of printing to the present time. London 1847 in 8." darauf aufmerksam gemacht, dass **Fernel** in dem zwei Jahre vor seiner „Cosmographia" herausgegebenen „Monalosphærium. Paris 1526 in fol." auf Blatt 25 eine „Figuratio pedis geometrici" gab, auf welche er im Texte mit den Worten „Caeterum virga quædam mensoria **omni molimine** nobis deligenda est, mensurarum diversitate locupletata" hinwies, — und von diesem Fuss, der nur 0ᵐ,246 = ¾' P. (Morgan fand 9'',65 E.) hält, rechnete Fernel **fünf** auf einen Passus. Da es nun kaum einem Zweifel unterliegt, dass der von **Fernel** in seiner „Cosmotheoria" angewandte Passus mit demjenigen des „Monalosphærium" übereinstimmt, so ist damit in der That die neuere Berechnung der Fernel'schen Messung hinfällig geworden, ja letztere selbst im Sinne von Snellius in Frage gestellt, da ein um ein volles Viertel zu kleines Resultat wirklich verdächtig erscheint.

416. Die Messung von Snellius. — Ganz anders verhält es sich mit der Erdmessung, welche der ausgezeichnete Willebrord **Snellius** von 1614 hinweg ausführte und sodann in seinem „Eratosthenes batavus de terræ ambitus vera quantitate. Lugduni Bat. 1617 in 4." beschrieb, indem die von ihm eingeführte Methode, **einerseits durch ein orientiertes Dreiecksnetz die Distanz eines Punktes von dem Parallel eines andern Punktes zu bestimmen, und sodann anderseits den Breitenunterschied der beiden Punkte zu ermitteln**, nicht nur für damals einen ungemeinen Fortschritt repräsentierte, sondern auch für die Zukunft massgebend blieb [a]. Auch die Ausführung seiner Arbeit und die feine Weise, wie sich **Snellius** über verschiedene Schwierigkeiten wegzuhelfen wusste, verdienen die höchste Anerkennung [b], und dass sein Schlussresultat kein brillantes war, hängt nicht mit der befolgten Methode, sondern einzig damit zusammen, dass sein früher Tod den Abschluss einer begonnenen Revision der unter den ungünstigsten äussern Verhältnissen unternommenen Messungen verhinderte [c].

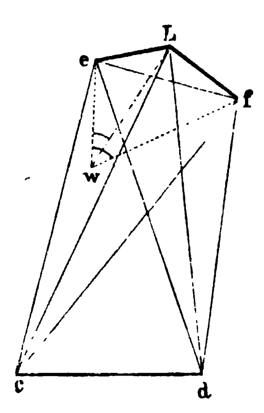
Zu 416: *a.* **Snellius** ist entschieden der Erste, der eine eigentliche Triangulation ausführte; denn wenn wir auch schon ein Jahrhundert früher in „Rainer **Gemma**, Libellus de locorum describendorum ratione. Antwerpiæ 1533 in 4.", in „Sebastian **Münster**, Cosmographei. Frankfurt 1537 in 4.", und in dem von 1541 datierenden, durch Joachim gen. **Rhäticus** hinterlassenen Mss. über Chorographie (vgl. Hiplers Reproduktion in Z. f. M. u. Ph. von 1876) einige bezügliche Andeutungen finden, so beziehen sich diese doch noch eher auf das sog. Polygonisieren (Messen von Richtung und Distanz) als auf das eigentliche Triangulieren (Bestimmung aus Basis und Winkeln), und sind auch sonst noch gar zu roh und dürftig. So z. B. giebt **Münster** (l. c.) folgende Regel: Man steigt auf einen Turm oder Berg, — stellt den (von der Mitte aus nach jeder Seite 36 Teile zeigenden, somit $2^1/_2{}^0$ gebenden) Halbkreis mit Hilfe der (damals ziemlich richtig weisenden) Boussole so auf, dass seine Mittellinie in den Meridian fällt, — richtet nun den drehbaren Radius auf verschiedene von da aus sichtbare Punkte, jeweilen ablesend, — verzeichnet die so erhaltenen Azimute, und trägt schliesslich auf jede dadurch erhaltene Richtung die Anzahl Meilen auf, welche man für die Distanzen der betreffenden Punkte durch „fussgang oder ritt" erhalten hat; dann begiebt man sich auf einen dieser neu erhaltenen Punkte, — operiert da wieder in ähnlicher Weise, — u. s. f. — *b.* Der von **Snellius** bei Anwendung seiner Methode eingeschlagene Gang war folgender: Er legte an die Distanz Leyden-Haag, welche den Ausgang bilden sollte, ein erstes Dreieck Leyden-Gouda Haag, an dieses wieder andere Dreiecke, u. s. f., wie dies beistehende Figur (wo die ganzen Linien die notwendigen, die durch Folgen von Strichen angedeuteten aber die kontrolierenden Verbindungen darstellen) zeigt, bis er nach Norden Alkmaar und nach Süden Bergen-op-Zoom erreicht hatte. — Um die Länge der Ausgangslinie Leyden-Haag zu bestimmen, wurde von **Snellius** zuerst zwischen Leyden und dem benachbarten Dorfe Soeterwonde mit eisernen Mass-Stäben von 12′ Länge (einer holländischen Rute, die er in 100 Teile geteilt hatte) eine kleine Basis $ab = 87^r,05$ gemessen, und sodann diese vorerst mit der Linie Leyden-Soeterwonde, dann mit Haag-Leyden durch das in der folgenden Figur dargestellte Hilfsnetz



verbunden, in welchem die Winkel mit einem zweifüssigen messingenen Quadranten gemessen wurden, der mittelst Transversalen notdürftig Minuten gab.



Dass nun mit solchen Hilfsmitteln, trotz der von **Snellius** angewandten Vorsicht und der von ihm gemachten Kontrolmessungen, das schliesslich für Leyden-Haag erhaltene Rechnungsresultat von 4103r,30 keine grosse Zuverlässigkeit besitzen konnte, liegt auf der Hand, und auch für die Winkelmessung im Hauptnetze blieben anfänglich dieselben Verhältnisse bestehen, so dass **Snellius**, dem alsgemach auch die Umkosten bei dem für seine starke Familie ohnehin kaum ausreichenden Professoren-Gehalte von bloss 400 fl. beschwerlich fielen, kaum den Mut besessen hätte, seine Arbeit zum Ende zu führen, wenn sich nicht einerseits zwei seiner Schüler, die Barone Erasmus und **Caspar Sternberg**, samt ihrem Hofmeister Joh. **Philemon**, anerboten hätten, ihm auf ihre Kosten bei derselben behilflich zu sein, — und ihm anderseits in einem $3^1/_2$-füssigen messingenen Halbkreise ein Winkelinstrument zur Verfügung gestellt worden wäre, mit dem es ihm möglich wurde, seine Dreiecke wenigstens bis auf circa 1' zum Schlusse zu bringen. So konnte die Feldarbeit im Sommer 1615 erledigt und nunmehr die für **Snellius**, der noch keine Logarithmen benutzen konnte, ebenfalls noch äusserst mühsame Berechnung des Hauptnetzes durchgeführt werden, bei der sich schliesslich nach nicht weniger als 32, sich ausser den Haupt- und Versicherungs-Dreiecken auch auf die (Fig. 1) durch punktierte Linien angedeuteten Hilfsdreiecke beziehenden trigonometrischen Operationen, die Distanzen

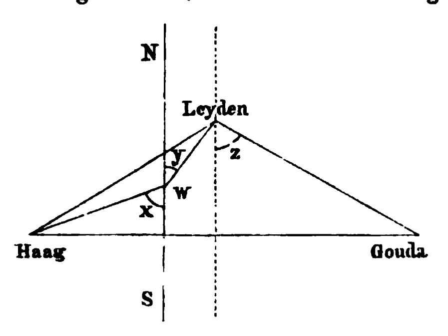


Alkmaar - Leyden = 14749r,0

Alkmaar - Bergen = 34710r,6

ergaben. — Um sein Dreiecknetz zu orientieren, bestimmte **Snellius** in seiner Wohnung bei w, von wo aus er nicht nur den als Signalpunkt für Leyden benutzten Turm L der Kathedrale, sondern auch die Türme e und f der Peters- und Pankratius-Kirche, sowie seinen Signalpunkt in Haag sehen konnte, und deren Meridian er längst (wahrscheinlich durch korrespondierende Schatten) auf das genauste bestimmt hatte, die Winkel ewL und ewf, — während er von c und d aus (vgl. auch Fig. 2) die Winkel von cd mit den Richtungen nach e, L und f mass. Aus diesen letztern und der Bekannten cd

berechnete er sodann successive die Distanzen ce, cL, cf, — de, dL, df, — eL, Lf, ef, — und endlich mit Hilfe der in w gemessenen Winkel auch wL, womit er (67) zum ersten Male die fälschlich nach dem damals noch nicht einmal gebornen Pothenot benannte Aufgabe gelöst hatte. — Sodann mass **Snellius** in w die beiden Azimute x und y, welche ihm den Winkel $HwL = 180^\circ - x + y$ ergaben und mit Hilfe der längst bekannten HL und der soeben berechneten wL den Winkel HLw und somit das Azimut $z = HLG - (HLw + y) = 44^\circ\ 49'$ von Gouda zu berechnen erlaubten. Es war also eine erste, folglich mit Hilfe der bekannten Dreieckswinkel **jede** Seite des Netzes orientiert, und so ergaben sich (vgl. Fig. 1)



$$\alpha = 15^\circ\ 28' \quad \beta = 11^\circ\ 16' \quad \text{folglich} \quad L\varphi = 14214^r,9 \quad A\psi = 34018^r,2$$

als Abstände von Leyden und Bergen von dem durch Alkmaar gelegten Parallel. — Die Polhöhe seines Hauses in Leyden, das um 95^r südlich vom Turme der Kathedrale lag, hatte **Snellius** schon früher im Mittel aus wiederholten und nach verschiedenen Methoden gemachten Messungen (wahrscheinlich aus Polarstern- und Solstitial-Höhen) gleich $52^\circ\ 10^1/_2{}'$ (statt den $52^\circ\ 9'$ der gegenwärtigen Sternwarte) gefunden. Dagegen bestimmte er nun auch durch Beobachtungen des Polarsternes mit einem $5^1/_2$-füssigen Quadranten diejenige von Alkmaar an einer 55^r südlicher als der geodätische Punkt gelegenen Station zu $52^\circ\ 40^1/_2{}'$, — und diejenige von Bergen an einer 33^r nördlicher als der geodätische Punkt gelegenen Station zu $51^\circ\ 29'$. Es korrespondierten also einerseits $52^\circ\ 40^1/_2{}' - 52^\circ\ 10^1/_2 = 30'$ mit $14215 + 95 - 55 = 14255^r$, was einem Grade von 28510^r entsprach, — und anderseits $52^\circ\ 40^1/_2{}' - 51^\circ\ 29' = 71^1/_2{}'$ mit $34018 - 55 - 33 = 33930^r$, was einen Grad von 28473^r ergab. **Snellius** glaubte daher

$$1^\circ = 28500^r \fallingdotseq 55100^t$$

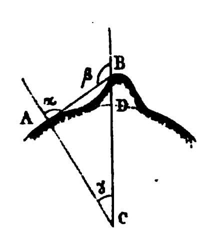
annehmen zu sollen, wobei ich nach Picard das Verhältnis zwischen dem rheinländischen und französischen Fuss gleich 1000 : 1034,5 setzte. — *c.* Nachdem so **Snellius** das gewünschte Ziel erreicht hatte, publizierte er sein Verfahren in dem bereits erwähnten „Eratosthenes batavus". Kaum war jedoch diese Schrift erschienen, als er in seiner Arbeit verschiedene Messungs- und Rechnungsfehler entdeckte, — dadurch veranlasst wurde, dieselbe nochmals zu revidieren, — und voraus alle Winkel seines Netzes neu zu messen, wozu er sich wahrscheinlich des trefflichen Bürgi'schen Sextanten bediente, welchen er zur Beobachtung des Kometen von 1618 aus der Instrumentensammlung des Prinzen Moritz von Oranien erhalten hatte; auch dehnte er bei dieser Gelegenheit sein Netz südlich noch bis Mecheln aus. Er schrieb, offenbar behufs neuer Bearbeitung, alle erhaltenen Korrekturen an den Rand seines Handexemplares des „Eratosthenes batavus", und benutzte dann noch im Winter 1622, wo die rings um Leyden unter Wasser stehenden Felder durch den Frost in die schönste Eisebene verwandelt waren, dieses Vorkommnis, um eine neue Basis von 475^r zu messen, aus welcher er nach sorgfältiger Verbindungstriangulation für die Distanz Leyden-Soeterwoude (vgl. Fig. 2) den Wert $1097^r,10$ erhielt,

während er früher nur 1092^r,33 gefunden hatte. Aber zur Neuberechnung seines Netzes kam dann **Snellius** leider nicht mehr, da ihn bald darauf, wohl infolge jener Winterarbeiten, die schwere Krankheit überfiel, welcher er 1626 im besten Alter erliegen sollte. — Erst ein volles Jahrhundert später nahm P. **v. Musschenbroek** aus Pietät die unvollendet gebliebene Arbeit zur Hand und führte sie (vgl. seine „Dissertationes physicæ et geometricæ. Lugd. Bat. 1729 in 4.") nach den Snellius'schen Revisionen zum Abschlusse: Er erhielt so, die Breitendifferenz Alkmaar-Bergen nach neuen Beobachtungen zu 1° 9' 47" einführend, einen Grad von 29514^r,19 = 57033^t,11, d. h. eine Bestimmung, welche für die Zeit von Snellius ganz vorzüglich gewesen wäre. — Schliesslich kann noch für diese klassische Arbeit auf „J. D. van der **Plaats**, Overzicht van de Graadmetingen in Nederland. Utrecht 1889 in 8." verwiesen werden, wo in der Nachschrift mitgeteilt wird, dass das verloren geglaubte Protokoll über die Messung Bergen-Mecheln neuerlich auf der Brüsseler Bibliothek aufgefunden wurde.

417. Einige andere Messungen damaliger Zeit. — Der Vollständigkeit wegen ist auch an die, ebenfalls in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts, aber noch nach altarabischer Methode, durch Willem **Blaeu** und Richard **Norwood** [a] ausgeführten Gradmessungen zu erinnern [b], sowie an den durch **Grimaldi** und **Riccioli** gemeinschaftlich unternommenen Versuch, zu demselben Zwecke ein durch **Kepler** angedeutetes Verfahren in Anwendung zu bringen [c], obschon durch diese Arbeiten unsere Kenntnisse von der Grösse der Erde kaum erheblich vermehrt wurden [d].

Zu 417: *a.* Richard **Norwood** (1600? — 1650?) scheint erst Seefahrer, dann Lehrer der Mathematik und Nautik in London gewesen zu sein. — *b.* Von der durch **Blaeu** unternommenen Gradmessung weiss man leider nur, dass sie zwischen 1596 (wo Blaeu noch Gehilfe von Tycho war) und 1638 (wo er starb) ausgeführt wurde, — dass sich dabei **Blaeu** die Mühe nicht verdriessen liess („non refugit laborem", wie sich Vossius in seiner Geschichte von 1650 ausdrückte und sodann J. F. Reimann mit „er hat sich nicht geschämt" übersetzte), mit einer zwölffüssigen Rute eine etwa einen Breitengrad betragende Strecke von der Mündung der Maas bis zum Texel zu messen und an beiden Enden mit einem Zenitsector die Polhöhe zu bestimmen, — und dass das Resultat nicht übel war, indem **Picard**, welcher 1671 (vgl. p. 64 seiner „Oeuvres") auf seiner Reise nach der Uranienburg in Amsterdam bei dem Sohne Johannes **Blaeu** das (mutmasslich sodann im folgenden Jahre vom Feuer verzehrte) Vermessungsprotokoll einsah, berichtet: „Nous eusmes une joye extraordinaire, ce bon vieillard et moy, de voir que nous estions presque d'accord touchant la grandeur du degré d'un grand cercle de la Terre, et que le différend n'allait pas à cinq perches". — Die Messung von **Norwood** dagegen kennt man vollständig aus der Beschreibung, welche er dem zweiten Teile seiner „Trigonometry", der auch selbständig unter dem Titel „The Seaman's Practice. London 1636 in 8. (8. ed. 1668)" erschien, einverleibte: Er mass 1633 VI 11 zu London mit einem fünffüssigen Sextanten die Mittagshöhe der Sonne und fand 62° 1', während er 1635 VI 11 zu York dafür nur 59° 33' erhielt, so dass er (ohne auf Deklination, Refraktion, Parallaxe, etc., ernstlich Rücksicht zu nehmen) schliessen konnte, es liege York um 2° 28' = $2\frac{7}{15}$° nördlicher als London.

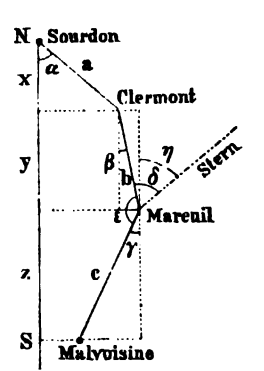
Sodann mass er mit einer Kette die ganze Distanz von London bis York, wobei er den Wegen folgte, aber jeweilen mit einer Boussole die Abweichung seiner Kettenrichtung vom Meridiane bestimmte und auch die Neigungen gegen den Horizont ermittelte. Nach entsprechender Reduktion fand er so für die Distanz 9149 Ketten à 99' E. und somit schliesslich die Länge eines Grades gleich $9149 \times 99 : 2^7/_{15} = 367196'$ E. = 57300ᵗ, was bis auf 267ᵗ mit dem verbesserten Snellius'schen Grade übereinstimmt. — *c.* Das von **Grimaldi** und **Riccioli** bei ihrer 1645 versuchten Gradmessung befolgte Verfahren war zwar sehr sinnreich, aber bewährte sich praktisch doch nicht: Sie massen nämlich (vgl. Ricciolis neuen Almagest I 59—60) in zwei Punkten A und B von bedeutender Niveaudifferenz sog. gegenseitige Zenitdistanzen α und β, — berechneten daraus $\gamma = \alpha + \beta - 180^0$, — bestimmten durch eine Triangulation die Horizontaldistanz AD, — und fanden schliesslich die Länge eines Grades $AD : \gamma$ = 64368 Schritte = 62650ᵗ, also im Vergleich mit Snellius und Norwood ein viel zu grosses Resultat. — *d.* Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass in China 1702 auf Befehl des Kaisers Camhi und unter Leitung des Pater Antoine **Thomas** (Verdun 1644 — Peking 1715?; Präsident des mathem. Tribunals) bei Peking ein Grad gemessen wurde, der aber (vgl. Mon. Corr. I, X und XII) trotz fleissiger Arbeit wegen Unsicherheit der Längeneinheit unbrauchbar sein soll.



418. Die Messung von Picard. — Die erste Messung, welche eine etwas zuverlässige Kenntnis von der Grösse der Erde verschaffte, war diejenige, welche der für eine solche Arbeit ganz vorzüglich qualifizierte Jean **Picard** in den Jahren 1669—70 unter möglichst günstigen Verhältnissen nach der Snellius'schen Methode in Frankreich ausführte und in seiner Schrift „Mesure de la Terre. Paris 1671 in fol. (auch Oeuvres p. 1—59)" beschrieb [a]. Nach sorgfältigster Durchführung der nötigen trigonometrischen und astronomischen Arbeiten ergab ihm deren Berechnung für die Länge eines Meridiangrades den Wert von 57060 Toisen [b], dessen Bedeutung er in höchst anerkennenswerter Weise durch die Bestimmung, dass ein Sekundenpendel 36″ $8^1/_2$‴ der benutzten Toise messe, für alle Zeiten zu definieren suchte [c].

Zu 418: *a.* Die Methode von **Picard** war nicht nur, wie er sich selbst ausdrückte, „**semblable** à celle de Snellius", sondern genau dieselbe; dagegen waren die Verhältnisse, unter welchen er sie zur Anwendung brachte, viel günstiger, da er nicht nur die Erfahrungen seines Vorgängers berücksichtigen, sondern sich auf die Akademie stützen konnte, überdies viel bessere Instrumente besass und, was gar nicht unbedeutend ins Gewicht fiel, bereits über Logarithmentafeln verfügte. — *b.* Vor allem aus sah **Picard** ein, dass Snellius seine Bestimmungen auf eine viel zu kleine Basis gestützt hatte, und wählte darum für sein Netz südlich von Paris zwischen Villejuive und Juvisy eine mehr als 30 mal so lange und überdies auf einer schnurgeraden, fast horizontalen, gepflasterten Strasse möglichst gut situierte Grundlinie, zu deren Messung er zwei hölzerne, je aus zwei zusammengeschraubten Stäben von

2' Länge bestehende Messlatten verwandte, welche abwechselnd längs einer gespannten Schnur gelegt wurden, und ihm ein erstes Mal 5662' 5', ein zweites Mal 5663' 1' ergaben, so dass er die Basislänge zu 5663' festsetzen konnte. — Sein Netz selbst, mit welchem er diese Basis durch einige Hilfsdreiecke verband, bestand aus 13 Hauptdreiecken, welche von dem noch etwas südlicher gelegenen Malvoisine nach dem nördlich von Paris gegen Amiens hin liegenden Sourdon führten, und für die Winkelmessung benutzte er einen eisernen Quadranten von 38" Radius, dessen kupferner Limbus durch Transversalen in Minuten geteilt war: Der Quadrant trug zwei Fernröhren mit Fadenkreuz aus schwarzer Seide, von welchen das eine fest, das andere mit der Alydade drehbar war; mit letzterer war ein kleiner Rahmen verbunden, über den ein als Index dienender Silberfaden gespannt war, so dass man mit einer Loupe bequem noch Viertelsminuten abschätzen konnte und die Proben, welche sich in Dreieck-Abschlüssen und einigen „Tours de l'horizon" ergaben, im ganzen befriedigend ausfielen, wenn auch **Picard** sagt: „Il est vray qu'avec toutes les précautions que l'on a pû prendre, et après estre mesme retourné deux et trois fois à une mesme station, il a esté quelquefois impossible d'éviter l'erreur de quelques secondes sur la somme des trois angles d'un mesme triangle; auquel cas on n'a point fait de difficulté de corriger le triangle, sans craindre qu'il ne s'en suivist aucune erreur considérable, parceque tous les angles estoients grands, et qu'il y en avoit toûjours quelqu'un dont on n'estoit pas si asseuré que des autres, et sur lequel la faute devoit estre rejettée". — Mit Hilfe solcher Winkel konnten natürlich auch die Seiten ziemlich sicher berechnet werden, und so erhielt **Picard** z. B. für die Seite Malvoisine-Brie, welche das Hauptdreieck zu 12389' 3' ergeben hatte, aus andern Kombinationen die wenig verschiedenen Werte 12388' 2', 12390' 0' und 12389' 0', nahm dann aber nicht das Mittel aus sämtlichen Werten, sondern schloss aus der Übereinstimmung bloss, dass der erste Wert als gut betrachtet werden könne. Nur als er aus seinem grössten Dreiecke Malvoisine-Montlehery-Mareuil, dessen Winkel er Nachts mit Hilfe von Feuern beobachtet hatte, die Seite Malvoisine-Mareuil gleich 31897' fand, während ihm eine Kombination von andern Dreiecken dafür 31893 1/2' ergab, entschloss er sich „partageant le différend", dafür definitiv 31895' anzunehmen. — Um sein Dreiecksnetz zu orientieren, stellte **Picard** im September 1769 seinen Quadranten zu Mareuil in den Vertikal des Polarsternes, so dass das feste Fernrohr horizontal, dasjenige der Alydade auf den Stern gerichtet war: „On suivit ainsi cette Estoille jusques à la plus grande digression, où elle demeurait un espace de temps assez sensible, sans sortir du filet vertical de la Lunette avec laquelle on l'observait; et alors on laissa l'instrument fixe dans sa position le reste de la nuit, jus'qu'à ce que, le jour étant venu, on peut découvrir l'endroit du bord de l'Horizon auquel la lunette fixe se trouvait pointée". **Picard** mass sodann den Winkel $\delta = 4^0\,55'$, welchen jener Punkt am Horizonte mit dem trigonometrischen Punkte in Clermont bestimmte,



und berechnete die östliche Elongation η des Polarsternes, woraus sich ihm das Azimut von Clermont $\beta = \delta - \eta = 1^0\,9'$, und sodann unter Zuhilfenahme des aus der Triangulation bekannten Winkels ε auch dasjenige von Malvoisine

$\gamma = 180^{0} - (\varepsilon + \beta) = 0^{0}\,26'$ ergab. Da er im Oktober 1670 auch noch in Sourdon das Azimut von Clermont $\alpha = 2^{0}\,9'\,10''$ bestimmte und aus der Triangulation a, b, c kannte, so konnte er $x = 18894^{t}$, $y = 17560^{t}$, $z = 31894^{t}$ berechnen, und durfte nun, obschon er sich wohl bewusst war, dass deren 68348^{t} betragende Summe strenge genommen dem umschriebenen Polygone angehöre, dieselbe unbedenklich als Mass des zwischen den Parallelen von Sourdon und Malvoisine liegenden Meridianbogens einführen. — Um endlich die Polhöhendifferenz von Malvoisine und Sourdon zu bestimmen, beobachtete **Picard** im September und Oktober 1670 an diesen beiden Punkten mit einem 10-füssigen Zenitsector, der mittelst Transversalen 20″ gab, aber etwa 3″ abzuschätzen erlaubte, den zenitalen Stern δ Cassiopejæ wiederholt zur Zeit seiner Culmination und fand für dessen Zenitdistanz in Malvoisine (18^{t} südl. vom Signal) $9^{0}\,59'\,5''$ und in Sourdon (65^{t} nördl. vom Signal) $8^{0}\,47'\,8''$, wobei er die früher (51 : a) mitgeteilte interessante Bemerkung machte. Es entsprachen sich also $9^{0}\,59'\,5'' - 8^{0}\,47'\,8'' = 1^{0}\,11'\,57''$ und $68348 + 65 + 18 = 68431^{t}$, woraus für 1^{0} der Wert 57065^{t} folgte, während nach nachträglicher Verlängerung seiner Triangulation bis Amiens bei gleicher Behandlung 57057^{t} erhalten wurde, so dass er schliesslich, wie bereits mitgeteilt, $1^{0} = 57060^{t}$ annehmen zu sollen glaubte. — *c.* Sein Sekundenpendel konstruierte **Picard** aus einer kupfernen Kugel von 1″ Durchmesser, welche er erst an einem Seidenfaden, dann, da er diesen zu hygroskopisch fand, an einem „simple brin de Pite, qui est une sorte de filasse qu'on apporte de l'Amérique“ aufhing, dessen oberes Ende er in einer „pincette quarrée, qui le tenait serré, et le terminait exactement“, befestigte, um die Distanz des Aufhängepunktes von der Kugel, welche er sodann noch um deren Radius zu vermehren hatte, genau messen zu können. Er liess dasselbe vor einer auf mittlere Zeit regulierten Pendeluhr schwingen und fand so, dass er seinem einfachen Pendel eine Länge von 36″ $8^{1}/_{2}$‴ seiner Toise geben müsse, damit dessen Schwingungen auf die Dauer mit denjenigen des Uhrpendels übereinstimmen. Er fügte bei: „Pour peu que ce pendule simple fut ou plus long ou plus petit, on s'appercevoit en moins d'une heure de quelque discordance“, — und schloss daraus, dass die Länge des einfachen Sekundenpendels wenigstens an einem bestimmten Orte ein sehr genau definiertes und immer wieder herstellbares Mass sei, das man „Rayon astronomique“ nennen und als Normalmass benutzen könnte.

419. Die Theorien der Huygens und Newton. — Schon 1669 hatte **Huygens** die Pariser Akademie darauf aufmerksam gemacht, dass bei rotierender Erde durch Wirkung der Centrifugalkraft die Schwere, und somit auch die Länge des Sekundenpendels, mit der Breite abnehmen müsse, — auch das Lot nicht nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet sein könne, — folglich die nach den Gesetzen der Hydrostatik überall zur Lotrichtung senkrechte Oberfläche des Meeres eine sphäroidische Gestalt haben werde [a]. — Diese Lehre, der sich alsbald auch **Picard** anschloss [b], erhielt sodann durch die nach Wunsch desselben 1671 von **Richer** in Cayenne angestellten Pendelmessungen volle Bestätigung [c], — ja es gelang sogar **Newton** und **Huygens**, durch mathematische Deduktionen zu zeigen, dass die Abplattung der Erde zwischen $^{1}/_{230}$ und $^{1}/_{578}$ fallen

müsse [d], woraus sich für jeden Geometer von selbst ergab, dass der Krümmungshalbmesser, und damit die Länge eines Meridiangrades, mit der Breite merklich zunehmen werde [e].

Zu 419: *a.* **Huygens** sprach schon damals ganz bestimmt aus: „La Terre n'est pas sphérique; ses méridiens ont la figure d'une ellipse aplatie au pôle". — *b.* Aus der pag. 11 seiner „Oeuvres" gebrauchten Bezeichnung „Conjecture" geht allerdings hervor, dass er sich 1671 Huygens nur noch mit einer gewissen Reserve anschloss. — *c.* **Richer** fand nämlich auf seiner Expedition (vgl. 441) durch zahlreiche und sorgfältige Beobachtungen (in vollständiger Übereinstimmung mit der Pouillet'schen Formel in 432), dass das Sekundenpendel in Cayenne um volle $^5/_4'''$ kürzer als in Paris sei, — und sogar der alle Erfolge von andern bemängelnde **Cassini**, der anfänglich die gefundene Retardation auf ungenaue Beobachtung und ungenügende Berücksichtigung der Temperatureinflüsse zurückführen wollte, musste nach entsprechenden Bestimmungen, welche er ein Decennium später am Kap Vert machen liess, das von **Richer** konstatierte Faktum als richtig anerkennen. Auch **Halley** hatte (Phil. Trans. 1686) zu berichten, dass er 1676 auf St. Helena (vgl. 448) genötigt gewesen sei, sein Sekundenpendel merklich zu verkürzen, leider jedoch ohne dass er damals die Sache weiter verfolgt habe. — *d.* Da **Newton** nach Picard anzunehmen hatte, es sei der Erdumfang $u = 360 \times 57060^t = 123\,249\,600'$ P., während die Umdrehungszeit $t = 23^h\ 56^m\ 4^s = 86164^s$ zu setzen war, so erhielt er die Centrifugalkraft am Equator

$$f = 4\pi^2 \cdot \frac{r}{t^2} = \frac{2u\pi}{t^2} = 0',1047312 \cdot P = 15''',0813 \cdot P \qquad 1$$

Es wird somit am Equator der Fallraum in der ersten Sekunde durch die Centrifugalkraft um $^1/_2\, f = 7''',5406$ vermindert, — also unter der Breite φ, da hiefür der Umfang mit Co φ multipliziert werden muss und dann noch einmal mit Co φ, um die zur Erde senkrechte Komponente zu erhalten, um $7,5406 \cdot \mathrm{Co}^2\varphi$, so z. B. für Paris ($\varphi = 48^0\ 50'$) um $3''',267$. Da ferner **Newton** die Länge des Sekundenpendels in Paris $l = 36''\ 8,6''' = 440''',6$ anzunehmen hatte, so schloss er aus

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{g}{2} = \frac{l \cdot \pi^2}{2\,t^2} \qquad 2$$

dass in Paris der Fallraum in der ersten Sekunde $2174''',274$ betrage, also ohne die Centrifugalkraft $2174,274 + 3,267 = 2177''',541$ betragen würde, — dass sich somit die Schwere in Paris zur Centrifugalkraft am Equator wie $2 \times 2177,541 : 15,0813 = 288,78 : 1 \risingdotseq 289 : 1 = 17^2 : 1$ verhalte, somit unter dem Equator, wenn die Erde 17 mal rascher rotieren würde, die Centrifugalkraft die Schwere total aufheben müsste. — Bezeichnet man nun die Anziehungen eines homogenen Rotationsellipsoides auf einen im Abstande α von der Rotationsaxe befindlichen Punkt des Equators und einen in der Rotationsaxe selbst im Abstande γ vom Mittelpunkte liegenden Punkt mit A und C, so hat man nach 116:17, wenn M eine Konstante ist,

$$A = M \cdot (1 + 0,3 \cdot e^2) \cdot \alpha \qquad C = M \cdot (1 + 6,9 \cdot e^2) \cdot \gamma \qquad 3$$

wobei A, wenn $k = {}^1/_{289}$ gesetzt wird, wegen der Centrifugalkraft noch nahe um $k \cdot A$ zu vermindern ist. Gehen wir somit mit **Newton** von der Voraussetzung aus, es müsse die Gestalt der rotierenden Erde so beschaffen sein, dass, wenn ein Kanal vom Pole zum Erdmittelpunkte und von da bis zu einem

Punkte des Equators führen würde, in demselben Gleichgewicht statt hätte, — teilen den Radius a des Equators in a, die halbe Umdrehungsaxe c in c Teile, — und berechnen nach 3 die Wirkungen in allen diesen Teilpunkten, so muss die dem Equatorarme des Kanales entsprechende Summe

$$\Sigma' A \cdot (1-k) = (1-k) \cdot M \cdot (1 + 0{,}3 \cdot e^2) \cdot \Sigma_1^a \alpha \fallingdotseq \tfrac{1}{2} a^2 \cdot M (1-k) (1 + 0{,}3 \cdot e^2) \quad 4$$

der dem andern Arme entsprechenden Summe

$$\Sigma C = M (1 + 0{,}9 \cdot e^2) \cdot \Sigma_1^c \gamma \fallingdotseq \tfrac{1}{2} a^2 M (1 - e^2) (1 + 0{,}9 \cdot e^2) \quad 5$$

gleich sein, d. h.

$$(1-k)(1 + 0{,}3 \cdot e^2) = (1 - e^2)(1 + 0{,}9 \cdot e^2) \fallingdotseq 1 - 0{,}1 \cdot e^2$$

woraus

$$e^2 = k : (0{,}4 - 0{,}3 \cdot k) \fallingdotseq 1/_{115} \quad 6$$

und somit nach 74:2 die Abplattung

$$\alpha = 1/_2 \cdot e^2 = 1/_{230} \quad 7$$

folgt, wie solche **Newton** (vgl. Principien ed. Wolfers 401—3) durch eine entsprechende Rechnung ebenfalls erhalten hat. Hätte letzterer die andere extreme Annahme gemacht, es bestehe die Erde aus Schichten, deren Dichte von der Oberfläche bis zum Centrum von 0 bis ∞ zunehme, so wäre er mit **Huygens** zusammengetroffen, der in einem Appendix zu seinem 1690 gleichzeitig mit dem „Traité de la lumière" veröffentlichten „Discours de la cause de la pesanteur" von der ihm plausibler scheinenden Annahme ausging, die Schwerkraft habe ihren Sitz im Mittelpunkte der Erde, von welchem aus sie auf alle Punkte derselben in gleicher Weise einwirke, und so für jenen Kanal die Gleichgewichtsgleichung

$$a (g - 1/_2 f) = c \cdot g \qquad \text{folglich} \qquad \alpha = \frac{a-c}{a} = \frac{f}{2g} = 1/_{578} \quad 8$$

erhielt. Es folgt hieraus, dass der wirkliche Wert von α zwischen $1/_{230}$ und $1/_{578}$, und zwar mutmasslich näher an den erstern Grenzwert fällt, wie dies die Folge (vgl. 428) auch wirklich bestätigt hat. — *c.* Wir werden auf einen betreffenden Irrschluss von **Cassini** unter der folgenden Nummer zurückzukommen haben.

420. Die spätern Messungen in Frankreich und der Streit über die Gestalt der Erde. — Als in Frankreich die schon von **Picard** projektierten Neumessungen durch die **Cassini** wirklich ausgeführt wurden [a], ergab sich auffallender Weise im Gegensatze zu den eben besprochenen theoretischen Resultaten, dagegen in Übereinstimmung mit dem Ergebnisse der Zusammenstellungen von Joh. Casp. **Eisenschmidt** [b], dass die Meridiangrade nach Süden, statt nach Norden, zuzunehmen scheinen [c], und ein entsprechendes Resultat ergab auch eine etwas später, mutmasslich infolge der von **Poleni** und **Calandrini** erhaltenen Anregung [d], vorgenommene **erste** Längengradmessung [e]. Eine Abplattung am Equator wollten nun die **Cassini** nicht gerade annehmen, dagegen glaubten sie wenigstens an der Kugelgestalt der Erde festhalten zu müssen [f], und da auch die Theoretiker nicht nachgeben konnten und wollten, so entspann sich ein nach und nach ziemlich heftig werdender Streit,

welcher erst seinen Abschluss fand, als sich Frankreich entschloss, dem Vorschlage von Jean-Théophyle **Désaguliers** entsprechend [g], zwei der Breite nach möglichst verschiedene Gradmessungen in Peru und Lappland anzuordnen [h], mit welchen wir uns unter den folgenden Nummern speciell befassen werden.

Zu 420: *a.* Schon 1677 hatte **Picard** die Absicht, mit Hilfe von **Römer** die Amplitude seines Gradbogens durch gleichzeitige Beobachtungen an beiden Endpunkten neu zu bestimmen, was jedoch wegen andern Aufträgen und Krankheit nicht zur Ausführung kam; dagegen wusste er 1681 Colbert zu belieben, die Gradmessung nach beiden Seiten hin bis an die Grenzen des Reiches verlängern zu lassen, teils um die Grösse der Erde noch sicherer bestimmen zu können, teils namentlich auch, um an diese Meridianlinie als Axe ein ganz Frankreich bedeckendes, eine richtige Grundlage für eine Landeskarte verschaffendes Dreiecksnetz zu legen. Da **Picard** leider schon im folgenden Jahre starb und **Römer** in seine Heimat zurückgekehrt war, so fiel jedoch die Lösung der Aufgabe Dom. **Cassini** zu, der nun wenigstens ihren ersten Teil, wenn auch die Arbeiten durch Kriege wiederholt auf längere Zeit unterbrochen wurden, von 1683 bis 1720 mit Hilfe seines Sohnes Jacques und seines Neffen Maraldi in bestmöglicher Weise löste; aber es darf nicht vergessen werden, dass **Picard** der eigentliche Vater des Ganzen war, und es der Unverfrorenheit von **Cassini** (der sich nach Delambre V 727 schon 1670 nicht geschämt hatte, nach Bologna zu schreiben „que depuis son arrivée en France il a fait reprendre et recommencer avec de plus grands instrumens la mesure de la terre“) bedurfte, seinen vielen reellen Verdiensten auch noch dieses beilegen zu wollen. — *b.* Joh. Kaspar **Eisenschmidt** (Strassburg 1656 — ebenda 1712; Arzt in Strassburg) gab in seiner „Diatribe de figura telluris elliptico sphæroide. Argentorati 1691 in 4.“ an, dass die Gradlänge nach

Eratosthenes	100	römische	Meilen	unter	27°	Polhöhe
Riccioli	80	„	„	„	44½	„
Picard	74	„	„	„	49	„
Fernel	73½	„	„	„	49½	„
Snellius	71⅓	„	„	„	52	„

betrage, und dass diese Daten ein verlängertes Rotationsellipsoid bedingen, dessen Axe etwa 10890 r. M. besitze, während dem Radius des Equators nur 8288 r. M. zukommen. Wenn man nun nicht berücksichtigt, dass nach dem Vorhergehenden nur die mittlere dieser 5 Angaben Zutrauen verdient, so scheint sich hieraus allerdings ein starkes Argument für die Eiform der Erde zu ergeben, an welche (vgl. Günthers Note in Leopoldina XXV von 1889) schon im Altertume zuweilen gedacht wurde, während von einer Abplattung an den Polen nie die Rede war. — *c.* Als Dom. **Cassini** von 1700 hinweg die Picard'sche Gradmessung nach Süden verlängerte, schien ihm die Gradlänge zuzunehmen, und daraus zog er anfänglich (vgl. Mém. Par. 1701) den Irrschluss, dass also wirklich entsprechend den Ansichten der Theoretiker die Erde an den Polen abgeplattet zu sein scheine, wofür ihn noch 1740 **Maupertuis** in seinem Pamphlete „Lettre d'un horloger anglais à un astronome de Pékin“ verhöhnte, — später dagegen sah er (vgl. Mém. Par. 1713) ganz gut ein, dass dies gegenteils auf eine Meridianellipse deute „dont le grand diamètre représente l'axe de la terre“, und dieser Ansicht pflichtete dann auch sein Sohn Jacques **Cassini** bei, als er in der Schrift „De la grandeur et de la figure de la Terre. Paris 1720

in 4. (Suite des Mém. 1718)" über die von ihm und seinem Vater geleiteten Arbeiten relatierte, dabei als Hauptresultate mitteilend, dass sich aus den von

$$50^0\,44'\,3'' - 48^0\,31'\,48'' \quad \text{und} \quad 48^0\,50'\,10'' - 42^0\,31'\,14''$$

bestimmten Bogen die mittlern Gradlängen

$$56960^t \quad \text{und} \quad 57097^t$$

ergeben haben, — so dass 1^0 Abnahme der Polhöhe eine Zunahme von circa 34^t entspreche. — *d.* Schon Giovanni **Poleni** (Venedig 1683 — Padua 1761; Prof. math. Padua) hob in seinem „Epistolarum mathematicarum Fasciculus. Padovæ 1729 in 4." hervor, wie unsicher die Schlüsse seien, welche man auf eine so geringe, nur einigen Sekunden der Amplitude entsprechende Differenz bauen könne, und machte den Vorschlag, „de mesurer la longueur de l'arc d'un degré d'un des cercles parallèls à l'équateur, p. e. du Parallèle qui passe par le 48. degré", da ihm seine Rechnung ergeben habe, „qu'un degré de ce Parallèle doit être plus petit de 777^t dans l'hypothèse de Mss. de l'Académie que dans celle de Mr. Newton, — une différence tellement sensible qu'on ne saurait s'y méprendre". **Calandrini** fügte sodann (vgl. meine Notiz 424) in der „Remarque", welche er zu Anfang 1733 im „Journal historique" seiner Besprechung des Poleni'schen Werkes folgen liess, folgende weitere Erörterung bei: Bezeichnen unter der Breite φ der Reihe nach α, β, N und R die Länge eines Breitengrades, eines Längengrades, der Conormale und des Krümmungsradius, — unter der Breite $90^0 - \varphi$ aber N' und R' Normale und Krümmungsradius, so hat man mit Hilfe von 74, je nachdem man der Erde eine abgeplattete, sphärische oder eiförmige Gestalt beilegt,

$$\beta' = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{N}}{\mathrm{R}} = \frac{\alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 - e^2\,\mathrm{Si}^2\,\varphi)}{1 - e^2} \doteq \alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 + e^2\,\mathrm{Co}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{1}$$

$$\beta'' = \alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \beta''' = \alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{N}' : \mathrm{R} \doteq \alpha\,\mathrm{Co}\,\varphi\,(1 - e^2\,\mathrm{Co}^2\,\varphi)$$

so dass $\beta' > \beta'' > \beta'''$ wird. Bezeichnen ferner im ersten und dritten Falle $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ Radius des Equators und halbe Umdrehungsaxe, so hat man, da aus den 1

$$e^2 = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - \beta'}{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}^2\,\varphi - \beta'} \quad \text{und} \quad e^2 = \frac{\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi - \beta'''}{\alpha \cdot \mathrm{Co}^3\,\varphi} \qquad \mathbf{2}$$

folgen,

$$\mathfrak{a}^2 : \mathfrak{b}^2 = 1 : (1 - e^2) = {}^1/_\alpha\,(\beta' \cdot \mathrm{Se}^3\,\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Tg}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{3}$$

und

$$\mathfrak{a}'^2 : \mathfrak{b}'^2 = (1 - e^2) : 1 = {}^1/_\alpha\,(\beta''' \cdot \mathrm{Se}^3\,\varphi - \alpha \cdot \mathrm{Tg}^2\,\varphi) \qquad \mathbf{4}$$

Es wird somit die Erde abgeplattet oder eiförmig sein, je nachdem der Messungswert von β grösser oder kleiner als $\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi$ ausfällt, und sodann das Verhältnis der Axen nach 3 oder 4 ermittelt werden können. — *e.* Obschon J. **Cassini** in einer im Frühjahr 1733 geschriebenen, aber noch den Mém. Par. 1732 angehängten Note sich nur gegen einige Ausstellungen des vorerwähnten Artikels verteidigt und nichts von der erhaltenen Anregung sagt, so ist es doch kaum ein Zufall, dass er (vgl. Mém. Par. 1733) unmittelbar darauf mit Hilfe seiner Söhne und seines Vetters Maraldi eine solche Längengradmessung unternahm, nämlich den Abstand von S. Malo ($\varphi = 48^0\,39'$) vom Pariser Meridiane ermittelte. Da er für denselben 165015^t fand und die Längendifferenz nach Picard zu $4^0{,}500$ (anstatt zu $4^0{,}363$) annahm, so erhielt er für den Längengrad 36670^t (anstatt 37821) und damit, da nach den frühern Messungen $\alpha \cdot \mathrm{Co}\,\varphi = 37707^t$ war, scheinbar einen neuen Beweis für (statt gegen) die Ei-Gestalt der Erde. — *f.* Dass die **Cassini** infolge solcher Messungsergebnisse sich gegen die Annahme einer erheblichen Abplattung sträubten, ist zu begreifen; dass

sich dagegen Joh. **Bernoulli** in kluger Berechnung der Schwächen seiner Richter beigehen liess, in seinem hierauf wirklich von der Pariser Akademie gekrönten „Essai d'une nouvelle physique céleste. Paris 1735 in 4. (Opera III 261—364)" auf die Wirbeltheorie einen Scheinbeweis für die Ei-Gestalt zu gründen, lässt sich dagegen kaum entschuldigen. — *g.* Jean-Théophile **Désaguliers** (La Rochelle 1683 — London 1744; protest. Geistlicher, der nach England emigrierte und Prof. phys. Oxford wurde) machte in seiner „Dissertation concerning the figure of the earth (Ph. Tr. 1724/5)" darauf aufmerksam, dass zwar die Cassini'schen Messungen als solche ganz gut seien, aber doch nicht eine hinlängliche Genauigkeit besitzen, um aus Vergleichung ihrer Teile Schlüsse auf den ganzen Erdkörper machen zu dürfen, — dass es hiefür, wie dies übrigens Dom. **Cassini** schon 1713 betont hatte, absolut notwendig wäre, eine Gradmessung in sehr geringer oder sehr hoher Breite zu besitzen. — *h.* Anfänglich wurde in Aussicht genommen, in Peru einen Meridianbogen und ein Stück des Equators selbst zu messen, — später aber beschlossen, von letzterer Messung zu Gunsten eines Meridiangrades in Lappland zu abstrahieren.

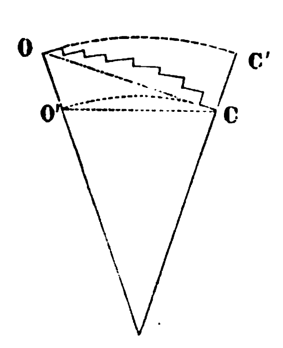
421. Die Expedition nach Peru. — Die im Mai 1735 nach Peru abgehende und etwa nach Jahresfrist in der Provinz Quito anlangende Expedition wurde zunächst durch **Bouguer** und **La Condamine** mit grossem Geschicke geleitet [a], — überwand glücklich alle Schwierigkeiten, welche ihr das damals noch wenig bekannte Gebirgsland, das ungesunde Klima, das Misstrauen der Behörden, sowie die diebischen und händelsüchtigen Einwohner verursachten [b], — legte längs dem Meridiane von Quito ein ungefähr die drei ersten Grade desselben beschlagendes musterhaftes Dreiecksnetz [c], — mass die zur Bestimmung nötigen Grundlinien und Winkel auf das sorgfältigste [d], — führte ebenso die zur Ermittlung der Azimute und Polhöhen erforderlichen Beobachtungen auf das beste aus [e], — liess sich die Mühe nicht reuen, die sämtlichen Rechnungen unter Berücksichtigung aller Nebenumstände mehrfach auszuführen [f], — und erhielt so schliesslich als Hauptresultat, dass sich, wenn φ die mittlere Breite der gemessenen Strecke und g die derselben zukommende Gradlänge bezeichnen, die Werte

$$\varphi = -1^0\,31' \qquad \text{und} \qquad g = 56734^t,0$$

entsprechen [g], — anderer wichtiger Untersuchungen, von welchen zum Teil bereits (126, 371) die Rede war, zum Teil noch später (432) zu sprechen sein wird, hier nicht einmal zu gedenken [h].

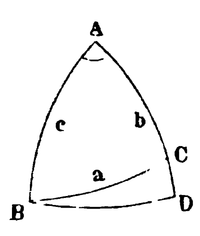
Zu 421: *a.* Ausser den zwei Genannten hatte die Akademie noch Louis **Godin** (Paris 1704 — Cadix 1760; damals Akad. Par., später Direktor der Seekadettenschule in Cadix; vgl. Fouchy in Mém. Par. 1760) zur Teilnahme an der Expedition bestimmt, und sodann schlossen sich noch die spanischen Marine-Offiziere Don George **Juan** y Santacilia (Novelda 1713 — Madrid 1773; später Kommandant der Marine-Arsenale) und Don Antonio de **Ulloa** (Sevilla 1716 — Isla de Leon 1795; später Gouverneur von Louisiana und Generallieutenant) an. Mit den Gehilfen und Dienern zählte die ganze Expedition 26 Köpfe. —

b. So wurden die Signale gestohlen oder zerstört, ja eines der wichtigsten mehrfach, bis **La Condamine** den glücklichen Einfall hatte, demselben ein steinernes Kreuz substituieren zu lassen. Einer der Gehilfen (Couplet) erlag dem Klima, ein anderer (Seniergue) den bei einem Auflaufe erhaltenen Verwundungen. Etc. — *c.* Das Netz bestand aus 32 Dreiecken, in welchen fast alle Winkel zwischen 40 und 90° fielen. — *d.* Die am nördlichen Ende des Netzes bei Cotchesqui gewählte Basis stieg von Carabarou (C) nach Oyambara (O) auf, wurde durch Zwischensignale in 8 Sektionen geteilt und von 1736 X 9 bis XI 3 teils durch **Bouguer, La Condamine** und **Ulloa** von Carabarou ausgehend, teils von **Godin** und **Juan** in entgegengesetztem Sinne nach der bereits (326) beschriebenen Methode gemessen, wobei erstere Sektion als Summe aller gemessenen Horizontalen 6272ᵗ 4′ 5″, letztere 6272ᵗ 4′ $2^1/_6$″ erhielt, so dass schliesslich (an das Mittel wegen einer nachträglichen Veränderung des einen Endpunktes noch $3^2/_3$″ anfügend) 6272ᵗ,77 als definitives Resultat angenommen wurde. Um aus dieser Zahl die wirkliche Distanz O C zu erhalten, wurde sodann (vgl. „La Condamine, Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral. Paris 1751 in 4.") in folgender Weise vorgegangen: Aus den Entfernungen der Sektionspunkte und den während der Messung bestimmten gegenseitigen Elevations- oder Depressions-Winkeln derselben wurden ihre Höhenunterschiede berechnet, deren Summe CC′ nicht weniger als 126ᵗ,08 betrug. Sodann wurde jede Sektion mit ihrer mittlern Höhe über Carabarou und unter der Annahme, es stehe dieser Punkt um 1226 (hypsom. Höhe über dem Meere) + 3 268 219 (mutmasslicher Radius des Equators „en prenant un milieu entre les hypothèses les plus différentes") = 3 269 445ᵗ vom Erdmittelpunkte ab, auf den Horizont von Carabarou reduziert, wodurch der Bogenabstand O′C = 6272ᵗ,672 und sodann die Sehne O′C = 6272ᵗ,656 gefunden wurde. Aus dieser Sehne und den in O und C gemessenen gegenseitigen Zenitdistanzen ergab sich endlich die wirkliche Distanz O C = 6274ᵗ,045, — und in ähnlicher Weise wurde sodann im August 1739 zu Tarqui am Südende der Dreieckskette eine Verifikationsbasis gemessen und berechnet, wobei für die wirkliche Distanz der Endpunkte 5259ᵗ,414 und bei Reduktion auf das 185ᵗ unter dem Südende der Verifikationsbasis gelegene Niveau von Carabarou 5258ᵗ,949 erhalten wurde. — Für die Winkelmessung standen mehrere, durch Horizont- und Dreieckabschlüsse vielfach geprüfte Quadranten von 2 bis 3′ Radius zur Verfügung, deren mikrometrische Vorrichtungen bis auf wenige Sekunden genau abzulesen erlaubten. Fast ausnahmslos wurden in jedem Dreiecke alle drei wahren Winkel, inklusive der zu ihrer Reduktion auf Centrum und Horizont (vgl. 348) nötigen Hilfsgrössen, gemessen, — und zwar von jeder der beiden Gruppen mindestens zwei derselben, so dass eine grosse Anzahl von Kontrolen vorhanden war. — *e.* Während der Triangulation wurde, und zwar nicht nur Ein mal, wie es zur Not hätte genügen können, sondern so oft sich die Gelegenheit darbot (im ganzen bei 20 mal), eine Azimutalbestimmung (vgl. 364) vorgenommen, — dagegen die Polhöhenbestimmung, auf welche die Akademiker mit Recht das grösste Gewicht legten, erst nach Beendigung derselben als selbständige Operation



durchgeführt. Für die zu letzterer gebrauchten Instrumente auf 316 verweisend, genügt es wohl beizufügen, dass, nachdem schon 1739/40 **Bouguer** und **La Condamine** gemeinschaftlich sowohl in Tarqui als in Cotchesqui die Zenitdistanzen von ε Orionis vielfach beobachtet hatten, **Bouguer** zwei Jahre später auf Wunsch von **La Condamine** nochmals nach Cotchesqui zurückkehrte, um dort 1742/3 neue Serien aufzunehmen, während dieser in Tarqui entsprechende Beobachtungen mache, — dass so, neben vielen vereinzelten, sich auch manche korrespondierende Beobachtungen ergaben, — und mit Recht beschlossen wurde, nur dieses neue Material zu benutzen: Die einzelnen, abwechselnd in beiden Lagen des betreffenden Instrumentes erhaltenen Beobachtungen, für welche alle durch Präcession, Nutation und Aberration (nach 613) erforderlichen Korrektionen zur Reduktion auf 1743 I 1 in Betracht gezogen wurden, ergaben im Mittel für ε Orionis in Cotchesqui die südliche Zenitdistanz 1° 25′ 48″,3, in Tarqui die nördliche 1° 41′ 10″,7, also den Unterschied 3° 6′ 59″,0, und somit, unter Anbringung von je 1″ für die Refraktion, den Polhöhenunterschied 3° 7′ 1″,0; — die korrespondierenden Beobachtungen, bei welchen jene Korrektionen wegfallen konnten, zeigten bei normaler Lage den Unterschied 3° 8′ 40″,1, bei umgelegten Instrumenten 3° 5′ 17″,8, also im Mittel unter Beilage der frühern Refraktion, ganz genau denselben Polhöhenunterschied. — *f.* Anfang Mai 1740 begann **La Condamine**, an den ich mich zunächst halte, die Berechnung seiner Dreiecke, welche ihn bis in den August hinein vollauf beschäftigte, da er kein sehr geübter Rechner war und überdies der Sicherheit wegen alles doppelt rechnete. „Je me sentis effrayé à la vue des longs calculs qu'il me fallait entreprendre“, schrieb er in sein „Journal du voyage fait par ordre du roi à l'équateur. Paris 1751 in 4. (Suppl. 1752)“, auf welches ich für weitern Detail verweise; „j'avais une extrême répugnance pour un travail que le peu d'habitude rend **pénible et rebutant** quand on n'y est pas rompu, tandis qu'il n'est pour le calculateur exercé qu'une occupation **douce et paisible**“. Zunächst wurde in jedem Dreiecke die Winkelsumme dadurch auf 180° reduziert, dass man (entsprechend wie es jetzt der Legendre'sche Satz in 91 vorschreibt) von jedem Winkel ⅓ des Überschusses abzog; dann wurden successive, beim ersten Dreiecke die schiefe Basis 6274ᵗ,05 einführend, die Seiten sämtlicher Dreiecke nach den Regeln der ebenen Trigonometrie berechnet, — mit ihrer Hilfe und der von jedem Dreieckspunkte aus gemessenen Elevations- oder Depressions-Winkel der beiden andern Dreieckspunkte die Höhenunterschiede berechnet, deren Kombination mit der oben zu 1226ᵗ angenommenen Meereshöhe von Carabarou die Meereshöhe jedes Signales ergab, und auch die Reduktion der schiefen Winkel auf den Horizont vorgenommen, — mit Hilfe dieser reduzierten Winkel, in das erste Dreieck nunmehr die auf den Horizont reduzierte Basis 6272ᵗ,66 einführend, die Seitenberechnung nochmals durchgeführt, — endlich mit Hilfe dieser neuen Seiten und der beobachteten oder unter Berücksichtigung der Konvergenz der Meridiane abgeleiteten Azimute, die Abstände aller Dreiecksecken von dem Meridiane und dem Parallel von Quito berechnet, woraus sich sodann z. B. für den Abstand des südlichsten Dreieckspunktes (bei Chinan) vom Parallel des nördlichsten (bei Cotchesqui) 177807ᵗ,87 ergaben. — Überdies ist noch anzuführen, dass mittelst der Kette von 32 Dreiecken aus der nördlichen für die südliche Basis die schiefe Länge 5260ᵗ,35 (statt 5259,25) und die horizontale Länge 5260ᵗ,09 (statt 5258,95) folgten, somit eine nach damaligen Begriffen sehr befriedigende Übereinstimmung statt hatte. — *g.* Für die Berechnung der Gradlänge ging **La Condamine** in

folgender Weise vor: Zunächst brachte er an der oben erhaltenen Distanz 177807',87 die vier Korrektionen — 17,78, + 25,06, — 856,71 und — 7,97 an, durch welche sie auf 176950,47 oder rund auf 176950' gebracht wurde. **Die erste** dieser Korrektionen ist ein Abzug von (5260,09 — 5258,95) : (5260,09 + 5258,95) = $^1/_{10000}$, welchen er sich auf der ganzen Länge erlaubte, um die gemessene mit der berechneten Länge der südlichen Basis, d. h. zwei Werte auszugleichen, welchen er glaubte gleiches Gewicht beilegen zu sollen. **Die zweite** hat ihren Grund einfach darin, dass der Sector zu Cotchesqui um 25',06 nördlicher als das dortige Signal aufgestellt war, — und **die dritte** entsprechend darin, dass der Sector zu Tarqui 856',71 nördlich vom Signale zu Chinan stand. **Die vierte** Korrektion endlich beruhte auf der Überlegung, dass die durch einen grössten Kreis dargestellte Senkrechte von einem Punkte B auf einen Meridian A C letztern in einem Punkte C trifft, der etwas näher am Pole A liegt als der Punkt D, in welchem ihn der durch B gelegte Parallel erreicht, und zwar so, dass C D = c — b leicht gefunden werden kann, indem aus Tg b = Tg c · Co A nach 40 : 22, unter Voraussetzung, dass c — b in Sekunden ausgedrückt werden soll, die Reihe



$$c - b = \frac{\text{Si}\,2\,c}{\text{Si}\,1''} \cdot \text{Tg}^2 \frac{A}{2} - \frac{\text{Si}\,4\,c}{2 \cdot \text{Si}\,1''} \cdot \text{Tg}^4 \frac{A}{2} + \ldots \qquad 1$$

folgt, von der in der Regel das erste Glied genügt, und A aus

$$\text{Si}\,A = \text{Si}\,a : \text{Si}\,c \qquad 2$$

erhältlich ist, für deren Anwendung allerdings die aus der Messung erhaltene Bogenlänge a durch die approximative Länge g eines Grades dividiert werden muss, um sie in Graden auszudrücken. Setzt man für Tarqui c = 86° 55' und (g zu 57041' angenommen) a = 31344 : 57041° = 0° 33', so wird nach obigen Formeln A = 0° 33' und c — b = 0'',51 × 57041 : 3600 = 8',08, was nahe mit jener 4. Korrektion übereinstimmt; für Cotchesqui wird dieselbe kaum merklich, da dieser Ort nahe am Equator und nahe am Meridiane von Quito liegt. — Jene 176950' durch die auf 3° 7' abgerundete Polhöhendifferenz teilend, erhielt somit **La Condamine** 56775' als Länge eines Grades im Niveau von Carabarou, und somit nach Reduktion auf den Meereshorizont 56749 oder rund **56750'** als Hauptresultat der ganzen Messung, — während **Bouguer,** der (vgl. seine Schrift „La figure de la terre. Paris 1749 in 4.") ebenfalls alle Rechnungen unabhängig durchführte, die Distanz 176940' und daraus ohne Abrundung der Polhöhendifferenz 56746 oder, nach Anbringung einer Korrektion wegen der Ausdehnung des Etalons, **56753'**, — und endlich später **Delambre** (vgl. Base du système métrique III 133), indem er als geodätische Distanz den mittlern Wert 176945' benutzte, dagegen gestützt auf Neuberechnung die Polhöhendifferenz auf 3° 7' 3'',12 erhöhte, die jetzt gewöhnlich und so auch oben angenommenen **56734'** erhielt. — *h.* Nachdem im grossen Ganzen die Arbeiten in Peru, für deren Detail auch noch auf die von **Juan** und **Ulloa** mit Benutzung der Arbeiten von **Godin** redigierte „Relacion historica del viage a la America meridional. Madrid 1748, 4 Vol. in 4. (auch 1773; franz. Paris und Amsterdam 1752 in 2 Vol.)" verwiesen werden kann, vollendet waren, errichteten die Akademiker 1742 im Jesuitenkollegium zu Quito ein Denkmal, auf dessen Marmortafel die Länge des Sekundenpendels mit der Inschrift „Penduli simplicis æquinoctialis unius minuti secundi archetypus, mensuræ naturalis exemplar, utinam et universalis" eingegraben war, und kehrten sodann

im folgenden Jahre (jedoch mit Ausnahme von Godin, der noch bis 1751 im Süden blieb) nach Europa zurück, um ihre Arbeiten zu redigieren und zu veröffentlichen. Während bisdahin **Bouguer** und **La Condamine**, wenn auch sich scharf kontrolierend, getreulich zusammen gearbeitet hatten, trat nun infolge dieser Publikationen eine sich immer mehr verschärfende Reibung zwischen ihnen ein, welche eine Reihe von Streitschriften zur Folge hatte, auf die ich jedoch hier nicht näher eintreten will, da sie sich fast nur auf Nebensächliches bezogen und höchstens geeignet waren, die vorzügliche Messung beim grössern Publikum in unverdienter Weise zu diskreditieren.

422. Die Expedition nach Lappland. — Die zweite französische Expedition, welche im April 1736 von Paris abging und zwei Monate später zu Tornea am bothnischen Meerbusen anlangte, stand unter Oberleitung von **Maupertuis** [a], — hatte ebenfalls viele lokale Schwierigkeiten zu überwinden, ehe es gelang, längs dem Meridiane von Tornea ein nicht einmal einen vollen Grad desselben beschlagendes erträgliches Dreiecksnetz legen zu können [b], — mass sodann sorgfältig die zur Bestimmung desselben nötigen Winkel, sowie, wenn auch unter sehr ungünstigen Verhältnissen, eine Grundlinie [c], — führte in nicht ganz tadelloser Weise die zur Ermittlung der Azimute und Breiten dienenden Beobachtungen aus [d], — und erhielt schon im Frühling 1737 nach ausgeführter Doppelrechnung das Resultat, dass sich bei ihrer Messung

$$\varphi = 66^\circ\ 20' \qquad \text{und} \qquad g = 57437^t{,}9$$

entsprechen [e], woraus sich in Vergleichung mit den Picard'schen Werten

$$\varphi = 49^\circ\ 13' \qquad \text{und} \qquad g = 57060^t{,}0$$

sofort auf eine beträchtliche Abplattung am Pole schliessen liess [f].

Zu 422: *a.* Zu dem bereits (424) erwähnten Beschlusse, einem eigentlichen Equatorgrad einen Meridiangrad in hoher Breite zu substituieren, hatte neben dem damals in Paris auf Besuch anwesenden **Celsius** namentlich auch **Maupertuis** beigetragen und sich sodann durch seine Liebenswürdigkeit, trotz seiner Unerfahrenheit in praktischen Arbeiten, die erwünschte Oberleitung der betreffenden Expedition verschafft. „Maupertuis était agréable“, sagt (Montucla IV 149) der ihm sonst wohlgewogene Lalande; „il faisait des chansons, il jouait de la guitare, et cela lui aida à obtenir la commission qu'il demandait“. Er machte sich jedoch besser als man erwarten konnte, und hatte das Glück, in **Clairaut**, **Lemonnier**, Charles-Etienne-Louis **Camus** (Cressy 1699 — Paris 1768; Akad. Paris) und dem ursprünglich nur als „Aumônier et Historiographe“ beigegebenen Abbé Réginaud **Outhier** (Lamare Jousserand 1694 — Bayeux 1774; früher Elève des Par. Obs., später Canonicus zu Bayeux) sehr tüchtige, wenn auch grossenteils in solchen Arbeiten noch ganz unerfahrne Gehilfen zu erhalten, — sowie in dem landeskundigen **Celsius**, der sich der Expedition aus Interesse ebenfalls anschloss, einen erwünschten Berater zu besitzen. — *b.* Der vor der Abreise ausgeheckte Plan, die Netzpunkte auf die längs der schwedischen Küste befindlichen „Skären (Felseninseln)“ und nur die Basis auf jener zu messen, erwies sich schon bei den ersten Rekognoscierungen als un-

tauglich und es blieb kaum etwas anderes übrig, als Tornea ($\varphi = 65^\circ\ 51'$) zum Südpunkte des Dreiecksnetzes zu wählen, — letzteres längs dem ebenfalls Tornea benannten, in diesem gebirgigen und unwegsamen Lande die Hauptkommunikation bildenden Flusse bis zu dem hinter Pello liegenden Berge Kittis ($\varphi = 66^\circ\ 48'$) fortzuführen, — und die Basis (abgesehen von auf dem Lande gewählten Endpunkten) auf den Fluss selbst zu legen, folglich deren Messung im Winter vorzunehmen. — *c.* Nachdem jeder Dreieckpunkt mit einem aus drei zu einer Pyramide vereinigten Bäumen bestehenden Signale versehen und durch Distanzmessung zu benachbarten Objekten versichert war, begannen die Winkelmessungen, für welche ein zweifüssiger, mikrometrisch bis auf wenige Sekunden ablesbarer, aber, da die Okulare nach Tychonischer Weise am Limbus sassen, zwei Beobachter erfordernder Quadrant von Langlois zur Verwendung kam, der sich wiederholt beim „Tour de l'horizon" als richtig bewährte. Die Winkel wurden unter Wechsel der Beobachter mehrfach und fast ausnahmslos centrisch gemessen, — auch die Elevationen und Depressionen der Schenkel behufs Reduktion auf den Horizont bestimmt, — überhaupt, wie man sich aus den Berichten (vgl. f) überzeugen kann, mit Sorgfalt und Sachverständnis vorgegangen. — Als sodann Mitte Dezember der Fluss überfroren war, wurde auch noch die Basismessung in Angriff genommen, und von XII 21—28 von den zwei Partien, in welche man sich geteilt hatte, doppelt, aber allerdings leider in demselben Sinne, ausgeführt, — trotzdem mit Einschluss der Dämmerung täglich höchstens 5 Stunden gearbeitet werden konnte, — trotzdem auf dem Eise eine 2 bis 3 Fuss hohe Schneedecke lag, welche man vergeblich versucht hatte, längs der Basis mit einer Art Schneeschlitten wegzuschaffen, — und trotzdem die Kälte zuweilen auf 20 und 30° anstieg, so dass wiederholt die Messlatten (vgl. 326) denjenigen, welche sie vorwärts zu tragen hatten, an die Hände festfroren: Die eine Partie erhielt dabei $7406^t\ 5'\ 4''$ als Länge der Basis, die andere $7406^t\ 5'\ 0''$, so dass man mit der Übereinstimmung zufrieden sein konnte und höchstens noch die Zählung der Latten zu kontrolieren hatte, was dann auch wirklich nachträglich „en traînant une corde longue de 50^t dans toute la longueur de la base" ausgeführt wurde. — *d.* Die Zeit zwischen Winkel- und Basis-Messung wurde zu den astronomischen Bestimmungen und den später (432) zu besprechenden Pendelmessungen benutzt. Für die Messung der Amplitude hatte Graham einen 8-füssigen Zenitsector (vgl. 346) und zur Orientierung des Netzes ein in jedem beliebigen Vertikal als Passageninstrument aufstellbares 15-zölliges Fernrohr, sowie eine Sekundenuhr geliefert. Der Sector wurde, zuerst auf dem Kittis und dann entsprechend in Tornea, mit Hilfe einer gezogenen Mittagslinie in den Meridian gebracht, und sodann sein Fernrohr je an 5 Tagen auf δ Draconis eingestellt, wobei sich durchschnittlich das Lot auf $2^\circ\ 37'\ 30'' - (1^r\ 25{,}8^p)$, respektive auf $1^\circ\ 37'\ 30'' + (1^r\ 40{,}6^p)$ stellte, wo r die 43'',8 wertigen vollen Schraubengänge und p die Partes zählt, von welchen 44 auf einen Schraubengang kommen; es betrug also die Amplitude $1^\circ\ 0'\ 0'' - (3^r\ 22{,}4^p) = 0^\circ\ 57'\ 26'',3$ oder, wenn dem Fehler des Sectors (346) und der Veränderung von Präcession und Aberration in der circa 28 Tage betragenden Zwischenzeit Rechnung getragen wird, $0^\circ\ 57'\ 26'',93$, — jedoch allerdings unter der gewagten Voraussetzung, es habe sich das Instrument auf dem Transporte vom Kittis nach Tornea absolut nicht verändert; denn es war unverantwortlicher Weise verabsäumt worden, an den beiden Stationen auch bei umgelegtem Instrumente zu beobachten, — und der Versuch, seine Stabilität nachträglich dadurch erweisen zu wollen, dass man

dasselbe zwischen zwei Beobachtungsserien eine Viertelstunde weit spazieren führte, ist ja natürlich geradezu lächerlich. — Die Azimutalbestimmung auf Kittis bestand darin, dass man das über dem Stationspunkte aufgestellte Passageninstrument abwechselnd in die Vertikale der benachbarten Signale brachte, — an der Uhr, welche täglich durch korrespondierende Höhen der Sonne auf wahre Zeit reguliert wurde, die Durchgangszeit des Sonnencentrums durch Beobachtung der beiden Ränder, somit den Stundenwinkel der Sonne bestimmte, — endlich aus diesem letztern, der den Tafeln entnommenen Sonnendeklination und der vorläufig zu 66° 48′ 20″ angenommenen Polhöhe jeweilen das Azimut berechnete. — *e.* Aus einer ersten Kombination von Dreiecken erhielt **Maupertuis** die Distanz des Kittis vom Parallel von Tornea $x = 54940^t,39$, aus einer zweiten $x = 54944^t,76$, so dass er im Mittel $x = 54942^t,57$ anzunehmen hatte. Da nun aber der Aufstellungsort des Sectors in Tornea um $73^t,74$ südlicher, und derjenige auf Kittis um $3^t,48$ nördlicher als der betreffende Dreieckspunkt war, so mussten offenbar noch diese beiden Distanzen zugefügt werden; ferner war nach der Rechnung von **Maupertuis** die Entfernung von Tornea zum Meridiane von Kittis $y = 3149^t,5$, und für diese ergab sich ihm unter $\varphi = 65^0\, 51'$ noch ein Zuschlag $\Delta x = 3^t,38$, wie ein solcher in der That, da aus 421 : 1, 2

$$\Delta x = g' \cdot \frac{\text{Si}\, 2\varphi}{\text{Si}\, 1''} \cdot \frac{y^2 \cdot \text{Si}^2\, 1''}{4\, g'^2 \cdot \text{Co}^2\, \varphi} = \frac{y^2 \cdot \text{Tg}\, \varphi \cdot \text{Si}\, 1''}{2\, g'}$$

folgt, wenn (421) $g' = g : 3600 = 15^t,84$ gesetzt wird, wirklich hervorgeht. Es war also schliesslich die der Amplitude 0° 57′ 26″,93 entsprechende Distanz $x' = 55023^t,47$, woraus für die mittlere Breite von 66° 20′ die Gradlänge **57466^t,8** folgte, welche dann allerdings (423) etwas später noch auf **57437^t,9** herabgemindert wurde. — *f.* **Maupertuis** gab als sofortiges Resultat seiner Messung und Rechnung den Satz: „Le degré du méridien qui coupe le cercle polaire, surpassant le degré du méridien en France, **la Terre est un Sphéroide applati vers les Poles**". — Für weitern Detail vgl. die beiden Schriften „**Maupertuis**, La figure de la terre déterminée par les observations de Mss. de Maupertuis, Clairaut, Camus, Le Monnier et Outhier, accompagnés de Mr. Celsius: faites par Ordre du Roi au cercle polaire. Paris 1738 in 8. (2 éd. Amsterdam 1738; engl. London 1738; deutsch durch Sam. König, Zürich 1741; lat. durch A. Zeller, Lipsiæ 1742), — und: **Outhier**, Journal d'un voyage au Nord en 1736 et 1737. Paris 1744 in 4."

423. Die Resultate und die dadurch veranlassten Nachmessungen. — Als **Maupertuis**, mit Hilfe von schon früher durch ihn aufgestellten Beziehungen [a], die oben (422) einander gegenüber gestellten Wertepaare genauer miteinander verglich und dabei die starke, ja ausserhalb die (419) durch die Theorie festgestellten Grenzen fallende Abplattung $\alpha = 1/_{114}$ fand, wurde er stutzig und ordnete zur Verifikation seines Grades einige neue Beobachtungen und Rechnungen an, welche jedoch nur zu kleinen Abänderungen führten [b], folglich ihn insoweit beruhigten, dass er nicht nur seine Rückreise antrat und im August 1737 einen solennen Einzug in Paris hielt [c], sondern über die frühern Arbeiten der **Cassini** mit so beissendem Spott herfiel, dass diese sich entschlossen, die Messungen

im Meridiane von Paris zu verifizieren und zugleich nach Norden und Süden weiter auszudehnen [d]. Sie erhielten nun dabei einerseits das Resultat, dass sich schon aus den Sektionen des französischen Bogens eine merkliche Zunahme der Grade von Süden nach Norden ergebe, und anderseits ihrer ganzen Messung das Wertepaar

$$\varphi = 46^0\ 45' \qquad \text{und} \qquad g = 57059^t{,}5$$

entspreche, woraus nun, je nachdem man zur Vergleichung den lappländischen oder peruanischen Grad wählt, die Abplattung

$$\alpha = {}^1/_{143} \qquad \text{oder} \qquad \alpha = {}^1/_{279}$$

folgt [e]. Auf einige spätere Verifikationsarbeiten in Frankreich nicht näher eintretend [f], erwähne ich dagegen noch zum Schlusse, dass zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts durch Jöns **Svanberg** die lappländische Gradmessung wiederholt und zugleich etwas ausgedehnt wurde [g], woraus die Werte

$$\varphi = 66^0\ 20' \qquad g = 57196^t{,}2 \qquad \alpha = {}^1/_{323}$$

hervorgingen, so dass die frühern Wiedersprüche wenigstens einigermassen beglichen waren [h].

Zu 423: *a.* **Maupertuis** hatte sich schon in seiner Abhandlung „Sur la figure de la terre et sur les moyens que l'astronomie et la géographie fournissent pour la déterminer (Mém. Par. 1733)“ unter anderm das Problem gestellt „Connaissant la courbure du méridien de l'Ellipsoide dans deux points, dont la latitude est connue, déterminer l'Ellipsoide“, und für dasselbe die folgende Lösung gegeben: Bezeichnet R den Krümmungshalbmesser in einem Punkte einer Ellipse der Halbaxen A und B oder des Parameters $P = B^2 : A = A(1 - e^2)$, und φ den Winkel desselben mit der Axe 2 A, so ist (74:9)

$$R^{2/3} = \frac{M^2 \cdot A \cdot P^{2/3}}{N^2 \cdot A + P} \qquad \text{wo} \qquad M = \frac{1}{\text{Si}\,\varphi} \qquad N = \frac{1}{\text{Tg}\,\varphi} \qquad \mathbf{1}$$

und für einen zweiten Punkt der Breite ψ ist ebenso

$$r^{2/3} = \frac{m^2 \cdot A \cdot P^{2/3}}{n^2 \cdot A + P} \qquad \text{wo} \qquad m = \frac{1}{\text{Si}\,\psi} \qquad n = \frac{1}{\text{Tg}\,\psi} \qquad \mathbf{2}$$

woraus durch Elimination von A

$$P = \frac{(N^2 - n^2)^{3/2} \cdot R \cdot r}{(M^2 \cdot r^{2/3} - m^2 \cdot R^{2/3})^{3/2}} \qquad \mathbf{3}$$

hervorgeht, so dass man wirklich aus zwei Messungen den Parameter P, und sodann auch A, B, e berechnen kann. — In seiner 422: f erwähnten Schrift nahm sodann **Maupertuis** $A = 1$ an, setzte in dieser Einheit $B = \mu$, und führte nunmehr $S = \text{Si}\,\varphi$ und $s = \text{Si}\,\psi$ ein, wodurch 1 und 2 in

$$R = \frac{\mu^2}{[1 + (\mu^2 - 1)S^2]^{3/2}} \qquad \text{und} \qquad r = \frac{\mu^2}{[1 + (\mu^2 - 1)s^2]^{3/2}} \qquad \mathbf{4}$$

übergehen, in welchen offenbar $\mu^2 = 1 - e^2$ ist. Sind nun G und g die den Radien R und r entsprechenden Gradlängen, so hat man somit

$$G : g = R : r = [1 + (\mu^2 - 1)s^2]^{3/2} : [1 + (\mu^2 - 1)S^2]^{3/2} \qquad \mathbf{5}$$

oder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes, wenn nur die ersten Potenzen der jedenfalls sehr kleinen Grösse $\mu^2 - 1$ beibehalten werden, mit genügender Annäherung

$$\frac{G}{g} = \frac{1 + {}^3/_2\,(\mu^2 - 1)\cdot s^2}{1 + {}^3/_2\,(\mu^2 - 1)\cdot S^2} \quad \text{oder} \quad 1 - \mu^2 = \frac{2\,(G - g)}{3\,(G\cdot S^2 - g\cdot s^2)} \qquad 6$$

Ist aber $1 - \mu^2 = a$, so wird $\mu = \sqrt{1 - a}$ oder $1 - \mu = 1 - \sqrt{1 - a} \risingdotseq {}^1/_2\, a = {}^1/_2\,(1 - \mu^2)$, also folgt mit Hilfe von 6 die sog. Abplattung

$$\alpha = \frac{A - B}{A} = 1 - \mu \risingdotseq {}^1/_2\,(1 - \mu^2) = {}^1/_3 \cdot \frac{G - g}{G\cdot S^2 - g\cdot s^2} \qquad 7$$

— *b.* Als **Maupertuis** die 6 unter Benutzung der Picard'schen auf seine eigenen Werte anwandte, erhielt er $\alpha = {}^1/_{114}$, während ihm wohl bekannt war, dass die Abplattung (419) von den Newton'schen ${}^1/_{230}$ gegen den Huygens'schen ${}^1/_{578}$ hin liegen müsse. Es erschien ihm also sein Messungsresultat etwas verdächtig und er entschloss sich, der bisherigen Operation noch eine Reihe von kontrolierenden Messungen und Rechnungen folgen zu lassen, — namentlich auch noch eine zweite Bestimmung der Amplitude mit Hilfe des ebenfalls zenitalen Sternes α Draconis anzuordnen. Da nun letztere Bestimmung, bei der allerdings das „Renversement" mutmasslich wieder verabsäumt wurde, 0° 57′ 30″,42 ergab, so glaubte **Maupertuis** der Amplitude schliesslich den mittlern Wert 0° 57′ 28″,67, also seinem Grade die eine Abplattung von ${}^1/_{122}$ involvierende, schon oben (422) mitgeteilte Länge von **57437ᵗ,9** geben zu sollen, und nunmehr höchstens einen Fehler von 2″ oder etwa 32ᵗ befürchten zu müssen, — und da eine in Tornea vorgenommene neue Azimutalbestimmung die frühere Orientierung des Netzes ebenfalls als nahe richtig erwies, auch die denkbar ungünstigsten Annahmen über den Einfluss allfälliger Winkelfehler den Gesamtfehler der Distanz nur auf 54ᵗ ansteigen liessen, so glaubte er mit aller Sicherheit daran festhalten zu dürfen, dass der lappländische Grad den französischen jedenfalls weit übertreffe. — *c.* Bei seinem Einzuge in Paris soll sich **Maupertuis** in lappländischer Kleidung gezeigt und ein Gefolge von lappländischen Schönheiten und Renntieren besessen haben. Vgl. darüber und über die verschiedenen „Amusements", durch welche sich die leichtlebigen Franzosen ihren Aufenthalt in Lappland erträglich gemacht zu haben scheinen, die 11 : p angeführten Quellen. — *d.* Nachdem **Langlois** speciell zu diesem Zwecke einen 6-füssigen Sector von 50° und einen 2-füssigen Quadranten konstruiert hatte, führte **Cassini** de Thury mit seinem jungen Gehilfen **Lacaille** in den Jahren 1739—40 die beabsichtigten Arbeiten mit grösster Umsicht aus: Alle Basen, Winkel, Azimute und Polhöhen wurden auf das sorgfältigste neu bestimmt und zugleich die Messung nördlich bis Dünkirchen und südlich bis Perpignan ausgedehnt, so dass sie nun volle 8⅓° umfasste, wie im Detail aus der Schrift „**Cassini** de Thury, La Méridienne de l'Observatoire de Paris, vérifiée dans toute l'étendue du Royaume par de nouvelles observations. Paris 1744 in 4." ersehen werden kann. — *e.* Dem bereits oben mitgeteilten Hauptresultate der Neumessung ist beizufügen, dass sich aus der nördlichsten der 11 Sektionen, in welche der ganze Bogen eingeteilt wurde, für die mittlere Breite von 49° 56′ ein Grad von 57084ᵗ, aus der südlichsten dagegen für 43° 31′ ein Grad von 57048ᵗ, und speciell für die Strecke Paris-Amiens oder den Picard'schen Grad 57074ᵗ ergab, während **Maupertuis** für letztern, als er (vgl. seine Schrift „Degré du Méridien entre Paris et Amiens. Paris 1740 in 8.") im Herbst 1739 mit seinen lappländischen Gehilfen und Instrumenten dessen Amplitude neu bestimmte, 57183ᵗ und aus diesem Werte in Verbindung mit dem lappländischen

Grade die Abplattung $^1/_{178}$ fand. — *f.* Es waren also immer noch bedeutende Widersprüche vorhanden, zu deren Aufklärung eine Ober-Expertise wünschbar erschien, welche durch zwei unabhängig von einander arbeitende Gruppen von Akademikern ausgeführt werden sollte. Als jedoch die erste Gruppe (Bouguer, Camus, Cassini de Thury und Pingré), gestützt auf eine neue Basismessung für die Distanz der Kirchtürme von Montlehéri und Brie-Comte-Robert den Wert 13108ᵗ,05 erhielt, welcher fast genau mit den durch Cassini-Lacaille gefundenen 13108ᵗ,32 übereinstimmte, während er von dem durch Maupertuis nach Picard übernommenen Werte 13121,5 um 1‰ abwich, so schien dies so entschieden zu Gunsten der Arbeit von Cassini-Lacaille gegenüber derjenigen von Picard-Maupertuis zu sprechen, dass diese Gruppe ihre Arbeiten alsbald sistierte, — die zweite Gruppe (Godin, Clairaut, Lemonnier und Lacaille) gar nicht in Thätigkeit trat — und die bestehende Differenz dadurch erklärt wurde, dass **Maupertuis** auch die ganze geodätische Distanz um 1‰ zu gross angenommen, und überdies mutmasslich die Amplitude um 3 bis 4″ zu klein gefunden habe. Vgl. für weitern Detail „**Bouguer**, Opérations faites par ordre de l'Académie pour la vérification du Degré du méridien compris entre Paris et Amiens. Paris 1757 in 8. (auch Mém. Par. 1754)". — *g.* Gegen Ende des vorigen Jahrhunderts machte Daniel **Melanderhjelm** (Stockholm 1726 — ebenda 1810; Prof. astr. Upsala und Akad. Stockholm) darauf aufmerksam, dass es wünschbar wäre, auch den lappländischen Grad zu verifizieren, und infolge davon erhielt Jöns **Svanberg** (Neder-Kalix bei Tornea 1771 — Upsala 1851; Prof. math. et astr. Upsala) den Auftrag, diese Arbeit mit Hilfe der schwedischen Geodäten **Öfverbon**, **Holmquist** und **Palander** sofort auszuführen. Er mass seine Basis mit Hilfe von aus Paris bezogenen Etalons nahe an derselben Stelle wie Maupertuis, — behielt auch dessen Dreiecksnetz zwischen Tornea und Kittis im wesentlichen bei, — verlängerte jedoch dasselbe südlich durch vier neue Dreiecke bis Mallörn, nördlich durch drei neue Dreiecke bis Pahtawara, — und erhielt nun das Resultat, dass einer Amplitude von 1° 37′ 19″,566 eine Distanz von 92777ᵗ,981 entspreche, folglich dem Grade der oben gegebene, um volle 242ᵗ kleinere Wert beizulegen und etwa anzunehmen sei, es habe **Maupertuis** den geodätischen Abstand der Parallele von Tornea und Kittis um $22^1/_2$ ᵗ zu gross, dagegen die entsprechende Amplitude um $10^2/_3$″ zu klein erhalten. Vgl. für weitern Detail die Schrift „**Svanberg**, Exposition des opérations faites en Lapponie en 1801—3 pour la détermination d'un arc du méridien. Stockholm 1805 in 8." — *h.* Sobald das eben mitgeteilte Ergebnis bekannt wurde, taxierte man ohne weitere Prüfung die frühere Arbeit als eine schlechte, ja stellte **Maupertuis** selbst vielfach als einen Windbeutel hin, von dem man eigentlich nichts Besseres habe erwarten können, — und erst **Rosenberger** (A. N. 121 von 1827) und **Hansen** (A. N. 202 f. von 1831) leiteten eine gerechtere Beurteilung ein, indem sie als Resultat gründlicher Untersuchung darlegten, dass die Arbeit der Akademiker im allgemeinen eine sorgfältige gewesen sei, — dass sie keine grössern Fehler zeige als die bei den damaligen Hilfsmitteln unvermeidlichen, — und dass die Differenz in der Amplitude sich wohl nur durch lokale Störungen auf Kittis erklären lasse, welche sich bei **Maupertuis** geltend machten, während sie bei **Svanberg** ohne Einfluss blieben, da er auf Kittis selbst keine astronomischen Bestimmungen ausführte, sondern die an entlegenen andern Punkten gemachten geodätisch auf denselben übertrug. — So sehr ich nun damit einverstanden bin, dass **Maupertuis** und seine Gehilfen eine Ehrenrettung verdienen, so möchte ich doch nicht fast alle Schuld

auf den bösen Kittis werfen, sondern würde vorziehen, von den circa 240^t, um welche die Grade von **Maupertuis** und **Svanberg** differieren, vorab etwa 100^t den geodätischen Bestimmungen des erstern zuzuteilen, indem sowohl die Basismessung (vgl. 326) als eingestandenermassen (vgl. Note b) auch die Winkelmessungen nicht ganz vorwurfsfrei waren. Die übrig bleibenden 140^t repräsentieren sodann noch etwa 9″ der Amplitude, von welchen ich 2½″ (oder 40^t) **Svanberg** zuteilen möchte, dessen Beobachtungen mit einem Bordakreise nach Rosenberger auch nicht gerade vollkommen waren, — und die übrigen 6½″ (oder 100^t) **Maupertuis**, was auch abgesehen von einer Lotablenkung kaum zu viel sein dürfte, da einerseits eine etwelche Veränderung der Kollimation sehr wahrscheinlich statt hatte, — anderseits bei der damaligen Beschaffenheit von Fadennetzen und Mikrometerschrauben die Anzahl der Beobachtungen ungenügend war, um die zufälligen Fehler auszugleichen, und sich auch schon bei den zwei angewandten Sternen ein Unterschied von 3½″ ergab, der bei weitern Sternen vielleicht noch beträchtlicher geworden wäre, — und da endlich in dem Umstande, dass die mit dem Sector in Lappland und Frankreich gemachten Bestimmungen Abweichungen in einem und demselben Sinne zeigten, eine Andeutung eines nicht erkannten systematischen Fehlers zu liegen scheint. Es würde so als Facit für den Lappländer Grad ein Wert von etwa **57240^t** hervorgehen, — ein Wert, den man auch nahezu im Mittel aus 57196 und 57438 unter der plausibeln Annahme erhalten würde, es sei der ersten Zahl im Vergleiche zur zweiten ein fünffaches Gewicht beizulegen.

424. Die Messung am Kap. — Als **Lacaille** seinen noch später (444) zu besprechenden Aufenthalt am Kap machte, führte er daselbst 1751 neben seiner Hauptarbeit auch eine Gradmessung aus [a], welche ihm die korrespondierenden Werte

$$\varphi = -33^\circ\ 18' \qquad g = 57036^t{,}6$$

ergab, d. h. einen für jene Breite, unter Annahme, dass sich die beiden Erdhälften entsprechen, merklich zu grossen Grad [b]. Da eine spätere Verifikation seiner Messung durch Thom. **Maclear** dieselbe nahezu als richtig bewährte [c], so ist somit anzunehmen, es sei entweder jene Annahme wenigstens nicht strenge haltbar, oder es haben bedeutende Lotablenkungen störend eingewirkt [d].

Zu 424: *a.* Schon **Godin** planierte, nach Beendigung der Messung in Peru noch einen wesentlich südlichern Grad zu messen, kam aber nicht dazu, es wirklich auszuführen, und so blieb es **Lacaille**, der hiezu durch seine frühern Arbeiten (vgl. 423 : d) ebenfalls sehr tüchtig erschien, vorbehalten, diese Lücke in geeigneter Weise auszufüllen. Für den Detail der Operation auf seine „Observations sur la mesure du 34me degré de la latitude australe au Cap de bonne espérance (Mém. Par. 1751; ausgeg. 1755)“ verweisend, beschränke ich mich darauf mitzuteilen, dass er für den Abstand der Parallele von Cape Town und Klyp Fontein 69669^t,1 bei einer Amplitude von 1° 13′ 17⅓″ = 1°,22148 fand, woraus sich sodann das oben mitgeteilte Resultat ergab. — *b.* Nach den Messungen in Peru und Frankreich würde auf der nördlichen Halbkugel eine Gradlänge von 57037^t etwa der Breite von 47° 25′, und der Breite von 33° 18′ etwa eine Gradlänge von 56900^t entsprechen. — *c.* Als Thomas **Maclear** (1794 — Capetown 1879; Dir. Obs. am Kap) in den Vierzigerjahren

des laufenden Jahrhunderts, vgl. sein Schreiben in A. N. 574 von 1846 und seine „Verification and extension of Lacaille's Arc of Meridian at the Cape of Good Hope. London 1866, 2 Vol. in 4.", den Lacaille'schen Grad revidierte, erhielt er für die geodätische Distanz 445027',51 E. = 69594',36 und für die Amplitude 1° 13' 14",51 = 1°,22070, folglich die Gradlänge 57011',8, so dass die Anomalie etwas vermindert, aber doch nicht gehoben wurde. Überdies verlängerte er den Bogen nach Norden fast auf das Dreifache, woraus für die mittlere südliche Breite von 32° 9' ein Grad von 56932',3 hervorging, der sich noch etwas besser an die auf der nördlichen Halbkugel erhaltenen Resultate anschloss, aber doch immerhin noch bedeutend zu gross war. — *d.* **Lalande** fügte (Montucla IV 172) seinem Berichte über Lacaille's Bestimmung die Bemerkung bei: „On ne s'attendait pas à un pareil résultat; mais comme le remarque **Lacaille**, le devoir de l'astronome est uniquement de rendre compte de ses observations, et les irrégularités de la terre peuvent bien expliquer cette différence", und es scheint hier wirklich der Fall zu sein, dass die Amplitude infolge von Lokaleinflüssen merklich vermindert wurde, indem das bei Cape Town liegende Südende des von Lacaille bestimmten Bogens am Nordfusse des mächtigen Tafelberges, das Nordende dagegen am Südfusse der sich bei Klyp Fontein erhebenden Gebirgsmasse lag. (Vgl. 427—28.)

425. Die Messungen im Kirchenstaate und einige andere Messungen damaliger Zeit. — Durch die Nichtübereinstimmung der Grade von Peru, Frankreich und Lappland wurde **Boscovich** gegen die Mitte des vorigen Jahrhunderts auf die Idee geführt, dass die Erde vielleicht nicht ein Rotationsellipsoid, ja nicht einmal ein Rotationskörper sein dürfte, und dass es zur Erledigung dieser Frage nützlich wäre, noch einen Grad, unter gleicher Breite mit dem französischen, aber unter verschiedener Länge zu messen. Bei den damals vorhandenen Hilfsmitteln konnte jedoch die von ihm hierauf unternommene Messung unmöglich zu einem entscheidenden Resultate führen [a], und ebensowenig war dieses von den gleichzeitigen Operationen der **Beccaria, Liesganig, Mason** und **Dixon** zu erwarten [b]; dagegen repräsentieren der Gedankengang von **Boscovich** und voraus die Methode, nach welcher er etwas später aus den sämtlichen ihm zu Gebote stehenden Messungsresultaten einen wahrscheinlichsten Wert $\alpha = 1/_{273}$ für die Abplattung ermittelte [c], für die Geodäsie die Morgenröte eines neuen Tages [d].

Zu 425: *a.* **Boscovich** liess sich 1750 von Papst Benedikt XIV. den Auftrag geben, in Verbindung mit Christoph **Maire** (1697 — Gent 1767; Jesuit; Rektor in Lüttich und Rom) zwischen Rom und Rimini einen Meridianbogen von 2° 9¾' zu messen und erhielt so für die mittlere Breite von 43° einen Grad von 56979', der nur wenig von den für 43° durch die Theorie von **Bouguer** geforderten 56962' gegen die durch **Cassini** und **Lacaille** unter 43½° gefundenen 57048' hin abwich, — offenbar ein Ergebnis, das den beiden Geodäten, angesichts der ihnen zu Gebote stehenden instrumentalen Hilfsmittel, alle Ehre macht, wenn es auch zur Erledigung der aufgeworfenen Frage wenig beitragen konnte. Vgl. „**Maire et Boscovich**, De litteraria expeditione per ponti-

ficum ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus. Romæ 1755 in 4." — *b.* Vgl. „Giacomo Battista **Beccaria** (Mondovi 1716 — Turin 1781; Prof. phys. Turin) et Domenico **Canonica** (Cortemiglia 1739 — Borgomale 1790; Prof. phys. Turin), Gradus Taurinensis. Aug. Taur. 1774 in 4., — Joseph **Liesganig** (Gratz 1719 — Lemberg 1799; Jesuit; Prof. math. Kaschau und Wien), Dimensio graduum meridiani viennensis et hungarici. Viennæ 1770 in 4., — und: **Maskelyne,** Introduction to the observations made by Charles **Mason** (1735? — Pennsylvanien 1787; Obs. Greenwich) and Jeremiah **Dixon** (1735? — Durham 1777) for determining the length of a degree of latitude in the Provinces of Maryland and Pennsylvania. (Ph. Tr. 1765)". Die Hauptresultate sind in die nachstehende Tafel eingetragen. — *c.* **Boscovich** stellte sich in einem Anhange zu seiner „Voyage astronomique et géographique. Paris 1770 in 4. (einer Art neuer Ausgabe der Schrift von 1755)" die Aufgabe „Etant donné un certain nombre de degrés, trouver la correction qu'il faut faire à chacun d'eux, en observant ces trois conditions: **la première**, que leurs différences soient proportionelles aux différences des Sinus verses d'une latitude double; **la seconde,** que la somme des corrections positives soit égale à la somme des négatives; **la troisième** que la somme de toutes les corrections, tant positives que négatives, soit **la moindre possible** pour le cas où les deux premières conditions soient remplies", — wobei er durch die erste Bedingung der aus den Gleichgewichtsgesetzen zu erwartenden sphäroidischen Gestalt der Erde Rechnung tragen wollte, indem bei einer solchen nach 423 : 6 wirklich

$$G_1 - G_2 = {}^3/_2\, e^2 G_1 (Si^2 \varphi_1 - Si^2 \varphi_2) = {}^1/_{240}\, a \pi e^2 (Sv\, 2\varphi_1 - Sv\, 2\varphi_2) \qquad 1$$

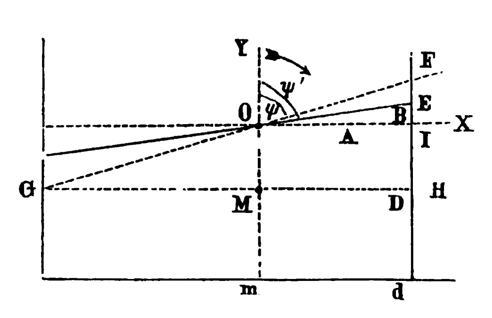
wird, — durch die zweite den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (50—52) zu genügen suchte, — und durch die dritte verhindern wollte, dass man sich unnötig weit von den gegebenen Zahlen entferne. Er ging dabei unter Zugrundelegung der in den Jahren 1736—68 ausgeführten, in die Tafel

Nr.	Autor	g in t	φ	d	D	A	B	C	D'	D''
			° '							
1	Bouguer	56750	0 0	0,0000	0	−4581,2	−287,6	15,9	0,0	− 45,7
2	Lacaille	57037	−33 18	3015	287	−1566,2	− 0,6	2610,3	189,3	173,6
3	Mason	56888	39 12	3995	138	− 586,2	−149,6	3,9	250,8	244,9
4	Boscovich	56979	43 0	4651	229	69,8	− 58,6	− 1,2	292,0	292,7
5	Beccaria	57069	44 44	4954	319	372,8	31,4	11,9	311,0	314,7
6	Cassini	57028	45 0	5000	278	418,8	− 9,6	− 43,6	313,9	318,1
7	Liesganig	57091	47 40	5465	341	883,8	53,4	16,6	343,2	351,9
8	Maupert.	57074	49 23	5762	324	1180,8	36,4	32,4	361,8	372,6
9	Maupert.	57422	66 20	8389	672	3807,8	384,4	9,9	526,7	564,7

nach den Gradlängen g und den ihnen entsprechenden mittlern Breiten φ eingetragenen neun Messungen in folgender Weise vor: Zuerst berechnete er für alle Gradmessungen die in die Tafel eingetragenen Werte $d = {}^1/_2\, Sv\, 2\varphi$, ferner die Überschüsse D der übrigen Grade über den Equatorgrad Nro. 1, sowie die Mittelwerte

$$m = {}^1/_9 \sum d = 4581{,}2 \qquad M = {}^1/_9 \sum D = 287{,}6$$

und trug die d und m als Abscissen, die D und M aber als Ordinaten auf, so



dass jede Gradmessung durch einen Punkt E dargestellt und zugleich der Schwerpunkt O aller dieser für ihn gleichgewichtigen Punkte verzeichnet war. Zog er nun durch O irgend eine Gerade OF, so bestimmte ihm diese **einerseits** für jeden Grad einen Abschnitt FH, welcher nach der aus 1 hervorgehenden Beziehung

$$D_b = G_b - G_o = {}^1/_{240}\, a\pi e^2 \cdot (\mathrm{Sv}\, 2\varphi_b - \mathrm{Sv}\, 2\varphi_o) = {}^1/_{120}\, a\pi e^2 d \qquad 2$$

in einem bestimmten Verhältnisse zu $GH = d$ stand, — und **anderseits** unterlagen die so erhaltenen Korrektionen FE für die einzelnen Grade, weil OF eine Schweraxe ist, der Bedingung $\Sigma FE = 0$, wie verlangt war. Blieb also nur noch übrig, die Richtung von OF oder ψ so zu wählen, dass die Summe der absoluten Werte der FE ein Minimum wurde: Um hiefür eine Grundlage zu erhalten, berechnete **Boscovich** die in die Tafel eingetragenen Werte

$$A = d - m \qquad B = D - M \qquad C = A : B \doteq \mathrm{Tg}\, \psi' \qquad 3$$

wobei er aus den C ersah, dass, wenn er die Gerade von Y aus in der Richtung des Pfeiles drehe, dieselbe die Punkte E in der Reihenfolge: 3, 9, 5, 1, 7, 8, 2, 6, 4 treffen werde. Wie die Gerade sich einem dieser Punkte nähert, wird die seinem A proportionale Korrektion des betreffenden Grades kleiner, — verschwindet in dem Augenblicke, wo die Gerade durch ihn geht, vollständig, — und nimmt dann wieder zu, wobei es für uns auf den Sinn nicht ankömmt. Es sind also die schon passierten Punkte als solche zu betrachten, welche mit einem ihrem A proportionalen Gewichte für Zunahme stimmen, und wenn daher die Summe ihrer A bis zur Hälfte der Summe aller A angewachsen ist, so wird die sich drehende Gerade die Lage erreicht haben, über die sie nicht mehr hinausgehen darf, wenn nicht die Zunahme Meister werden soll, — also diejenige Lage, welche dem verlangten Minimum entspricht. Da nun im vorliegenden Falle die Summe aller A auf $13467{,}4 = 2 \times 6733{,}7$ ansteigt und $A_3 + A_9 + A_5 = 4766{,}8 < 6733{,}7 < 9348{,}0 = A_3 + A_9 + A_5 + A_1$ ist, so wird, nachdem die Gerade den Punkt 5 passiert hat, noch Abnahme, — nachdem sie auch 1 passiert hat, dagegen bereits Zunahme überwiegen, — und man darf daher mit **Boscovich** annehmen, dass die Gerade wenigstens nahezu ihre günstigste Lage beim Treffen auf 1 erreicht hat, folglich wenn $\psi = \mathrm{Atg}\, 15{,}9 = 86^0\, 24'$ geworden ist. Man erhält somit für D (s. Fig.) die verbesserten Werte

$$D' = M + A \cdot \mathrm{Ct}\, \psi = 287{,}6 + A \cdot \mathrm{Ct}\, 86^0\, 24' \qquad 4$$

welche sich bereits in die Tafel eingetragen finden. Es ist somit die Summe der positiven Verbesserungen $D' - D$ gleich 251,7, die der negativen 251,0, also absolut genommen $\Sigma (D' - D) = 502{,}7$, während $\Sigma (D' - D)^2 = 50136{,}71$ wird. — So scharfsinnig im Ganzen das Verfahren von **Boscovich** ist, so lässt allerdings seine Erledigung der dritten Bedingung etwas zu wünschen übrig, und er hätte sich die Sache bedeutend erleichtern können, wenn er in derselben die absolute Summe der Korrektionen durch deren Quadratsumme ersetzt hätte; denn in diesem Falle hätte er aus

$$\Sigma EF^2 = \Sigma (A \cdot \mathrm{Ct}\, \psi - B)^2 = \mathrm{Ct}^2 \psi \cdot \Sigma A^2 - 2\, \mathrm{Ct}\, \psi\, \Sigma AB + \Sigma B^2$$

für das Minimum sofort in ganz lucider Weise

$$0 = \frac{d\,\Sigma\,EF^2}{d\psi} = -2\,Ct\,\psi \cdot \frac{1}{Si^2\,\psi} \cdot \Sigma\,A^2 + 2 \cdot \frac{1}{Si^2\,\psi} \cdot \Sigma\,AB$$

erhalten, und daraus

$$Tg\,\psi = \frac{\Sigma\,A^2}{\Sigma\,AB} = \frac{40\,778\,405}{2\,967\,274} = 13{,}74 = Atg\,85^0\,50' \qquad 5$$

berechnen können. Die Tafel enthält zur Vergleichung auch die nach der 4 entsprechenden Formel

$$D'' = 287{,}6 + A \cdot Ct\,85^0\,50' \qquad 6$$

bestimmten Werte. Die Summe der positiven $D'' - D$ beträgt 271,1, die der negativen 270,7, so dass absolut genommen $\Sigma\,(D'' - D) = 541{,}8$, während $\Sigma\,(D'' - D)^2 = 46142{,}20$ wird, — also erstere Zahl etwas grösser, letztere aber merklich kleiner als bei der frühern Rechnung. — Setzen wir in 423:7 den Equatorgrad 56750 für g und den dem Schwerpunkte entsprechenden Grad $g + M = 57037{,}6$ für G ein, sowie $s^2 = 0$ und $S^2 = 1/_9 \cdot \Sigma\,Si^2\,\varphi = m = 0{,}45812$, so erhalten wir die Abplattung

$$\alpha = M : 3\,m\,G = 1/_{237}$$

was ein für damalige Verhältnisse ganz respektabler Wert ist. — *d.* Anhangsweise mag noch der Schriften „Christ. **Mayer**, Basis palatina. Manhemii 1763 in 4., — und: J. **Michell**, Proposal of a method for measuring degrees of longitude upon parallels of the æquator (Ph. Tr. 1766)“ gedacht werden, — sowie endlich der auf 1790 von der Lyoner-Akademie (vgl. Journ. d. Sav. 1789) ausgeschriebenen, für damalige Zeit ziemlich müssigen, und wahrscheinlich (vgl. Lalande in Bibl. 613 und Notiz 424) aus ehrgeizigen Absichten durch den nachmals so berüchtigten Sardinier Jean-Paul Mara oder **Marat** (Boudry bei Neuenburg 1743 — Paris 1793, wo er durch Charlotte Corday beseitigt wurde; vgl. 426:d) veranlassten Preisaufgabe „Le système de l'aplatissement de la terre vers les pôles, est-il fondé sur des idées purement hypothétiques, ou peut-il être démontré rigoureusement?“, von deren Lösung jedoch nichts verlautet.

426. Die dem metrischen Systeme zu Grunde liegenden Messungen. — Als die französische Nationalversammlung 1790 beschloss, ein einheitliches, auf die Länge des Sekundenpendels gegründetes Mass- und Gewichtssystem einzuführen [a], dann aber im folgenden Jahre als Grundeinheit den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten festsetzte [b], erschien es notwendig, die Messungen im Meridian von Paris, unter Benutzung der seither vervollkommneten und kurz zuvor bei der zur Verbindung der Sternwarten von Paris und Greenwich ausgeführten Operation [c] bewährten Instrumente und Methoden, zu wiederholen, was dann auch unter der Leitung von **Méchain** und **Delambre** sofort begonnen, aber natürlich erst gegen Ende des Jahrhunderts zu einem gewissen Abschlusse gebracht wurde [d], so dass der bei Einführung des metrischen Systemes im Jahre 1795 provisorisch zu 443''',443 der Toise du Pérou festgesetzte **Meter** erst 1799 durch einen definitiven von 443''',296 ersetzt werden konnte [e]. Für die geodätischen Ergebnisse dieser Neumessung auf eine spätere Nummer (428) verweisend, bleibt noch beizufügen, dass

sie schon durch **Méchain** bis Barcelona, etwas später durch **Biot** und **Arago** bis zu den balearischen Inseln, und in der neuesten Zeit unter Leitung von **Perrier** sogar bis nach Algier fortgeführt wurde, während **James** und **Clarke** nach Norden die englische Gradmessung anschlossen, so dass nunmehr ein Bogen von vollen $28^1/_2{}^0$ vorliegen dürfte *f*.

Zu 426: *a.* Der Gedanke, die Länge des Sekundenpendels als Masseinheit einzuführen, war (vgl. Littrows W. d. H., 6. A., p. 43) schon 1661 durch Christoph **Wren** ausgesprochen, ferner bald darauf durch **Picard** bei seiner Gradmessung (vgl. 418) und durch den von **Huygens** (vgl. Horol. oscill. p. 7 und 146) als Dritteil des Sekundenpendels definierten „Pes horarius" sogar zu einer gewissen Verwirklichung gebracht worden, — ja noch **Bouguer** und **La Condamine** hatten für denselben plaidiert, wenn auch mit dem Unterschiede, dass ersterer die Länge des Sekundenpendels unter 45° Breite, letzterer diejenige am Equator benutzt wissen wollte. Es war daher gar nichts auffallendes, dass die französische Nationalversammlung, um die herrschende Verwirrung in Mass und Gewicht zu beseitigen, nach Antrag von Charles-Maurice de **Talleyrand** (Paris 1754 — ebenda 1838; früher Bischof von Autun, damals Präsident der Nationalversammlung, später Minister), 1790 V 8 beschloss (vgl. die „Collection des décrets rendus par l'assemblée nationale"), „de faire **déterminer,** à la latitude de 45°, ou toute autre latitude qui pourrait être préférée, **la longueur du pendule et en déduire un modèle invariable pour toutes les mesures et pour les poids**", und hiefür eine Verständigung mit England zu versuchen. Auch war es kaum ein Zufall, dass gerade damals **Borda** (vgl. Lalande, Bibl. 695) mit einem nach seinen Ideen durch **Lenoir** konstruierten 12-füssigen Pendel Versuche anstellte, welche ihm ergaben, dass im leeren Raume und bei 10° Wärme dem Sekundenpendel in Paris eine Länge von 36″ 8‴,60 zukomme. — *b.* Ein eigentliches Naturmass für Längen giebt es nicht (vgl. 54), und es geht auch dem Sekundenpendel diese Eigenschaft so gut ab als allen im Laufe der Zeiten in Anwendung gekommenen oder wenigstens vorgeschlagenen Längeneinheiten, wie z. B., um nur von leicht definierbaren Grössen zu sprechen, der frühe als $^1/_{15}$ oder $^1/_{60}$ des Equatorgrades eingeführten deutschen oder englischen **Meile,** der von Jacq. **Cassini** (vgl. dessen bereits erwähnte Schrift von 1720) **als geometrischer Fuss** proponierten Länge einer Hundertstels-Sekunde des Erdequators, etc., — von der durch Jacques **Babinet** (Lusignan 1794 — Paris 1872; Akad. Paris) befürworteten Länge einer Lichtwelle von circa $^1/_2$ Mikron, und der durch Joseph Anton **Berchtold** (Möril ob Brig 1780 — Sitten 1859; Domherr in Sitten) angepriesenen Länge eines Tagespendels von mehr als einer Million deutscher Meilen, nur ihrer Kuriosität wegen Notiz nehmend. Dagegen hat das Sekundenpendel den Vorzug, dass seine für uns als Einheit bequeme Länge leicht hergestellt, folglich auch mit andern üblichen Massen bequem verglichen werden kann, und es ist daher kaum zu begreifen, jedenfalls zu bedauern, dass die von der Pariser Akademie zu eingehender Prüfung niedergesetzte, aus **Borda, Lagrange, Laplace, Monge** und **Condorcet** bestehende Kommission dasselbe auf Antrag von **Laplace** aus dem futilen Grunde verwarf, dass die Masseinheit nicht von heterogenen Elementen wie Zeit und Schwere abhängen dürfe, und in ihrem „Mémoire sur le choix d'une unité de mesures (Mém. Par. 1788, ausgeg. 1791)" den 10-millionsten Teil des Meridianquadranten als Längeneinheit oder **Meter** vorschlug, — dass die Akademie

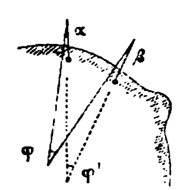
entgegen dem Antrage von Mathurin Jacques **Brissen** (Fontenay-le-Comte 1723 — Broissi bei Versailles 1806; Prof. phys. und Akad. Paris), das Sekundenpendel als halbe Toise einzuführen, diesen Vorschlag zu dem ihrigen machte, — und dass hierauf die Nationalversammlung 1791 III 16 ihr früheres Dekret in entsprechendem Sinne abänderte. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass **Laplace** bei seinem Antrage den Hintergedanken hatte, dadurch eine Neumessung im Meridiane von Paris zu veranlassen, und es wurde dann auch wirklich in derselben Sitzung die Akademie beauftragt, eine solche sofort anzuordnen, ja ihr zu diesem Zwecke 1791 VIII 8 ein erster Kredit von 100000 Livres eröffnet. — *c.* Zu Anfang der Achzigerjahre des vorigen Jahrhunderts wusste nämlich **Cassini** de Thury sowohl die Pariser Akademie als den König von England von der Wünschbarkeit zu überzeugen, die gegenseitige Lage der beiden Sternwarten von Paris und Greenwich möglichst genau zu bestimmen und dadurch die schöne Arbeit zu provozieren, welche einige Jahre später durch die französischen und englischen Geodäten gemeinschaftlich ausgeführt und in den Schriften „William **Roy** (Schottland 1710? — London 1790; Generalmajor), An account of the trigonometrical operations whereby the distance between the meridians of the roy. observatories of Greenwich and Paris has been determined (Ph. Tr. 1790), — und: J. Dom. **Cassini**, Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich, par M. M. Cassini, Méchain et Legendre. Paris 1791 in 4." einlässlich beschrieben wurde. Ich beschränke mich darauf anzuführen, dass die drei soeben genannten Akademiker das französische Dreiecksnetz bis an die Westküste fortführten, wobei der nach **Borda** benannte Kreis und die durch **Legendre** verbesserten Rechnungsmethoden zum ersten Male zur Verwendung kamen, — dass General **Roy**, welchem Sir Charles **Blagden** (1748 — Arcenil 1820; engl. Militärarzt) zur Hilfe beigeordnet war und ein durch Ramsden eigens zu diesem Zwecke konstruierter grosser Theodolit zur Verfügung stand, entsprechend Greenwich trigonometrisch mit der englischen Ostküste verband, — dass die Überbrückung des Kanales gemeinschaftlich ausgeführt wurde, wobei während 17 Tagen abwechselnd jede Partie der andern ihre Aufstellungspunkte mittelst „réverbères et de nouveaux feux indiens" zu verabredeten Stunden sichtbar machte, — und dass sich schliesslich als Hauptresultat für die Längendifferenz Greenwich-Paris der nach den neuesten Bestimmungen nur um $\frac{1}{2}^s$ zu kleine Wert $9^m\ 20\frac{1}{2}^s$ ergab. — *d.* Für diese Messung, in welche sich **Méchain**, der den schon früher bei der trigonometrischen Verbindung von Korsika und Toskana bethätigten **Tranchot** zum Hauptgehilfen hatte, und **Delambre**, der namentlich durch Mich. **Lefrançais** sekundiert wurde, so teilten, dass ersterer zunächst die südlichen und letzterer die nördlichen Partien in Angriff nahm, mag es um so eher genügen, auf das grosse Werk „Base du système métrique décimal ou Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone. Paris 1806—10, 3 Vol. in 4." zu verweisen, als schon früher (327, 347, 367, etc.) das wichtigste über die angewandten Instrumente und Methoden beigebracht wurde, die Hauptresultate aber ohnehin später (428) mitzuteilen sein werden. — *e.* Es dauerte begreiflicherweise bis 1800, ehe **Méchain** und **Delambre** sich durch mehr als 100 Dreiecke durchgearbeitet, sowie die Grundlinien bei Melun und Perpignan gemessen hatten, zumal sie (wenn auch nur ein kleiner Teil des von Fonvielle in seiner Novelle „La mesure du mètre. Paris 1886 in 8." Erzählten auf Wahrheit beruht) unter der misstrauischen und durch den nichtswürdigen **Marat**

in seinem sog. „Ami du peuple" noch speciell gegen sie aufgewiegelten Bevölkerung unter vielen Hindernissen, ja mehrmals mit Todesgefahr, zu arbeiten hatten, — und so weit ging die Geduld der Revolutionsmänner nicht: Schon 1795 IV 7 beschloss der Konvent auf Antrag von Claude Antoine **Prieur** (Auxonne 1763 — Dijon 1832; Genieoffizier), sofort den Zehnmillionstel des Erdquadranten unter dem Namen **Mètre** (Meter = 1^m à 10^{dm} à 10^{cm} à 10^{mm}; Mikron = μ = $0{,}001^{mm}$; Kilometer = 1^{km} = 1000^m) als Längeneinheit zu proklamieren, — die **Are** (Are = 1^a = 100^{qm}; Hektare = 1^{ha} = 100^a) als Flächeneinheit, — den **Stère** (Ster = 1st = 1^{cm}) als Volumeneinheit, — den **Litre** (Liter = 1^l = 1^{cdm}; Hektoliter = 100^l) als Flüssigkeitsmass, — das **Gramme** (Gramm = 1^g = Gewicht von $1^{c.cm}$ reinen Wassers bei seiner grössten Dichte; Kilogramm = 1^{kl} = 1000^g; Metercentner = 1^q = 100^{kl}; Tonne = 1^t = 100^q) als Gewichtseinheit, — und den **Franc** (Franken = $4{,}5^g$ Silber + $0{,}5^g$ Kupfer = 100 Centimes) als Münzeinheit. Provisorisch wurde der Meter zu 443''',443 der Toise du Pérou bei 13° R. angenommen und sodann, nachdem eine internationale Kommission, bei der z. B. Helvetien durch **Tralles**, Cisalpinien durch Lorenzo **Mascheroni** (Castagnetto bei Bergamo 1750 — Paris 1800; Prof. math. Pavia) und Batavien durch van **Swinden** vertreten war, die Grundlagen des Gesetzes nochmals durchberaten hatte, definitiv zu 443''',296 festgesetzt. Das betreffende Dekret datiert von 1799 IV 24 und zugleich wurde **Lenoir** beauftragt, zwei Normalmeter in Platin auszuführen (denjenigen der Archive und denjenigen des Observatoriums), sowie eine Art Komparator, um Kopien derselben möglichst genau vergleichen zu können. Für weitern Detail über diese letztern Arbeiten kann auf „Ch. **Wolf**, Recherches historiques sur les étalons de poids et mesures de l'observatoire et les appareils qui ont servi à les construire. Paris 1882 in 4." verwiesen werden; dagegen bleibt noch anzuführen, dass schon **Delambre** (vgl. Base III 140) den Meter auf 443''',328 erhöhen oder dann die Bestimmung treffen wollte, dass der acceptierte Meter seiner Definition bei 8°,445 C. entspreche, und dass später (vgl. 428) **Bessel** fand, der Meter sollte nach seiner Definition 443''',334 halten. — Anhangsweise mag ferner erwähnt werden, dass die Ausgrabungen in Ninive beweisen sollen, dass die Assyrer oder Babylonier schon vor circa 2½ Tausend Jahren eine Art metrisches System hatten: Ihre Grundmasse waren die Länge vom Ellbogen bis an die Fingerspitzen (Coudée = 1^c; Stadium = 360^c) und ein dazu im Verhältnis von 3:5 stehender Fuss; Quadratfuss und Kubikfuss waren die Einheiten für Flächen- und Körpermasse; ein Kubikfuss Wasser war die Gewichtseinheit, welche „Talent" hiess; die Einteilung war durchweg sexagesimal, wie sie jetzt noch bei Zeit und Kreis gebräuchlich ist. Es besass also schon dieses alte System annähernd die schöne Gliederung, der das neue metrische System **ausschliesslich** verdankt, dass es nach und nach auch in den meisten andern Kulturstaaten eingeführt wurde und in der Wissenschaft jetzt fast ausnahmslos benutzt wird. — *f.* Glücklicherweise hatten die französischen Messungen trotz der etwas voreiligen Dekretierung des Meters ihren ungestörten Fortgang, indem nicht nur nach dem Wunsche von **Méchain** noch eine Fortsetzung bis Formentera auf den Balearen beschlossen und nach dessen Tode, wie aus dem „Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques. Paris 1821 in 4. (auch als Vol. IV der „Base" zu betrachten)" hervorgeht, von 1806 bis 1808 durch **Biot** und **Arago** wirklich durchgeführt wurde, sondern von 1869 hinweg, unter Leitung von General François **Perrier** (Vallerange in Gard 1834 — Montpellier 1888) und Kommandant **Bassot**, teils eine Revision der

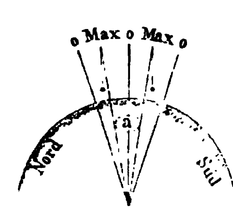
„Méridienne de Delambre et Méchain" zur Ausführung kam, teils das mittelländische Meer überbrückt, und durch die in Algier gemessene „Méridienne de Laghouat" eine neue Fortsetzung erzielt wurde, so dass nun mit Einbezug der englischen Messung ein ununterbrochener Bogen von $28\frac{1}{2}^0$ vorliegt, welcher von der Nordspitze Schottlands bis an die Sahara reicht.

427. Einige andere Gradmessungen der Neuzeit. — Ausser den bereits erwähnten Ergänzungs- und Revisions-Arbeiten wurden im gegenwärtigen Jahrhundert noch mehrere grosse Operationen durchgeführt, wie namentlich zwei ausgedehnte, fast ganz Europa durchschneidende Längengradmessungen im 45. und 52. Parallel [a], und zwei grosse Breitengradmessungen in Russland und Ostindien [b], — an welche sich sodann, abgesehen von den (434) in allerneuester Zeit zu Gunsten der Geodäsie in Angriff genommenen oder projektierten Arbeiten, noch einige kleinere, aber ebenfalls sehr wertvolle Messungen anschlossen [c]. Die Ergebnisse dieser unblutigen Feldzüge werden uns schon unter der nächstfolgenden Nummer, und später noch wiederholt, beschäftigen.

Zu 427: *a.* Schon 1790 hatte Marc-Auguste **Pictet** der Roy. Society in seinen „Considerations on the convenience of measuring an arch of the meridian, and of the parallel of longitude, having the observatory of Geneva for their common intersection (Ph. Tr. 1791)" einen detaillierten, durch eine Karte mit Dreiecksnetz veranschaulichten Plan für eine Doppel-Gradmessung vorgelegt, der damals allerdings wegen der Ungunst der Zeiten nicht zur Ausführung kam, aber als Vorläufer der erwähnten spätern Arbeiten im 45. Parallel nicht übersehen werden darf. Letztere wurden allerdings zunächst durch **Laplace** veranlasst, der aus gewissen Anomalien in den Delambre'schen Messungsergebnissen und sie bestätigenden Resultaten der 1808 durch **Biot** im Auftrage des Bureau des longitudes im 45. Parallel ausgeführten Schwerebestimmungen (432) auf Abweichungen der Erdgestalt von einem regelmässig geschichteten Rotationsellipsoide schliessen musste, indem auf seinen Wunsch 1811 beschlossen wurde, das als Grundlage einer neuen Karte von Frankreich benötigte Netz nicht nur an den alten Meridian von Paris, sondern auch an den 45. Parallel anzulehnen, und die Triangulation längs des letztern sofort in zwei Sektionen beginnen zu lassen: Die westliche Sektion (Bordeaux-Genf) führte mit verschiedenen durch die Kriege veranlassten Unterbrechungen Oberst **Brousseau** bis 1820 aus, — die östliche Sektion (Genf-Fiume), welche Oberst Maurice **Henry** (Sauvigny 1763 — Paris? 1825; successive Lazarist, Obs. Mannheim und Petersburg, Ingénieur-géographe) begonnen hatte, wurde nach dem Frieden durch östreichische und sardinische Generalstabsoffiziere unter Zuzug der Astronomen **Carlini** und **Plana** bis 1823 zu Ende geführt, — und schliesslich mass **Biot** 1824/5 auch noch in Mailand, Padua und Fiume die Intensität der Schwere. — Für den Detail dieser Operationen auf die schon früher (406 : b und 426 : f) erwähnten Schriften verweisend, mag es hier genügen, im allgemeinen zu erwähnen, dass sie die Vermutungen von **Laplace** bestätigten, und speciell ein uns im Hinblicke auf 222, 371 und 423—24 besonders interessierendes Ergebnis derselben hervorzuheben: Für einen auf



der Südseite der Alpen bestimmten Meridiangrad erhielten nämlich **Carlini** und **Plana** 57687', während jener Breite nach den übrigen Gradmessungen nur eine Gradlänge von 57013' zukommen sollte; es war dies offenbar eine Folge der gegen die Alpen hin merklich zunehmenden Ablenkung des Lotes, welche statt φ nur $\varphi' = \varphi - (\beta - \alpha)$ ergab, folglich, beim Teilen der Distanz durch eine zu kleine Grösse, einen zu grossen Grad, — und zwar erklärt, da der Unterschied 57687 — 57013 = 674' etwa einem Winkelunterschiede von 42",5 entspricht, die Annahme $\beta - \alpha = 42'',5$ die ganze Anomalie. — Verwandte merkwürdige Thatsachen veröffentlichte Gottfried **Schweizer** (Wyla bei Zürich 1816 — Moskau 1873; Prof. astr. und Dir. Moskau; vgl. Mitth. 40 von 1876) in seinen „Untersuchungen über die in der Nähe von Moskau stattfindende Lokal-Attraktion (Bull. Moscou 1863—64)“: Er fand nämlich, dass die astronomisch bestimmte Equatorhöhe in Moskau um 10" grösser sei als die geodätisch (431) auf verschiedenen Wegen übereinstimmend erhaltene, — dass die Abweichung nach N. abnehme, bis sie in etwa 20$^{kil.}$ verschwinde, — dass sie auch nach S abnehme, in 12$^{kil.}$ ebenfalls verschwinde, dann aber in entgegengesetztem Sinne wieder zunehme, bis sie nach weitern 12$^{kil.}$ auf 8" gestiegen sei, und endlich nach circa neuen 20$^{kil.}$ ganz erlösche; eine ähnliche, nur etwas schwächere Erscheinung zeigte sich unter östlichen und westlichen Meridianen, und das Ganze schien darauf hinzudeuten, dass sich bei a eine von W nach E streichende Höhlung von etwa 1½ Kubikmeilen unter der Erde befinde. Die neueste Zeit hat noch mehrere andere in dieses Gebiet gehörende merkwürdige Thatsachen nachgewiesen, wie z. B. die auffallend geringe Lotablenkung durch das mächtige Himálaya-Gebirge, — und die alsbald (434) zu erwähnenden Arbeiten der Gegenwart dürften denselben binnen kurzem noch manche weitere beifügen. — Während auf die frühern Messungen im Parallel die Unsicherheit der Längenvergleichungen notwendig sehr störend einwirkte, und wohl zunächst aus diesem Grunde die im ersten Viertel unsers Jahrhunderts durch **Henry** und den jüngern **Bonne** im Parallel von Paris unternommene Messung von Brest nach Strassburg unbefriedigend ausfiel, so existiert diese Schwierigkeit gegenwärtig nicht mehr, und man darf daher in der nächsten Zeit von der Wiederaufnahme jener französischen Messung und ihrer Verlängerung nach Wien, namentlich aber von der grossartigen, nunmehr ziemlich beendigten, ganz Europa längs des 52. Parallels in einer Ausdehnung von 68½° durchziehenden Längengradmessung, zu welcher W. **Struve** 1857 den Plan entwarf, während sich Russland, Preussen, Belgien, Frankreich und England unter Verwendung aller modernen Hilfsmittel beteiligten, die sichersten und wichtigsten Aufschlüsse erwarten. — *b.* Nachdem schon ein früherer Gehilfe von Maskelyne, Reuben **Burrow** (Hoberley in Yorkshire 1747 — Buxor in Ostindien 1792; Prof. math. bei der engl.-ostind. Komp.), einige Messungen vorgenommen, für welche auf „Isaac **Dalby** (Gloucestershire 1744 — Farnham 1824; Gehilfe von General Roy und später Prof. math. Marlow), Account of the late Mr. Reuben Burrow measurement of a degree of longitude and another of latitude near the tropic in Bengal. London 1796 in 4.“ verwiesen werden kann, begann William **Lambton** (1748? — Kingin-Ghaut in Indien 1823; Oberst) aus eigener Initiative und fast ohne Unterstützung 1801



an der Küste von Coromandel die Arbeit, welche sodann von 1818 hinweg als sog. zweite ostindische Gradmessung (vgl. Tab. in 428) auf Staatskosten erst unter seiner, dann unter der Leitung seines frühern Gehilfen George **Everest** (Wales 1790 — London 1866; Oberst) fortgeführt und in den Schriften „**Lambton**, An abstract of the results deduced from the measurement of an arc of the meridian extending from latitude 8° 10' to 18° 3' (Ph. Tr. 1818, 1823), — und: **Everest**, An account of the measurement of an arc of the meridian between 18° 3' and 24° 7'. London 1830 in 4., sowie: An account of the measurement of two sections of the meridional arc of India. London 1847, 2 Vol. in 4." behandelt wurde, ja noch seither durch Andrew **Waugh** und J. T. **Walker** bis auf volle 26 Meridiangrade ausgedehnt worden sein soll. — Für den Detail der fast ebenso ausgedehnten, in der erwähnten Tabelle ebenfalls teilweise vertretenen, auf 10 Basen und 258 Dreiecken beruhenden, unter der Oberleitung von W. **Struve** ausgeführten russischen Gradmessung verweise ich auf dessen Werke: „Beschreibung der Breitengradmessung in den Ostsee-Provinzen Russlands. Dorpat 1831, 2 Bde. in 4., — und: Arc du méridien de 25° 20' entre le Danube et la mer glaciale, mesuré depuis 1816 jusqu'en 1855 sous la direction de C. de Tenner, Chr. Hansteen, N. H. Selander et F. G. W. Struve. St-Petersbourg 1860, 2 Vol. in 4." — *c.* Ich verweise für dieselben teils auf die mehrerwähnte Tafel, teils auf die Schriften „William **Mudge** (Plymouth 1762 — London 1820; Generalmajor), An account of the operation for accomplishing the trigonometrical survey of England. London 1799—1811, 4 Vol. in 4., und: Account of the measurements of an arc of the meridian from Dunnos to Clifton (Ph. Tr. 1803, 1812), — **Schumacher**, Mesure de degrés en Danemark (Corr. astr. 1 von 1818, und später), — **Gauss**, Nachricht von der Hannover'schen Gradmessung (A. N. 7 und 24 von 1822, Berl. Jahrb. auf 1826), und: Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona. Göttingen 1828 in 4., — F. W. **Bessel** und J. **Baeyer**, Gradmessung in Ostpreussen. Berlin 1838 in 4., — Sir Henry **James** (1803—77; Director General of the Ordnance Survey) and A. R. **Clarke**, Account of the observations and calculations of the principal triangulation and of the figure, dimension and mean specific gravity of the earth as derived there from. London 1858 in 4., und: Extension of the triangulation of the ordnance survey into France and Belgium, with the measurement of an arc of parallel in latitude 52° N. from Valentia in Ireland to mount Kemmel in Belgium. London 1863 in 4., — etc."

428. Die Berechnung der Grösse und Gestalt der Erde. — Entsprechend wie sich die Gradmessungen mehrten, entstand je auch wieder der Wunsch, die ihrer Gesamtheit möglichst entsprechende Grösse und Gestalt der Erde zu kennen, und so wurden im gegenwärtigen Jahrhundert wiederholt ähnliche Rechnungsarbeiten vorgenommen, wie solche (425) schon im vorigen durch **Boscovich** angestellt worden waren [a], und namentlich führte **Bessel** 1837—41 eine betreffende Musterarbeit aus, deren Hauptergebnisse darin bestanden, dass den sämtlichen damals bekannten Messungsergebnissen ein Rotationsellipsoid der Halbaxen

$$\mathfrak{a} = 3\,272077^t{,}14 = \overline{6{,}804\,6435}^m \qquad \mathfrak{b} = 3\,261139^t{,}33 = \overline{6{,}803\,1893}^m \quad \mathbf{1}$$

und somit der Abplattung $\alpha = 1 : 299{,}15$ sehr nahe genüge, folg-

lich, wenn v die geocentrische Breite eines Ortes der Polhöhe φ bezeichne und ϱ das Verhältnis seines Abstandes vom Erdmittelpunkte zu dem Radius des Equators sei,

$$v = \varphi - 11' 30'',65 \cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi + 1'',16 \cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi - \ldots$$
$$\mathrm{Lg}\, \varrho = \bar{9},999\,2747 + 0,000\,7215 \cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi - 0,000\,0018 \cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi + \ldots \qquad 2$$

gesetzt werden könne [b]. Trotz der seither unter Zuzug weiterer Daten ausgeführten Neuberechnungen [c] wird noch gegenwärtig meistens dieses Bessel'sche Ellipsoid als Ausgangspunkt für geodätische Untersuchungen benutzt [d].

Zu 428: *a.* Vgl. „Henric Johan **Walbeck** (Abo 1793 — ebenda 1822; Obs. Abo), Dissertatio de forma et magnitudine telluris ex dimensionis arcubus meridiani definiendis. Aboæ 1819 in 4., — G. B. **Airy**, On the figure of the earth (gelesen 1826, gedr. Cambr. Ph. Tr. 1827; auch in dessen Mathematical tracts und zwar 3. ed. 1842 pag. 123—84), — Ed. **Schmidt**, Lehrbuch der mathematischen und physischen Geographie. Göttingen 1829—30, 2 Th. in 8. (I 183—202; auch A. N. 438 von 1837), — etc." Es erhielten

	Walbeck	Airy	Schmidt
a	3 271819',5	3 272109',4	3 271852',3
b	3 261012,8	3 261177,8	3 260853,7
α	1/302,78	1/298,32	1/297,48

— *b.* Der von **Bessel** eingeschlagene Weg war (vgl. A. N. 333—34 von 1837 und 438 von 1841) wesentlich folgender: Bezeichnet s' die Länge des vom Scheitel der grossen Axe bis zu einem Punkte der Breite φ' führenden Ellipsenbogens und g den mittlern Wert eines Breitengrades, so hat man nach 75 : 3, 4

$$s' = a(1-e^2)\cdot E\cdot(\varphi' - A\cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi' + B\cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi' - \ldots), \quad g = a(1-e^2)\cdot E\cdot \pi : 180 \qquad 3$$

wo zur Abkürzung

$$E = 1 + {}^3/_4\, e^2 + {}^{45}/_{64}\, e^3 + \ldots, \quad A\cdot E = {}^3/_8\, e^2 + {}^{15}/_{32}\, e^4 + \ldots, \quad B E = {}^{15}/_{256}\, e^4 + \ldots \qquad 4$$

und somit

$$A = {}^3/_8\, e^2 + {}^3/_{16}\, e^4 + \ldots \qquad B = {}^{15}/_{264}\, e^4 + \ldots \simeq {}^5/_{12}\, A^2 \qquad 5$$

oder auch nach 37 : 4

$$e^2 = {}^8/_3\, A - {}^{32}/_9\, A^3 + \ldots \qquad 6$$

Entsprechend hat man für einen Punkt der Breite φ''

$$s'' = a(1-e^2)\cdot E\cdot(\varphi'' - A\cdot \mathrm{Si}\, 2\varphi'' + B\cdot \mathrm{Si}\, 4\varphi'' - \ldots) \qquad 7$$

und daher, wenn man $\varphi'' + \varphi' = 2\varphi$ und $\varphi'' - \varphi' = \triangle\varphi$ setzt, beidseitig mit $180\cdot 60\cdot 60 : \pi = 1 : \mathrm{Si}\, 1''$ multipliziert, $\triangle\varphi$ in Sekunden ausdrückt, sowie schliesslich die höhern Glieder weglässt,

$$\frac{3600}{g}\cdot(s'' - s') = \triangle\varphi - \frac{2A}{\mathrm{Si}\, 1''}\cdot \mathrm{Si}\,\triangle\varphi\cdot \mathrm{Co}\, 2\varphi + \frac{5A^2}{6\,\mathrm{Si}\, 1''}\cdot \mathrm{Si}\, 2\triangle\varphi\cdot \mathrm{Co}\, 4\varphi \qquad 8$$

Hat man nun eine Reihe von Gradmessungen und schreibt 8 für jede derselben auf, dabei

$$g = g_0 : (1 + i) \qquad \text{und} \qquad A = A_0\,(1 + k) \qquad 9$$

setzend, wo g_0 und A_0 vorläufige Annahmen für g und A sind, so kann man aus jeden zwei derselben ein Wertepaar für i und k berechnen; aber die verschiedenen Paare werden wegen den Fehlern der ihnen zu Grunde liegenden Daten nicht genau übereinstimmen, und da diese Fehler bei den Polhöhen infolge der Lotablenkungen, etc., einen ganz erheblichen Betrag erreichen können,

Station	Polhöhe Beobachtet	Polhöhe Korrekt.	Länge des Bogens Gemessen	Länge des Bogens Korrekt.
	1. Peruanische Gradmessung.			
Tarqui	— 3° 4′ 32″,068	— 0″,606		
Cotchesqui . . .	0 2 31,387	0,606	176875ᵗ,50	— 0ᵗ,020
	2. Erste ostindische Gradmessung.			
Trivandeporum .	11° 44′ 52″,590	— 0″,271		
Paudree . . .	13 19 49,018	0,271	89813ᵗ,01	— 0ᵗ,011
	3. Zweite ostindische Gradmessung.			
Punnæ	8° 9′ 31″,132	— 1″,470		
Putchapollian .	10 59 42,276	— 1,712	160944ᵗ,20	0ᵗ,002
Dodagoontah .	12 59 52,165	4,016	274694,30	0,005
Namthabad . .	15 5 53,526	— 1,447	393828,09	— 0,018
Daumeragidda .	18 3 16,245	— 0,065	561690,06	— 0,023
Takal k'hera .	21 5 51,532	3,537	734570,43	— 0,003
Kulliampoor . .	24 7 11,860	— 2,859	906171,67	— 0,057
	4. Hannover'sche Gradmessung.			
Göttingen . . .	51° 31′ 47″,85	— 2″,493		
Altona	53 32 45,27	2,493	115163ᵗ,725	— 0ᵗ,012
	5. Dänische Gradmessung.			
Lauenburg . .	53° 22′ 17″,046	0″,451		
Lyssabel . . .	54 54 10,352	— 0,451	87436ᵗ,538	— 0ᵗ,001
	6. Preussische Gradmessung.			
Trunz	54° 13′ 11″,466	— 0″,907		
Königsberg . .	54 42 50,500	— 1,448	28211ᵗ,629	0ᵗ,006
Memel	55 43 40,446	2,355	86176,975	0,017

während diejenigen der trigonometrisch bestimmten Distanzen, zumal ein Meter noch nicht $^1/_{30}{}''$ ausmacht, bei irgend sorgfältiger Bestimmung kaum in Betracht fallen, so wird es am besten sein, die $\triangle\varphi$ in $\triangle\varphi + x$ übergehen zu lassen und sodann die i und k so zu bestimmen, dass $\sum x^2$ ein Minimum wird. Unter diesen Annahmen geht aber 8, wenn man die Produkte und zweiten Potenzen der kleinen Grössen i, k, x, sowie den Einfluss von x auf φ vernachlässigt, in über, wo

$$x = a \cdot i + b \cdot k + n \qquad \textbf{10}$$

$$a = \frac{3600}{\varrho \cdot g_0}(s'' - s') \qquad b = \frac{2}{\varrho \cdot \text{Si}\, 1''}(A_0 \cdot \text{Si}\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 2\varphi - \frac{5}{6} A_0^2 \cdot \text{Si}\, 2\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 4\varphi)$$

$$n = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{3600}{g_0}(s'' - s') - 1\right] + \frac{2}{\varrho\, \text{Si}\, 1''}(A_0 \cdot \text{Si}\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 2\varphi - \frac{5}{12} A_0^2 \cdot \text{Si}\, 2\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 4\varphi) \qquad \textbf{11}$$

$$\varrho = 1 - 2 A_0 \cdot \text{Co}\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 2\varphi + {}^5/_3 A_0^2 \cdot \text{Co}\, 2\triangle\varphi \cdot \text{Co}\, 4\varphi$$

ist, und man hat daher zur Bestimmung der besten Werte von i und k nach 52

$$i \cdot \sum a^2 + k \cdot \sum a \cdot b + \sum a \cdot n = 0 \qquad i \cdot \sum a \cdot b + k \cdot \sum b^2 + \sum b \cdot n = 0 \qquad \textbf{12}$$

und kann sodann successive nach 9 die g und A, nach 6 und 4 die e und E, nach 3 endlich $\mathfrak{a}$ berechnen, woraus sodann nach 74 : 2 leicht auch $\mathfrak{b}$ und α

Station	Polhöhe Beobachtet	Polhöhe Korrekt.	Länge des Bogens Gemessen	Länge des Bogens Korrekt.
	7. Französische Gradmessung.			
Formentera . .	38° 39′ 56″,11	0″,955		
Montjouy . . .	41 21 44,96	4,115	153673ᵗ,61	0ᵗ,026
Barcelona . .	41 22 47,90	0,764	154616,74	— 0,002
Carcasonne . .	43 12 54,30	— 0,433	259172,61	0,002
Evaux	46 10 42,54	— 6,447	428019,31	— 0,066
Panthéon . . .	48 50 49,37	— 1,099	580312,41	0,005
Dünkirchen . .	51 2 8,85	2,144	705257,21	0,047
	8. Englische Gradmessung.			
Dunnose . . .	50° 37′ 7″,633	— 1″,816		
Greenwich . .	51 28 39,000	1,396	49059ᵗ,89	— 0ᵗ,012
Blenheim . . .	51 50 27,632	2,705	69829,19	0,001
Arburyhill . .	52 13 28,031	1,395	91696,39	— 0,144
Clifton	53 27 31,130	— 3,679	162075,93	— 0,012
	9. Russische Gradmessung.			
Belin	52° 2′ 40″,864	— 1″,732		
Nemesch . . .	54 39 4,519	— 2,384	148811ᵗ,418	— 0ᵗ,011
Jacobstadt . .	56 30 4,562	1,826	254543,454	— 0,014
Bristen . . .	56 34 51,550	2,627	259110,085	0,004
Dorpat . . .	58 22 47,280	— 1,044	361824,461	— 0,019
Hochland . . .	60 5 9,771	0,707	459363,008	— 0,013
	10. Schwedische Gradmessung.			
Malörn	65° 31′ 30″,265	0″,560		
Pahtawara . .	67 8 49,830	— 0,560	92777ᵗ,981	— 0ᵗ,024

abgeleitet werden können. — Wählen wir z. B. aus den 1837 von **Bessel** benutzten, oben nach ihren einzelnen Sektionen verzeichneten 10 Gradmessungen die Nummern 1, 2, 6 und 10 aus, welchen der Reihe nach die Gradlängen 56734ᵗ.05, 56759ᵗ.55, 57144ᵗ.64 und 57196ᵗ.11 entsprechen, und nehmen $g_0 = 57000^t$ und $A_0 = {}^1/_{400}$ an, so erhalten wir nach 10 und 11 die 4 Gleichungen

$$x_1 = 11227 \cdot i + 56,059 \cdot k + 3,7$$
$$x_2 = 5698 \cdot i + 25,835 \cdot k + 1,8$$
$$x_3 = 5433 \cdot i - 9,157 \cdot k + 4,5 \qquad \mathbf{13}$$
$$x_4 = 5840 \cdot i - 19,711 \cdot k + 0,3$$

und aus diesen nach 12 die Normalgleichungen

$$22214 \cdot i + 61,171 \cdot k + 7,7996 = 0 \qquad 61171 \cdot i + 428,244 \cdot k + 20,6802 = 0$$

welche $i = -0,0003\,5957$ und $k = 0,003\,0237$ ergeben, folglich nach 13

$$x_1 = -0'',2 \qquad x_2 = -0'',1 \qquad x_3 = 2'',5 \qquad x_4 = -1'',8 \qquad \mathbf{14}$$

und sodann in oben angegebener Weise

$$g = 57020^t,51 \qquad A = 0,0025\,0756 \qquad e^2 = 0,0066\,6453$$
$$E = 1,0050\,2966 \qquad \mathfrak{a} = 3\,272\,493^t \qquad \mathfrak{b} = 3\,261\,571^t \qquad \alpha = 1/299 \cdot 60 \qquad \mathbf{15}$$

Bessel selbst erhielt, indem er für jede der 38 Sektionen eine den 13 ent-

sprechende Gleichung aufstellte, die oben angegebenen Werte und durch Rückwärtsrechnung die in vorstehende Tafel eingetragenen kleinen Korrektionen, welche die Polhöhen und Bogenlängen erfordern, um mit jenem Ellipsoide übereinzustimmen, somit den Beweis leisten, dass letzteres der wirklichen Gestalt der Erde sehr nahe kömmt. Als sodann **Encke** (vgl. Berl. Jahrb. 1852) die Bessel'schen Bestimmungen auch noch an der revidierten Gradmessung am Kap (vgl. 424) prüfte, fand er, dass auch diese sich durch dieselben ganz schön darstellen lasse, sofern man an den Polhöhen eine etwa 5″ betragende, durch die Nähe des Tafelberges erklärliche Korrektion anbringe, und dass somit die von manchen vermutete Ungleichheit der beiden Hemisphären unbegründet zu sein scheine. — Bezeichnen ϱ und v die geocentrischen Polarcoordinaten eines, durch die einem gegebenen Momente entsprechende Sternzeit t nach seinem Meridiane definierten Punktes der Polhöhe φ, und setzt man

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \overline{7{,}2238034} \qquad m = \frac{2n}{1+n^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \overline{7{,}5248346} \qquad \mathbf{16}$$

folglich

$$b = a\cdot\frac{1-n}{1+n}, \quad a^2-b^2 = \frac{4a^2 n}{(1+n)^2}, \quad e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{4n}{(1+n)^2}, \quad 1-e^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \qquad \mathbf{17}$$

so ergeben sich nach 74 : 16, 17 für $a = 1$

$$\mathrm{Tg}\, v = b^2\cdot \mathrm{Tg}\,\varphi = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \cdot \mathrm{Tg}\,\varphi$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mathrm{Co}\,\varphi}{\mathrm{Co}\,v\cdot \mathrm{Co}\,(\varphi - v)}} = \frac{1+n^2}{1+n}\cdot\sqrt{\frac{1+2m\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi + m^2}{1+2n\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi + n^2}} \qquad \mathbf{18}$$

und überdies nach 74 : 7, 9

$$N = \frac{1}{\sqrt{1-e^2 \mathrm{Si}^2\varphi}} = \frac{1+n}{\sqrt{1+2n\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi+n^2}}, \quad R = (1-e^2)\cdot N^3 = \frac{(1-n)^2\cdot(1+n)}{(1+2n\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi+n^2)^{3/2}} \qquad \mathbf{19}$$

wo N und R Conormale und Krümmungsradius bezeichnen, — woraus mit Hilfe von 41 : 21, 22, 28 die bequemen, zum Teil schon oben gegebenen Reihen

$$\begin{aligned} v &= \varphi - m\cdot \mathrm{Si}\,2\varphi + \tfrac{1}{2} m^2\cdot \mathrm{Si}\,4\varphi - \ldots \\ &= \varphi - 11'\,30'',65\cdot \mathrm{Si}\,2\varphi + 1'',16\cdot \mathrm{Si}\,4\varphi - \ldots \\ \mathrm{Lg}\,\varrho &= \mathrm{Lg}\,(1+n^2) - \mathrm{Lg}\,(1+n) + M\,[(m-n)\,\mathrm{Co}\,2\varphi - \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\,\mathrm{Co}\,4\varphi + \ldots] \\ &= 9{,}999\,2747 + 0{,}000\,7215\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi - 0{,}000\,0018\cdot \mathrm{Co}\,4\varphi + \ldots \\ \mathrm{Lg}\,R &= \mathrm{Lg}\,(1-n^2) + \mathrm{Lg}\,(1+n) - 3M\,[n\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi - \tfrac{1}{2} n^2\cdot \mathrm{Co}\,4\varphi + \ldots] \\ &= 9{,}999\,2711 - 0{,}002\,1813\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi + 0{,}000\,0018\cdot \mathrm{Co}\,4\varphi - \ldots \\ \mathrm{Lg}\,N &= \mathrm{Lg}\,(1+n) - M\,[n\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi - \tfrac{1}{2} n^2\cdot \mathrm{Co}\,4\varphi + \ldots] \\ &= 0{,}000\,7265 - 0{,}000\,7271\cdot \mathrm{Co}\,2\varphi + 0{,}000\,0006\cdot \mathrm{Co}\,4\varphi - \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{20}$$

hervorgehen, wo $M = 0{,}434\,2945$ den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet. Sie ergeben z. B. für Zürich mit $\varphi = 47^0\,22'\,40''$

$$\varphi - v = 11'\,28'',49 \quad \mathrm{Lg}\,\varrho = 9{,}999\,2157 \quad \mathrm{Lg}\,R = 9{,}999\,4499 \quad \mathrm{Lg}\,N = 0{,}000\,7861$$

und für einen Breitengrad oder eine Breitensekunde

$$R a\pi : 180 = 57076^t{,}22 \qquad R a\cdot \mathrm{Si}\,1'' = 15^t{,}843 = 30^m{,}879$$

sowie für einen Längengrad oder eine Längensekunde

$$N a\pi\cdot \mathrm{Co}\,\varphi : 180 = 38741^t{,}75 \qquad N a\cdot \mathrm{Co}\,\varphi\cdot \mathrm{Si}\,1'' = 10^t{,}762 = 20^m{,}975$$

d. h. dieselben Werte, welche aus der von **Encke** (l. c.) gegebenen Tafel, von welcher unsere VII[d] ein Specimen enthält, durch Interpolation folgen. — *c.* Unter Mitbenutzung der seit Bessels Zeiten ausgeführten Vervollständigungen und Neumessungen (vgl. 427) erhielten z. B.

	James 1864	Clarke 1866	Clarke 1880
$\mathfrak{a}$	6 378 230^m	6 378 206^m	6 378 249^m
$\mathfrak{b}$	6 356 562	6 356 584	6 356 515
α	1/294,36	1/294,98	1/293,47

also etwas grössere Dimensionen und stärkere Abplattungen als sie **Bessel** gefunden hatte, und **Helmert** gelangte (vgl. Bericht in 371) zu der Ansicht, dass letzterer wirklich die beiden Halbaxen um etwa $^1/_{10000}$ ihrer Länge zu klein angenommen habe, während dagegen dessen Abplattung die richtigere sein dürfte. — *d.* Anhangsweise bleibt noch zu erwähnen, dass General Th. **Schubert** in seinem „Essai d'une détermination de la véritable figure de la terre (Mém. Pét. 1860, mit Nachtrag in A. N. 1231 von 1860)“ seinen Rechnungen ein dreiaxiges Ellipsoid zu Grunde legte und dabei fand, dass man den Messungen auch nahe genügen könne, wenn man annehme, dass dessen kleinste Axe von 3 261 467^t,9 mit der Umdrehungsaxe zusammenfalle, während die grösste Axe von 3 272 671^t,5 in der Länge 58° 44′ von Ferro liege, die kleinere Equatoraxe 3 272 303^t,2 messe, und die grösste Abplattung der Meridiane 1/292,109, die kleinste dagegen nur 1/302,004 betrage. Als sodann bald darauf Elie **Ritter** in seinen „Recherches sur la figure de la terre (Mém. Genève 1860—61)“ den Versuch machte, der Erde zwar die Gestalt eines Rotationskörpers zu belassen, dagegen die sich den Messungen am besten anschliessende Form der Meridiane zu bestimmen, erhielt er für letztere die Gleichung

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} = 1 + \left[\frac{1}{15297} \pm \frac{1}{17269}\right] \cdot \frac{x^2 \cdot y^2}{\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2}$$

wo $\mathfrak{a} = 3\,272659^t,120$ und $\mathfrak{b} = 3\,261459^t,206$. Das Hauptinteresse dieser beiden Untersuchungen besteht wohl in dem negativen Resultate, dass dadurch nichts wesentlich Besseres erreicht wurde als durch das Bessel'sche Rotationsellipsoid. — Zum Schlusse mag endlich noch auf die Arbeiten „Edgar **Rehm**, Tafeln der Krümmungshalbmesser des Bessel'schen Erdsphäroides für die Breiten von 40° 0′ — 51° 30′ (Mitth. des k. k. milit. geogr. Inst. III von 1883), — A. **Delporte** (Tournai 1844 — Manyanga au Congo 1891; belg. Stabsoffizier), Notice sur les travaux nécessaires pour compléter le réseau géodésique belge. Bruxelles 1884 in 8., — Th. **Wittstein**, Vier Briefe aus Samoa. Hannover 1889 in 8., — etc.“, hingewiesen werden.

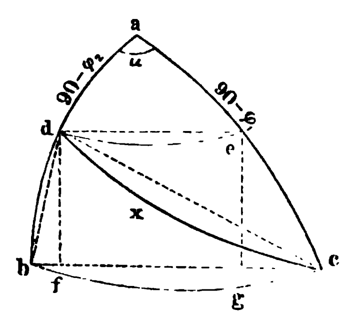
429. Die frühern Rechnungen unter Voraussetzung der Kugelgestalt. — Während bei der jetzigen Ausbildung der sphärischen Trigonometrie die Lösung der meisten Aufgaben der sog. mathematischen Geographie unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde keine erheblichen Schwierigkeiten darbietet, so z. B. die von jeher beliebte Aufgabe, aus den Längen $\lambda_1\ \lambda_2$ und den Breiten $\varphi_1\ \varphi_2$ zweier Orte ihre Distanz x zu finden, durch die einfache Formel

$$\text{Co}\,x = \text{Si}\,\varphi_1 \cdot \text{Si}\,\varphi_2 + \text{Co}\,\varphi_1 \cdot \text{Co}\,\varphi_2 \cdot \text{Co}\,(\lambda_1 - \lambda_2) \qquad \textbf{1}$$

absolviert wird, so erforderte früher die Lösung jeder solchen Aufgabe eine eigene Behandlung und einen gewissen Aufwand von Scharfsinn, an dem wir uns jetzt noch erfreuen [a]. — Anhangsweise

ist hier noch der auf derselben Voraussetzung beruhenden Vorschriften für die trigonometrische Höhenbestimmung zu gedenken [b], — ferner an einem Beispiele zu zeigen, wie man unter ihr bei Berechnung eines Dreiecksnetzes vorzugehen hat [c].

Zu 429: *a.* Nach der durch Joh. **Werner** ausgegebenen Schrift „De his, quæ geographiæ debent adesse Georgi Amirucii constantinopolitani Opusculum. In idem Joannis Verneri Appendices. Norimbergæ 1514 in fol." wusste schon der Grieche Georg **Amirucius** (Trapezunt 1430? — Konstantinopel 1490?) die Distanz x in der Weise zu berechnen, dass er ae = ad und ab = ac auftrug, sodann die Sehnen de, dc, bc und die Senkrechten df, eg zog. Man kennt nun, wenn man den Radius der Hauptkreise als Einheit wählt, also die Radien von de und bc mit $Co\,\varphi_2$ und $Co\,\varphi_1$ einführt, und $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha$ setzt,



$$Ch \cdot bd = 2\,Si\,{}^1\!/_2\,(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad Ch\,de = 2\,Co\,\varphi_2 \cdot Si\,{}^1\!/_2\,\alpha \qquad Ch\,bc = 2 \cdot Co\,\varphi_1 \cdot Si\,{}^1\!/_2\,\alpha$$

also auch successive

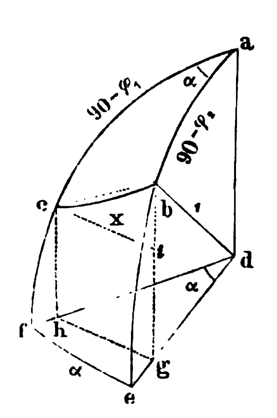
$$bf = {}^1\!/_2(bc - de) = (Co\,\varphi_1 - Co\,\varphi_2) \cdot Si\,{}^1\!/_2\,\alpha \qquad cf = {}^1\!/_2(bc + de) = (Co\,\varphi_1 + Co\,\varphi_2) \cdot Si\,{}^1\!/_2\,\alpha$$

$$dc^2 = bd^2 - bf^2 + fc^2 = 2(1 - Si\,\varphi_1 \cdot Si\,\varphi_2 - Co\,\varphi_1 \cdot Co\,\varphi_2 \cdot Co\,\alpha)$$

und kann somit x nach der mit 1 übereinstimmenden Formel

$$Co\,x = 1 - 2 \cdot Si^2\,{}^1\!/_2\,x = 1 - {}^1\!/_2\,dc^2 = Si\,\varphi_1 \cdot Si\,\varphi_2 + Co\,\varphi_1 \cdot Co\,\varphi_2 \cdot Co\,\alpha \qquad 2$$

berechnen, wobei freilich zu bemerken ist, dass **Amirucius** diese Schlussformel nicht aufstellte, sondern denselben Weg in jedem einzelnen Falle Schritt für Schritt zurücklegte, — immerhin aber damit ein ganz hübsches Verfahren andeutete, um ohne Zerfällen in rechtwinklige Dreiecke die Hauptformel der sphärischen Trigonometrie abzuleiten. — Für eine ebenfalls sehr nette Auflösung derselben Aufgabe mit Hilfe des ptolemäischen Lehrsatzes auf Blatt 119 der mehrerwähnten Geometrie von **Pühler** verweisend, füge ich dagegen noch bei, dass **Werner** in seinem Appendix die umgekehrte Aufgabe, α aus x zu berechnen, dadurch löste, dass er ab und ac je zu einem Quadranten ergänzte, sodann die Senkrechten bg und ch, sowie ci ∥ hg zog. Da nämlich $bg = Si\,\varphi_1$, $ch = Si\,\varphi_2$, $dg = Co\,\varphi_1$, $dh = Co\,\varphi_2$ und $Ch\,bc = 2\,Si\,{}^1\!/_2\,x$, so hat man einerseits



$$hg^2 = cb^2 - bi^2 = 4\,Si^2\,{}^1\!/_2\,x - (Si\,\varphi_1 - Si\,\varphi_2)^2$$

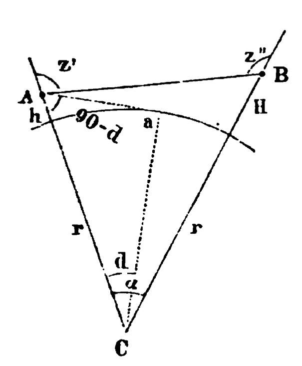
während anderseits aus △hdg

$$hg^2 = Co^2\,\varphi_1 + Co^2\,\varphi_2 - 2\,Co\,\varphi_1 \cdot Co\,\varphi_2 \cdot Co\,\alpha$$

folgt, und erhält nun durch Vergleichung beider Werte

$$Co\,\alpha = (Co\,x - Si\,\varphi_1 \cdot Si\,\varphi_2) : (Co\,\varphi_1 \cdot Co\,\varphi_2) \qquad 3$$

womit die Aufgabe vollständig gelöst und neuerdings jene Grundformel abgeleitet ist. *b.* Misst man von zwei Punkten A und B aus, deren geodätisch



bestimmte Distanz gleich a ist, und deren annähernd bekannte Höhen h und H sind, die gegenseitigen Zenitdistanzen z' und z'', so kann man daraus ihre Höhendifferenz berechnen, da nach 65 : 4

$$(h + H + 2r) : (H - h) =$$
$$= Tg(180 - {}^1/_2(z'' + z')) : Tg\ {}^1/_2(z'' - z')$$

folgt, während anderseits $z' + z'' = 180° + \alpha$ und $a \risingdotseq 2r \cdot Tg\ {}^1/_2\,\alpha$, somit

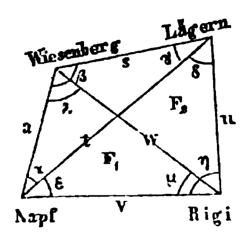
$$H - h \risingdotseq a\,[1 + (h + H) : 2r] \cdot Tg\ {}^1/_2(z'' - z') \quad \mathbf{4}$$

ist. Es muss hervorgehoben werden, dass diese in den meisten Fällen hinlänglich genaue Formel nur die von der terrestrischen Refraktion (vgl. 455) nahe freie Differenz $(z'' - z')$ enthält. Ferner ist beizufügen, dass die auf dem Meere statt der Zenitdistanzen gemessenen Höhen in der Regel Distanzen von dem scheinbaren Meereshorizonte sind, also um die Depression d dieses letztern, die sog. **Kimmtiefe** (dip of the horizon) vermindert werden müssen, welche sich unter der Annahme, dass die Höhe h des Beobachters über dem Meere in Metern gegeben und (219) $r = 6366^1/_3{}^{km}$ sei, nach

$$\frac{r}{r+h} = Co\,d = 1 - \frac{d^2 \cdot Si^2\,1''}{1 \cdot 2} + \ldots \qquad \text{oder} \qquad \frac{d^2 \cdot Si^2\,1''}{2} \risingdotseq \frac{h}{r}$$

also nach
$$d \risingdotseq \sqrt{\frac{2h}{r}} \cdot Si\,1'' = 115'',6 \cdot \sqrt{h} \quad \mathbf{5}$$

leicht berechnen lässt. Für die Vorschläge von F. **Wollaston**, die Kimmtiefe direkt zu messen und ein von ihm unter dem Namen **Dipsector** dafür konstruiertes Instrument vgl. dessen Abhandlung in Ph. Tr. 1803 und den Artikel von **Horner** in Gehlers Wörterbuch (II 558—61). — *c.* Als Beispiel für die Berechnung wähle ich das Viereck: Napf-Wiesenberg-Lägern-Rigi, in welchem nach „Johannes **Eschmann** (Wädensweil 1808 — Zürich 1852; Ingenieur; vgl. Biogr. II und Gesch. d. Verm.), Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz. Zürich 1840 in 4." die aus der Aarberger-Basis abgeleitete Seite $a = \overline{4,6488992}^m = 44555,29^m$ ist, und die ersten Werte der beigesetzten 9 Winkel durch unmittelbare Messung bekannt sind, während die zweiten aus



1)	$\alpha + \varepsilon$ =	87° 20' 55'',1	55'',8
2)	ε =	48 35 11,0	9,4
3)	$\beta - \lambda$ =	52 41 57,3	58,1
4)	λ =	44 27 36,0	34,6
5)	γ =	44 4 46,8	45,4
6)	δ =	41 12 29,4	30,3
7)	$\gamma + \delta$ =	85 17 15,1	15,7
8)	μ =	48 11 33,5	34,2
9)	$\eta - \mu$ =	42 0 51,6	51,0

der nachfolgenden Rechnung hervorgehen werden. — **Früher** leitete man nun einfach aus den gemessenen Winkeln durch Kombination die Dreieckswinkel ab, bildete die Summe, und brachte an jedem Winkel $^1/_3$ des Überschusses über 180° in Abrechnung, wobei eine allfällig notwendige ungleiche Korrektion auch dem ungleichsten Winkel zufiel, und es ist das folgende Schema nach dieser Regel ausgefüllt:

△NWL			△NWR			△NRL		
$\alpha =$	38°45′44″,1	42″,7	$\alpha+\varepsilon =$	87°20′55″,1	53″,5	$\varepsilon =$	48°35′11″,0	9″,2
$\beta =$	97 9 33,3	31,9	$\lambda =$	44 27 36,0	34,5	$\delta =$	41 12 29,4	27,6
$\gamma =$	44 4 46,8	45,4	$\mu =$	48 11 33,5	32,0	$\eta =$	90 12 25,1	23,2
	180 0 4,2	0,0		180 0 4,6	0,0		180 0 5,5	0,0

Mit den in dieser Weise modifizierten Winkeln rechnete man sodann nach den gewöhnlichen Formeln der ebenen Trigonometrie, und ich erhielt, in dieser Weise vorgehend, im vorliegenden Falle:

$$\begin{aligned} s &= a \cdot Si\,\alpha \cdot Cs\,\gamma = \overline{4{,}603\,1398} & t_1 &= a \cdot Si\,\beta \cdot Cs\,\gamma = \overline{4{,}803\,1077} \\ v &= a \cdot Si\,\lambda \cdot Cs\,\mu = 4{,}621\,8684 & w &= a \cdot Si\,(\alpha+\varepsilon)\,Cs\,\mu = 4{,}776\,0499 \\ u &= v \cdot Si\,\varepsilon \cdot Cs\,\delta = 4{,}678\,1535 & t_2 &= v \cdot Si\,\eta \cdot Cs\,\delta = 4{,}803\,1185 \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

ferner

$$\begin{aligned} F_1 &= \tfrac{1}{2}\, a \cdot v \cdot Si\,(\alpha+\varepsilon) = 93166{,}83^{ha} & F_3 &= \tfrac{1}{2}\, a \cdot s \cdot Si\,\beta = 88636{,}02^{ha} \\ F_2 &= \tfrac{1}{2}\, s \cdot u \cdot Si\,(\gamma+\delta) = 95233{,}86 & F_4 &= \tfrac{1}{2}\, v \cdot u \cdot Si\,\eta = 99767{,}27 \\ & \quad 188400{,}69 & & \quad 188403{,}29 \end{aligned} \qquad \mathbf{7}$$

also bei den zwei sich ergebenden Proben keine üble Übereinstimmung. Da t_1 nur auf Einem Dreiecke beruht, während für t_2 zwei Dreiecke benutzt sind, so erscheint es angezeigt, t_1 das doppelte Gewicht von t_2 zu geben, somit schliesslich $t = \overline{4{,}803\,1113} = 63549^m{,}39$ zu setzen. — **Jetzt** wird dieser, immerhin etwas willkürlichen Ausgleichung der frühern Zeit, in allen Fällen, wo, wie in unserm Beispiele, mehr als die absolut notwendige Anzahl von Grössen gemessen ist, eine den Principien der Methode der kleinsten Quadrate entsprechende strenge Ausgleichung substituiert, wobei vor allem drei Arten von sog. **Bedingungsgleichungen** aufzustellen sind: **Eine erste Art** bezieht sich auf Bedingungen, welche die an einer einzelnen Station gemessenen Winkel einzugehen haben, wenn z. B. ausser gewissen derselben auch ihre Summen oder Differenzen vorliegen, vielleicht sogar ein vollständiger „Tour de l'horizon" gemacht wurde. So sind in dem vorliegenden Beispiele nicht nur γ und δ, sondern es ist auch $\gamma+\delta$ gemessen, und man hat daher, wenn die Korrektion eines Winkels mit seiner in Klammern geschlossenen Nummer bezeichnet wird, die Bedingungsgleichung

$$44^0\,4'\,46'',8 + (5) + 41^0\,12'\,29'',4 + (6) = 85^0\,17'\,15'',1 + (7)$$

oder

$$-1'',1 = (5) + (6) - (7) \qquad \mathbf{8}$$

Eine zweite Art beruht darauf, dass in einem sphärischen Dreiecke die Winkelsumme $180^0 + 2e$ betragen soll, wo (86), wenn e in Sekunden, die Dreieckfläche F in Hektaren ausgedrückt und entsprechend (219) $r^2 \cdot Si\,1'' = \overline{4{,}2934}$ gesetzt wird,

$$2e = F : r^2 \cdot Si\,1'' = Num\,(Lg\,F - 4{,}2934) \qquad \mathbf{9}$$

ist. Hienach ergiebt sich aber nach 7 für △WNR der Excess $2e = 4'',7$, also die Bedingungsgleichung

$$1 + (1) + 4 + (4) + 8 + (8) = 180^0 + 4'',7 \quad \text{oder} \quad 0'',1 = (1) + (4) + (8) \qquad \mathbf{10}$$

für △WRL der Excess 4″,8 und die Bedingungsgleichung

$$0'',8 = (3) + (7) + (9) \qquad \mathbf{11}$$

und endlich, wenn als drittes unabhängiges Dreieck noch △NWL mit dem Excesse 4″,5 gewählt wird,

$$0'',3 = (1) - (2) + (3) + (4) + (5) \qquad \mathbf{12}$$

Die dritte Art aber beruht auf Doppeltberechnung derselben Seiten aus verschiedenen Kombinationen von Dreiecken, wie z. B. nach 6

$$t_1 = a \cdot Si\,\beta : Si\,\gamma \quad \text{und} \quad t_2 = v \cdot Si\,\eta : Si\,\delta = a \cdot Si\,\lambda \cdot Si\,\eta : (Si\,\mu \cdot Si\,\delta) \qquad \textbf{13}$$

Da nun für richtige Winkel $t_1 = t_2$ sein soll, so muss somit die Gleichung

$$Si\,[\beta + (3) + (4)] \cdot Si\,[\delta + (6)] \cdot Si\,[\mu + (8)] =$$
$$= Si\,[\lambda + (4)] \cdot Si\,[\gamma + (5)] \cdot Si\,[\eta + (8) + (9)]$$

bestehen. Logarithmieren wir dieselbe und bedenken, dass, sobald $\triangle x$ klein ist, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$Lsi\,(x + \triangle x) = Lsi\,x + M \cdot Ct\,x \cdot \triangle x \cdot Si\,1''$$

gesetzt werden kann, wo $M = 0{,}434\,2945$ den Modulus der gemeinen Logarithmen bezeichnet, so ergiebt sich

$$Lg\,\frac{Si\,\lambda \cdot Si\,\gamma \cdot Si\,\eta}{Si\,\beta \cdot Si\,\delta \cdot Si\,\mu} = M \cdot Si\,1'' \begin{bmatrix} (3) \cdot Ct\,\beta + (4) \cdot (Ct\,\beta - Ct\,\lambda) - (5) \cdot Ct\,\gamma + \\ (6) \cdot Ct\,\delta + (8) \cdot (Ct\,\mu - Ct\,\eta) - (9) \cdot Ct\,\eta \end{bmatrix}$$

oder, wenn die Werte eingesetzt und beide Seiten mit 1000000 multipliziert werden, noch die neue Bedingungsgleichung

$$98 = -3 \cdot (3) - 24 \cdot (4) - 22 \cdot (5) + 24 \cdot (6) + 29 \cdot (8) - 0 \cdot (9) \qquad \textbf{14}$$

Die so erhaltenen fünf Bedingungsgleichungen 8, 10, 11, 12, 14 haben nun alle die Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \ldots\ldots = m \qquad \textbf{15}$$

und können daher nach den in 52 entwickelten Grundsätzen zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte der x, y, z, ... benutzt werden; jedoch lässt sich die Rechnung in unserm Falle, wo die Anzahl der Unbekannten grösser als die der Bedingungsgleichungen ist, durch Benutzung eines von **Gauss** angelegten Fussweges bedeutend abkürzen: Da nämlich die x, y, z, ... Fehler sind, also $x^2 + y^2 + z^2 + \ldots$ einen Minimalwert annehmen soll, so hat man

$$x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + \ldots = 0 \qquad \textbf{16}$$

während nach 15

$$a \cdot dx + b \cdot dy + c \cdot dz + \ldots = 0 \qquad \textbf{17}$$

Multipliziert man nun jede der Gleichungen 17 mit einem unbestimmten Faktor k und addiert die Produkte, so erhält man mit Hilfe von 16 die Gleichung

$$\Sigma ak \cdot dx + \Sigma bk \cdot dy + \Sigma ck \cdot dz + \ldots = x \cdot dx + y \cdot dy + z \cdot dz + \ldots$$

welche für jeden Wert der dx, dy, dz, ... bestehen muss, also die Gleichheiten

$$x = \Sigma ak \qquad y = \Sigma bk \qquad z = \Sigma ck \ldots \qquad \textbf{18}$$

bedingt. Substituiert man diese Werte in die 15, so erhält man ebensoviele Gleichungen der Form

$$\left.\begin{array}{l} (a_1^2 + b_1^2 + \ldots)\,k_1 + (a_1 a_2 + b_1 b_2 + \ldots)\,k_2 + (a_1 a_3 + b_1 b_3 + \ldots)\,k_3 + \ldots = m_1 \\ (a_2 a_1 + b_2 b_1 + \ldots)\,k_1 + (a_2^2 + b_2^2 + \ldots)\,k_2 + (a_2 a_3 + b_2 b_3 + \ldots)\,k_3 + \ldots = m_2 \end{array}\right\} \qquad \textbf{19}$$

etc., als Bedingungsgleichungen, oder also auch als k vorhanden sind, — kann somit aus diesen die k oder die sog. **Correlaten** von Gauss, — und sodann endlich aus den 18 die eigentlichen Unbekannten x, y, z, ... berechnen. So ergeben sich unter Benutzung des zur leichtern Übersicht aus den 8, 10, 11, 12, 14 zusammengestellten Tableaus

k	a (1)	b (2)	c (3)	d (4)	e (5)	f (6)	g (7)	h (8)	i (9)	m
1	—	—	—	—	1	1	— 1	—	—	— 1,1
2	1	—	—	1	—	—	—	1	—	0,1
3	—	—	1	—	—	—	1	—	1	0,8
4	1	— 1	1	1	1	—	—	—	—	0,3
5	—	—	— 3	— 24	— 22	24	—	19	—	98

in unserm Beispiele die den 18 entsprechenden Gleichungen

$$(1) = k_2 + k_4 \qquad (2) = -k_4 \qquad (3) = k_3 + k_4 - 3\,k_5$$
$$(4) = k_2 + k_4 - 24\,k_5 \qquad (5) = k_1 + k_4 - 22\,k_5 \qquad (6) = k_1 + 24\,k_5 \qquad \textbf{20}$$
$$(7) = -k_1 + k_3 \qquad (8) = k_2 + 19\,k_5 \qquad (9) = k3$$

und die den 19 entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned} -1{,}1 &= 3\,k_1 - k_3 + k_4 + 2\,k_5 \\ 0{,}1 &= 3\,k_2 + 2\,k_4 - 5\,k_5 \\ -0{,}8 &= k_1 - 3\,k_3 - k_4 + 3\,k_5 \\ 0{,}3 &= k_1 + 2\,k_2 + k_3 + 5\,k_4 - 49\,k_5 \\ 98{,}0 &= 2\,k_1 - 5\,k_2 - 3\,k_3 - 49\,k_4 + 2006\,k_5 \end{aligned} \qquad \textbf{21}$$

Aus letztern fünf Gleichungen erhält man aber

$$k_1 = -1{,}145 \quad k_2 = -0{,}891 \quad k_3 = -0{,}563 \quad k_4 = 1{,}601 \quad k_5 = 0{,}086$$

und damit nach 20 die Korrektionen

$$(1) = 0'',710 \quad (2) = -1'',601 \quad (3) = 0'',780 \quad (4) = -1'',354 \quad (5) = -1'',436$$
$$(6) = 0'',919 \quad (7) = 0'',582 \quad (8) = 0'',743 \quad (9) = -0'',563 \qquad \textbf{22}$$

welche in der That einerseits in den richtigen Grenzen bleiben, indem noch der benutzte Mittelwert des meist gemessenen Winkels $\eta - \mu$ die Unsicherheit $\pm 1'',10$ besitzt, und anderseits den fünf Bedingungsgleichungen vollständig genügen. Legt man nun diese Korrektionen den gemessenen Winkeln bei, so erhält man die in dem frühern Tableau den Winkeln bereits beigesetzten Sekunden, und mit Hilfe von diesen geht das bei der ersten Berechnung benutzte Schema, wenn man überdies nach dem Legendre'schen Satze (91) die Excesse auf die einzelnen Winkel verteilt, in

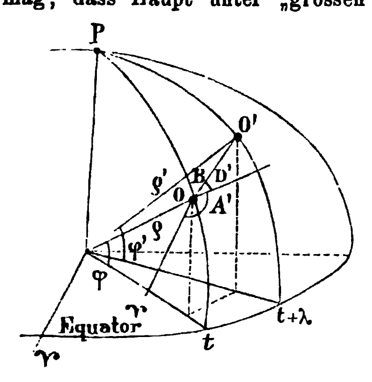
△NWL			△NWR			△NRL		
$\alpha =$	38°45′ 46″,4	44″,9	$\alpha + \varepsilon =$	87°20′ 55″,8	54″,2	$\varepsilon =$	48°35′ 9″,4	7″,8
$\beta =$	97 9 32,7	31,2	$\lambda =$	44 27 34,6	33,1	$\delta =$	41 12 30,3	28,7
$\gamma =$	44 4 45,4	43,9	$\mu =$	48 11 34,2	32,7	$\eta =$	90 12 25,2	23,5
	180 0 4,5	0,0		180 0 4,6	0,0		180 0 4,9	0,0

über. Nach den 18 ergeben sich nun mit diesen ausgeglichenen Winkeln die übereinstimmenden Werte $\mathrm{Lg}\, t_1 = 4{,}803\,1112$ und $\mathrm{Lg}\, t_2 = 4{,}803\,1111$, so dass wirklich die Ausgleichung einen nicht unerheblichen Gewinn abwirft; aber dabei ist auch der relativ grosse Zeitaufwand nicht zu übersehen, welcher nur bei sehr scharf bestimmten Winkeln gerechtfertigt ist, da man durch Ausgleichung schlechte Winkel nicht zu guten machen, sondern höchstens illusorische Resultate erhalten kann, — ferner das Faktum, dass das Schlussresultat bei beiden Rechnungsmethoden übereinstimmt, was zwar allerdings nicht immer in solchem Masse zutreffen dürfte. — Dass dieselben zwei Methoden sich auch auf grössere Dreiecksnetze ausdehnen lassen, ist wohl selbstverständlich; dagegen bleibt noch beizufügen, dass, wenn man in einem in Beziehung auf die Winkel ausgeglichenen Netze die Seiten b vorläufig in einer beliebig angenommenen Einheit berechnet hat und sodann aus einer Basis für eine dieser Seiten den Wert $B = b\,(1 + x)$ und somit (39 : 8) $M \cdot x = \mathrm{Lg}\, B - \mathrm{Lg}\, b$ findet, die Logarithmen aller übrigen Seiten um eben diese Grösse $M \cdot x$ vermehrt werden müssen; sind mehrere Grundlinien mit wesentlich gleicher Genauigkeit gemessen worden, so erhält man für $M \cdot x$ ebensoviele Werte und

wird nun am besten thun, einfach deren Mittel zu benutzen und sich aller weitern Künsteleien zu enthalten.

430. Die seit Euler auf der sphäroidischen Erde unternommenen Rechnungen. — Der Begriff der auf dem Sphäroide an Stelle der Hauptkreise tretenden sog. **geodätischen Linien** ist schon früher (99) gegeben und eine Haupteigenschaft derselben abgeleitet worden; jedoch wäre noch gar vieles über die durch die **Euler**, **Legendre** und ihre Nachfolger in dieser Richtung unternommenen Rechnungen nachzutragen, wenn mich nicht der enge und für die Geodäsie bereits fast unverhältnismässig stark in Anspruch genommene Raum zwingen würde, hiefür zunächst auf die Speciallitteratur zu verweisen [a] und mich darauf zu beschränken, hier einige für das folgende brauchbare Beziehungen aufzustellen [b] und unter der folgenden Nummer eine für die Astronomie ganz besonders wichtige Aufgabe kurz zu behandeln.

Zu 430: *a.* Abgesehen von den bereits früher (99) erwähnten Specialarbeiten und den später (434) anzuführenden allgemeinern Werken, dürfte hier einerseits hervorzuheben sein, dass auch **Laplace** in seiner Abhandlung „De la figure d'un sphéroide très-peu différent d'une sphère et recouvert d'une couche de fluide en équilibre (Méc. cél. II 63—154)" eine Reihe von Grundformeln für die höhere Geodäsie aufstellte, — und anderseits, dass für betreffende Untersuchungen überdies die Schriften „Johann Peter Wilhelm **Stein** (Trier 1795 — ebenda 1831; franz. Ingénieur-géographe, dann Oberlehrer zu Trier), Geographische Trigonometrie. Mainz 1825 in 4., — **Grunert**, Sphäroidische Trigonometrie. Berlin 1833 in 4., — Paul **Gordan** (1837 geb.; Prof. math. Erlangen), De linea geodetica. Berolini 1862 in 4., — **Baeyer**, Über die Berechnung sphäroidischer Dreiecke und den Lauf der geodätischen Linie (A. N. 1699—1700 von 1868), — Elwin Bruno **Christoffel** (Montjoie 1829 geb.; folgeweise Prof. math. Zürich, Berlin und Strassburg), Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Berlin 1869 in 4., — G. **Fleischer**, Über die geodätischen Linien auf centralen Oberflächen 2. Ordnung. St. Gallen 1877 in 4., — P. **Haupt**, Die Ausgleichung grosser geodätischer Dreiecke (A. N. 2549—50 von 1883), — etc.", konsultiert werden können, wobei noch bemerkt werden mag, dass Haupt unter „grossen geodätischen Dreiecken" solche versteht, „deren Winkel nicht mehr unmittelbar, sondern nur noch durch Ketten von Dreiecken gemessen werden, und deren Seiten nicht mehr aus Einem Dreiecke, sondern aus einer ganzen Kette von Dreiecken hervorgehen". — *b.* Bezeichnen ϱ, φ, t und ϱ', φ', $(t + \lambda)$ die geocentrischen Coordinaten zweier Punkte O und O' der Längendifferenz λ zur Sternzeit t des ersten Punktes, und legt man durch O ein Parallelsystem, so sind die Coordinaten B D' A' von O' in Beziehung auf letzteres nach 93 : 15 durch die Gleichungen



$$B \cdot Co\, D' \cdot Co\, A' = \varrho' \cdot Co\, \varphi' \cdot Co\,(t + \lambda) - \varrho \cdot Co\, \varphi \cdot Co\, t$$
$$B \cdot Co\, D' \cdot Si\, A' = \varrho' \cdot Co\, \varphi' \cdot Si\,(t + \lambda) - \varrho \cdot Co\, \varphi \cdot Si\, t \qquad 1$$
$$B \cdot Si\, D' = \varrho' \cdot Si\, \varphi' - \varrho \cdot Si\, \varphi$$

bestimmt, — oder bequemer, wenn man statt A' die von der Zeit unabhängige, ein Analogon des Stundenwinkels darstellende Grösse

$$S = t - A' \qquad \text{so dass} \qquad A' = t - S \qquad 2$$

einführt, ferner ϱ und ϱ' durch den der Breite $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$ entsprechenden mittlern Radius vector ϱ ersetzt, und endlich statt 1' und 1'' die aus $1' \cdot Si\,(t + \frac{1}{2}\lambda) - 1'' \cdot Co\,(t + \frac{1}{2}\lambda)$ und $1' \cdot Co\,(t + \frac{1}{2}\lambda) + 1'' \cdot Si\,(t + \frac{1}{2}\lambda)$ resultierenden Gleichungen benutzt, durch

$$B \cdot Co\, D' \cdot Si\,(S + \tfrac{1}{2}\lambda) = -2\varrho \cdot Si\, \tfrac{1}{2}\lambda \cdot Co\, \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \cdot Co\, \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$
$$B \cdot Co\, D' \cdot Co\,(S + \tfrac{1}{2}\lambda) = -2\varrho \cdot Co\, \tfrac{1}{2}\lambda \cdot Si\, \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \cdot Si\, \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) \qquad 3$$
$$B \cdot Si\, D' = 2\varrho \cdot Co\, \tfrac{1}{2}(\varphi' + \varphi) \cdot Si\, \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$$

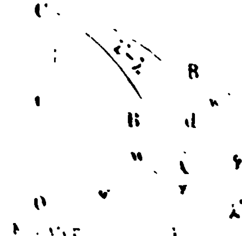
für deren Anwendung z. B. Abh. **Weiss** in 564 zu vergleichen ist.

431. Die geodätische Übertragung der Coordinaten. — Kennt man die geographischen Coordinaten φ und λ eines Punktes A, so kann man, unter Voraussetzung, dass den Erdmeridianen die Excentricität e zukomme, auch diejenigen eines von ihm unter dem Azimute w in der Bogendistanz δ befindlichen Punktes B, sowie das auf diesen letztern bezügliche Azimut des Punktes A nach den Formeln

$$\varphi' = \varphi - \delta \cdot [Co\, w + \tfrac{1}{2}\delta \cdot Tg\, \varphi \cdot Si^2 w \cdot Si\, 1''] \cdot (1 + e^2\, Co^2 \varphi) \qquad 1$$
$$\lambda' = \lambda - \delta \cdot Si\, w \cdot [1 - \delta \cdot Co\, w \cdot Tg\, \varphi \cdot Si\, 1''] \cdot Se\, \varphi \qquad 2$$
$$w' = w - 180^0 - \delta \cdot [Si\, w \cdot Tg\, \varphi - \tfrac{1}{4}\delta \cdot Si\, 2w\,(1 + 2\,Tg^2 \varphi)\, Si\, 1''] \qquad 3$$

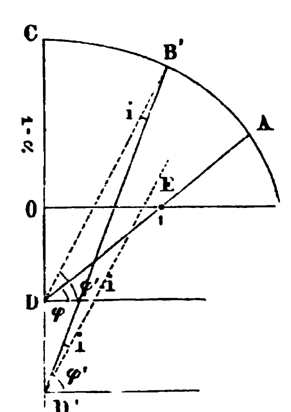
sehr angenähert berechnen [a].

Zu 431: *a.* Bezeichnet D die in mittlern Erdradien, d die in Sekunden ausgedrückte Distanz der Punkte A und B, so dass $D = d \cdot Si\, 1''$ ist, so erhält man (91 : 7, 9, 10)



$$\varphi' = \varphi - d \cdot Co\, w - \tfrac{1}{2} d^2 \cdot Tg\, \varphi \cdot Si^2 w \cdot Si\, 1'' + .. \qquad 4$$
$$\lambda' = \lambda - d \cdot Si\, w \cdot Se\, \varphi\,(1 - d \cdot Co\, w \cdot Tg\, \varphi \cdot Si\, 1'') + .. \qquad 5$$
$$w' = w - 180^0 - d \cdot Si\, w \cdot Tg\, \varphi + \tfrac{1}{4} d^2 \cdot Si\, 2w\,(1 + 2\,Tg^2 \varphi) \cdot Si\, 1'' + .. \qquad 6$$

womit das Problem unter Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde vollständig gelöst ist. Nimmt man den Erdradius zu $859\frac{1}{2}$ Meilen an und ist AB = α Meilen, so wird $D = 0{,}00126 \cdot \alpha$, $d = 239{,}98 \cdot \alpha$ und $d^2 \cdot Si\, 1'' = 0{,}27921 \cdot \alpha^2$, so dass man für kleinere Werte von α oder für Überschlagsrechnungen in obigen Formeln schon die Glieder mit d^2 vernachlässigen kann. — Betrachtet man aber die Erde als ein Sphäroid, dessen Meridianellipse die Excentricität e hat, und sind AD und BD die Normalen in A und B, so hat man 74 : 2, 7, wenn α die Abplattung bezeichnet und [illegible] die aus der Figur hervorgehende Bedeutung hat, und



die vierten Potenzen von e vernachlässigt werden,
$e^2 = 2\alpha, \quad AD = 1 + \alpha \cdot Si^2 \varphi, \quad B'D' = 1 + \alpha \, Si^2 \varphi'$

$$AE = (1 - e^2) \cdot AD \qquad OD = AD \cdot e^2 \, Si \, \varphi$$

$$OD' = B'D' \cdot e^2 \, Si \, \varphi'$$

$$AD : B'D' = 1 + \alpha \, (Si^2 \varphi - Si^2 \varphi')$$

$$BD' : B'D' = e^2 \, (Si \, \varphi' - Si \, \varphi)$$

somit aus Dreieck B'DD'

$$e^2 \, (Si \, \varphi' - Si \, \varphi) = Si \, i : Co \, (\varphi' - i) =$$
$$= Tg \, i : (Co \, \varphi' + Si \, \varphi' \cdot Tg \, i)$$

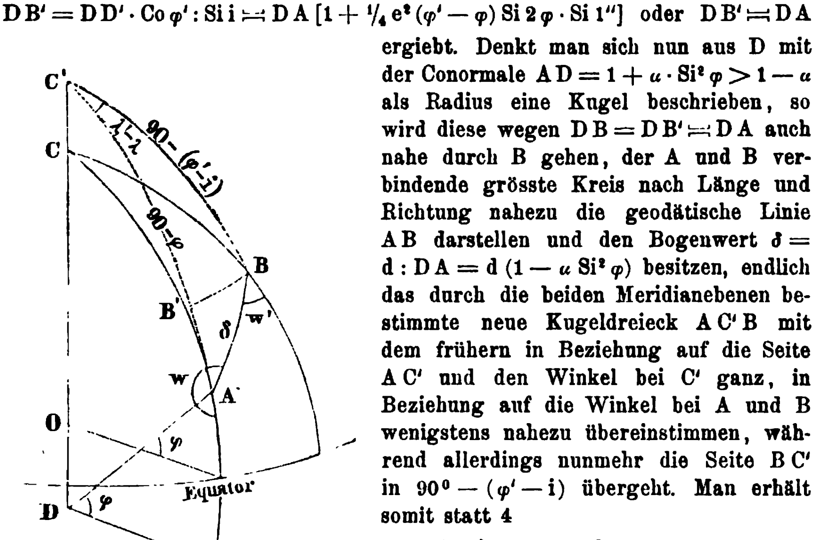
oder

$$Tg \, i = 2 e^2 \, Si \, {}^1\!/_2 \, (\varphi' - \varphi) \cdot Co \, {}^1\!/_2 \, (\varphi' + \varphi) \cdot Co \, \varphi \qquad 7$$

und $\quad i \doteq e^2 \, (\varphi' - \varphi) \cdot Co^2 \varphi$

während sich überdies mit Hilfe des Vorstehenden

$$DB' = DD' \cdot Co \, \varphi' : Si \, i \doteq DA \, [1 + {}^1\!/_4 \, e^2 \, (\varphi' - \varphi) \, Si \, 2\varphi \cdot Si \, 1''] \quad \text{oder} \quad DB' \doteq DA$$



ergiebt. Denkt man sich nun aus D mit der Conormale $AD = 1 + \alpha \cdot Si^2 \varphi > 1 - \alpha$ als Radius eine Kugel beschrieben, so wird diese wegen $DB = DB' \doteq DA$ auch nahe durch B gehen, der A und B verbindende grösste Kreis nach Länge und Richtung nahezu die geodätische Linie AB darstellen und den Bogenwert $\delta = d : DA = d \, (1 - \alpha \, Si^2 \varphi)$ besitzen, endlich das durch die beiden Meridianebenen bestimmte neue Kugeldreieck AC'B mit dem frühern in Beziehung auf die Seite AC' und den Winkel bei C' ganz, in Beziehung auf die Winkel bei A und B wenigstens nahezu übereinstimmen, während allerdings nunmehr die Seite BC' in $90^0 - (\varphi' - i)$ übergeht. Man erhält somit statt 4

$$\varphi' - i = \varphi - \delta \cdot Co \, w -$$
$$- {}^1\!/_2 \, \delta^2 \cdot Tg \, \varphi \cdot Si^2 w \cdot Si \, 1'' + \ldots$$

oder mit Benutzung von 7 unsere 1, während die 5 und 6 einfach in unsere 2 und 3 übergehen. — Ich füge dieser Ableitung noch die hist.-litt. Notizen bei, dass, nachdem sich schon **Clairaut** (Mém. Par. 1733 und 1739) und **Duséjour** (Mém. Par. 1778) mit ähnlichen Problemen befasst hatten, **Legendre** in seinem bereits mehrfach erwähnten Mémoire von 1787 die oben behandelte Aufgabe in wesentlich entsprechender Weise löste, wie es durch unsere 1—3 geschieht, ohne jedoch den Detail seiner Rechnung beizufügen, — und dass sein Verfahren von den französischen Geodäten lange festgehalten wurde, während dagegen die englischen sich meistens damit begnügten, für die Azimutalübertragung die von Isaac **Dalby** in seinen „Remarks on W. Roy's account (Ph. Tr. 1790)" gegebene, durch einfache Anwendung einer Neper'schen Analogie auf Dreieck ABC (vgl. unsere erste Figur), unter Annahme, dass $\alpha = 180^0 - (w' - w)$ sei, folgende Formel

$$Tg \, {}^1\!/_2 \, \alpha = Si \, {}^1\!/_2 \, (\varphi + \varphi') \cdot Se \, {}^1\!/_2 \, (\varphi - \varphi') \cdot Tg \, {}^1\!/_2 \, (\lambda' - \lambda) \qquad 8$$

zu benutzen, welche in der That (vgl. Anger in A. N. 212 von 1831) für Messungen von geringerer Ausdehnung überraschend gute Resultate giebt. Für weitern Detail, sowie für die in neuerer Zeit durch die **Soldner, Gauss, Schreiber,** etc., gegebenen Methoden, Formeln und Tafeln muss ich mich leider des Raumes wegen begnügen, auf die bereits gegebene und noch in 434 zu vervollständigende Fachlitteratur, wie namentlich auf die umfangreichen Werke von **Puissant, Helmert, Jordan,** etc., zu verweisen.

432. Die Bestimmungen der Länge des Sekundenpendels und der Satz von Clairaut. — Nachdem schon **Picard** in Verbindung mit seiner Gradmessung (418) die Pendellänge gemessen und die betreffende Ermittlung von **Richer** in dem Streite über die Gestalt der Erde eine hervorragende Rolle gespielt hatte, wurde die Messung der Länge l des Sekundenpendels, oder der mit ihr (nach 120 : 3) durch

$$g = l \cdot \pi^2 \qquad \mathbf{1}$$

zusammenhängenden Beschleunigung g der Schwere, auch auf die Programme der Arbeiten in Peru und Lappland gesetzt [a], und ist seit dieser Zeit an den verschiedensten Punkten der Erde, bald als Kontrole anderer Ergebnisse, bald um ihrer selbst willen, ausgeführt worden [b]. — Für die später zu diesem Zwecke benutzten Apparate und Verfahren auf das (121) bereits Gesagte verweisend, bleibt hier zu erwähnen, dass, wenn g_φ und l_φ Schwere und Pendellänge unter der Breite φ, g_0 und l_0 aber dieselben Grössen am Equator bezeichnen und e die Excentricität der Meridianellipse ist, die Beziehung

$$g_\varphi : g_0 = 1 + {}^1/_2\, e^2 \cdot \mathrm{Si}^2\, \varphi = l_\varphi : l_0 \qquad \mathbf{2}$$

besteht [c], und sich aus zahlreichen Messungen die Formeln

$$g_\varphi = 9^m{,}781027 + 0^m{,}0500547 \cdot \mathrm{Si}^2\, \varphi$$
$$l_\varphi = 0^m{,}991026 + 0^m{,}0050719 \cdot \mathrm{Si}^2\, \varphi \qquad \mathbf{3}$$

ergeben haben [d], — sowie dass **Clairaut** durch den nach ihm benannten Satz, es sei, wie auch die Lagerung der Schichten im Innern der Erde beschaffen sein möge, **die Summe der Abplattung und der Zunahme der Schwere vom Equator bis zu den Polen dritthalb mal so gross als die Fliehkraft unter dem Equator** [e], die Möglichkeit verschaffte, die aus Gradmessungen abgeleitete Abplattung durch Pendelmessungen zu kontrolieren [f]. Für einige verwandte Untersuchungen muss auf die Speciallitteratur verwiesen werden [g].

Zu 432: *a.* In Peru benutzte **Bouguer** (vgl. seine Abhandlung „Sur la longueur du pendule dans la zone torride" in Mém. Par. 1736) bei der Messung, welche er auf dem etwa 2435' hohen Pichincha ausführte, als Pendel einen Doppelkonus von Kupfer, der an einem in eine Pincette eingeklemmten „fil de pitte (Manillahanf)" aufgehängt war, und konnte somit die 36" 7''',015, welche er durch Vermehrung der Fadenlänge um die halbe Axe seines Doppelkonus

erhielt, als Länge desselben betrachten. Er liess dasselbe, unter Beobachtung der Coincidenzen, vor seiner astronomischen Pendeluhr, welche in einem Tage gegen mittlere Zeit um 306^s retardierte, schwingen, und fand dabei, dass es in $1^h\ 49\frac{1}{2}^m = 6570^s$ Uhrzeit volle 21 Schwingungen mehr mache als das Uhrpendel. Bezeichnet daher x oder y die Anzahl der Schwingungen, welche Bonguers Hilfspendel der Länge l oder ein wirkliches Sekundenpendel L in 86400 Uhrsekunden machen würde, so verhält sich

$$x : 86400 = (6570 + 21) : 6570 \qquad \text{so dass} \qquad x = 86675$$

$$y : 86400 = 86400 : (86400 - 306) \qquad y = 86707$$

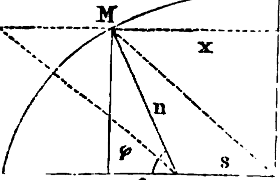
und man erhält somit, da sich (119) an demselben Orte die Pendellängen wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszahlen in derselben Zeit verhalten,

$$l : L = y^2 : x^2 \qquad \text{oder} \qquad L = l \cdot x^2 : y^2 = 36''\ 6''',695 \qquad \mathbf{4}$$

d. h. beinahe 2''' weniger als die 36'' 8''',58, welche **Bouguer** dem Sekundenpendel in Paris gab. Er fügte noch bei: „La force de la pesanteur était non seulement plus faible dans ce poste, parceque nous étions presque sur l'Equateur; mais encore parceque nous étions à une très grande hauteur au-dessus de la surface de la terre; deux causes considérables de ralentissement dans les oscillations, et qui devaient rendre le pendule à secondes le plus court qu'il ne sera jamais possible de l'observer". — Für den Detail der 1736 in Lappland, namentlich durch **Outhier** und **Camus**, gemachten, aber zu keinen sichern Resultaten führenden Versuche in Bestimmung von L mag es genügen, auf die in 422 erwähnten Schriften zu verweisen. — ***b.*** Für die Bestimmungen von **Lacaille** verweise ich auf den ausführlichen Bericht, welcher Delambre's Geschichte (VI 477 u. f.) einverleibt ist, — für seitherige Arbeiten ausser bereits angeführtem auf „**Boscovich**, De determinatione longitudinis penduli oscillantis ad singula secunda temporis medii (Opera V), — Friedrich **Mallet** (Stockholm 1728 — Upsala 1797; Prof. math. Upsala), Nogaste uträkning pa jordens rätta figur, genom pendel-försöks jemförelser (Acad. Stockh. 1767; deutsch von Kästner), — H. **Kater**, Experiments for determining the length of the pendulum in the latitude of London. London 1818 in 4., — E. **Sabine**, Account of experiments to determine the figure of the Earth, by means of the pendulum. London 1825 in 4., — etc." — ***c.*** Aus der für das mathematische Pendel (nach 120) bestehenden Annäherungsformel $t = \pi \cdot \sqrt{l : g}$ folgt, dass die Länge des Sekundenpendels unter der Breite φ

$$l_\varphi = g_\varphi : \pi^2 \qquad \mathbf{5}$$

ist, wo g_φ die nach der Normale wirkende Resultierende aus der Anziehung nach dem Mittelpunkte und der durch die Rotation der Erde erzeugten Centrifugalkraft f_φ ist, so dass man offenbar



$$g_\varphi : f_\varphi = n : s \qquad \mathbf{6}$$

setzen kann. Nun ist (111), wenn T die Rotationszeit der Erde bezeichnet,

$$f_\varphi = 4\pi^2 \cdot x : T^2 \qquad f_0 = 4\pi^2 \cdot a : T^2 \qquad \mathbf{7}$$

und (74), wenn e das Verhältnis der Excentricität und $p = a(1 - e^2)$ der Parameter ist,

$$s = e^2 \cdot x \qquad \text{und} \qquad n = p : \sqrt{1 - e^2 \cdot Si^2 \varphi} = p\,(1 + \tfrac{1}{2}\, e^2 \cdot Si^2 \varphi) \qquad \mathbf{8}$$

also hat man nach 6

$$g_\varphi = \frac{4\pi^2 p}{e^2 \cdot T^2 \cdot \sqrt{1 - e^2 \operatorname{Si}^2 \varphi}} \doteqdot \frac{4\pi^2 p}{e^2 \cdot T^2} (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{9}$$

woraus

$$g_{90} : g_0 = a : b \qquad g_\varphi = g_0 (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad l_\varphi = l_0 (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi) \qquad \mathbf{10}$$

folgen. — ***d.*** Setzt man in 10 nach **Sabine** für Spitzbergen ($\varphi = 79^0\, 49'\, 58''$) $l_\varphi = 39'',21460 \cdot E.$ und für St. Thomas ($\varphi = 0^0\, 24'\, 41''$) $l_\varphi = 39'',02074 \cdot E.$ ein, so erhält man in englischen Zollen

$$l_\varphi = 39'',0234 + 0'',2001 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi \quad \text{und} \quad g_\varphi = 385'',1450 + 1'',9750 \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi$$

während **Pouillet** (vgl. das seiner Physik beigegebene „Tableau des observations du pendule") aus 87 Messungen unsere 3 ableitete. — ***e.*** Der nach **Clairaut** benannte Satz, der sich, wenn $\alpha = 1 - \sqrt{1 - e^2} \doteqdot \tfrac{1}{2} e^2$ die Abplattung bezeichnet, durch

$$\alpha + (g_{90} - g_0) : g_0 = \tfrac{5}{2} \cdot f_0 : g_0 \qquad \mathbf{11}$$

oder auch, da nach 10, 7, 5 die Näherungswerte

$$\frac{g_{90} - g_0}{g_0} = \frac{a}{b} - 1 = (1 - e^2)^{-1/2} - 1 \doteqdot \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \frac{f_0}{g_0} = \frac{4a}{l_0 \cdot T^2}$$

bestehen, durch

$$\alpha = \tfrac{5}{2} q - \tfrac{1}{2} e^2 \qquad \text{wo} \qquad q = 4a : (l_0 \cdot T^2) \qquad \mathbf{12}$$

geben lässt, wurde von ihm bereits in seiner „Inquiry concerning the figure of such planets as revolve about an axis, supposing the density continually to vary from the centre towards the surface (Phil. Trans. 1738)" und dann noch erweitert in seiner klassischen „Théorie de la figure de la terre. Paris 1743 in 8. (2 éd. 1808)" ausgesprochen und erwiesen. Seither wurde er vielfach behandelt, so z. B. in „**Legendre**, Recherches sur la figure des planètes (Mém. Par. 1789)", von **Laplace** in Bd. 2 der „Mécanique céleste", von Ed. **Schmidt** in seinem 428 citierten Werke, von Adolf **Frölich** in seiner Dissertation „Beweis des Theorems von Clairaut, betreffend die Abplattung der Erde. Jena 1872 in 4.", von **Helmert** im 2. Bde. seiner „Höhern Geodäsie", in „A. **Giesen**, Über eine einfache Behandlungsweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoide mit kleinen Excentricitäten vorkommen (Z. f. M. u. Ph. 21 von 1876)", etc., ja lässt sich für ein homogenes Ellipsoid zur Not schon aus 282 : 17 ableiten. Er bedingt, dass $q \doteqdot \tfrac{4}{5} e^2$ oder, wenn entsprechend der in 419 nach **Newton** geführten Rechnung $e^2 \doteqdot \tfrac{1}{115}$ gesetzt wird, $q \doteqdot \tfrac{2}{577}$, was in der That mit dem daselbst für ein analoges Verhältnis erhaltenen Werte $\tfrac{2}{578}$ so nahe übereinstimmt, dass man versucht sein könnte, den Clairaut'schen Satz schon bei seinem grossen Vorgänger finden zu wollen. — ***f.*** Führt man den aus 12 folgenden Wert von $\tfrac{1}{2} e^2$ in 10''' ein, so erhält man die von **Faye** in seinem „Cours d'astronomie (I 204)" für Bestimmung der Abplattung aus Pendelmessungen gewählte Beziehung

$$l_\varphi = l_0 + l_0 \cdot (\tfrac{5}{2} q - \alpha) \cdot \operatorname{Si}^2 \varphi \qquad \mathbf{13}$$

und setzt man in derselben mit ihm

$$l_0 = 991^{mm} + x \qquad l_0 \cdot (\tfrac{5}{2} q - \alpha) = y \qquad \mathbf{14}$$

so korrespondieren folgende 9 Messungsergebnisse und Bedingungsgleichungen:

Ort	φ	$l\varphi$	$l_\varphi - 991 = x + y \cdot Si^2 \varphi$	Δl
	° ′	mm		
Spitzbergen . .	79 50	996,13	5,13 = x + 0,969 · y	— 0,02
Petersburg . .	59 57	4,97	3,97 . . . 749	— 0,01
New-York . . .	40 43	3,24	2,24 . . . 426	0,04
Jamaika . . .	17 56	1,56	0,56 . . . 095	0,00
Insel St. Thomas	0 25	1,19	0,19 . . . 000	— 0,12
Rio Janeiro . .	— 22 55	1,77	0,77 . . . 152	0,09
Montevideo . .	— 34 54	2,70	1,70 . . . 327	0,07
Cap Horn . . .	— 55 51	4,62	3,62 . . . 685	0,01
New-Shetland .	— 62 56	5,23	4,23 . . . 793	— 0,04

Aus den letztern ergeben sich aber die Normalgleichungen

$$22{,}41 = 9\,x + 4{,}196\,y \qquad 15{,}45 = 4{,}196\,x + 2{,}917\,y$$

und aus diesen folgen

$$x = 0^{mm},066 \qquad y = 5^{mm},200 \quad \text{d. h.} \quad l_0 = 991^{mm},066 \qquad l_{90} = 996^{mm},266$$

Mit **Faye** den in 429 erhaltenen Newton'schen Wert $q = {}^1/_{289}$ einführend, worin allerdings ein mit Recht gerügter wunder Punkt dieser Methode liegt, hat man somit nach 14″

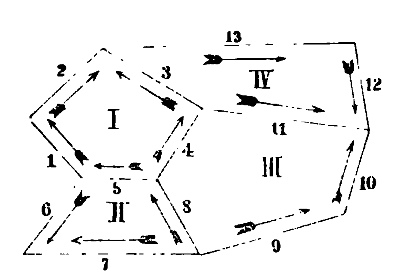
$$991{,}066\,({}^5/_2 \cdot {}^1/_{289} - \alpha) = 5{,}200 \qquad \text{d. h.} \qquad \alpha = {}^1/_{294}$$

während die 9 Gleichungen $\Delta l = 991 + x + y \cdot Si^2 \varphi - l_\varphi$ die bereits in die Tafel eingetragenen Werte ergeben, aus welchen man, da auf 9 Bestimmungen 2 Unbekannte kommen, den mittlern Fehler $E = \sqrt{(\Sigma \Delta l^2) : 7} = \pm\, 0^{mm},067$ findet. — *g.* Anhangsweise ist noch mitzuteilen, dass Bernhard **Wüllerstorf** (Triest 1816 — Botzen 1883; 1836/7 mein Mitschüler bei Littrow, 1857/9 Chef der Weltumseglung der Novara, später Contreadmiral und Handelsminister) 1869 der Wiener Akademie eine Abhandlung „Zur wissenschaftlichen Verwerthung des Aneroides. Wien 1871 in 4.“ vorlegte, in welcher er nachwies, dass ein unter einer bestimmten Breite mit einem Barometer ausgeglichenes Aneroid unter einer andern Breite einen Unterschied erzeigt, welcher sich zu dem Barometerstande nahe so verhält wie die Differenz der Schwere unter diesen Breiten zu der Schwere unter der ersten Breite. Die Zunahme der Schwere vom Equator nach dem Pole mit F bezeichnend und die Schwere unter dem Equator als Einheit wählend, fand er unter dieser Annahme aus 248 Beobachtungen im atlantischen Oceane F = 0,005161 und aus 161 Beobachtungen im indischen Oceane F = 0,005133, während unsere obigen Bestimmungen $F = (g_{90} - g_0) : g_0 = (l_{90} - l_0) : l_0 = y : l_0 = 0{,}005247$ ergeben und **Airy** ebenfalls aus Pendelbeobachtungen noch übereinstimmender F = 0,005133 erhielt.

433. Die sog. Präcisions-Nivellements. — Die neuere Zeit hat mehr und mehr erkannt, dass eine genauere Untersuchung der Erdgestalt auch die Höhenlage der astronomisch bestimmten und trigonometrisch mit einander verbundenen Punkte berücksichtigen muss, und dass diese am besten durch eigentliche Nivellements (322) ermittelt wird, welche von diesen Punkten bis an das Meer fortgeführt werden [a]. Es sind denn auch bereits in vielen Staaten zu

diesem Zwecke mit der durch ihn bedingten grossen Sorgfalt ausgeführte und in ihrer Anlage alle wünschbaren Kontrolen enthaltende Nivellements angeordnet und grossenteils beendigt worden [b], so dass fast nur noch eine endgiltige Vereinbarung über den zu wählenden Nullpunkt aussteht, um mit grosser Zuverlässigkeit die erforderlichen absoluten Höhen aller Punkte über dem Meere zu besitzen [c].

Zu 433: *a.* Schon 1864 fasste die damalige „mitteleuropäische" Gradmessungs-Konferenz (vgl. 434) den Beschluss: „Das Höhennetz jedes Landes ist auf einen einzigen, solid versicherten Nullpunkt zu beziehen. Alle diese Nullpunkte sollen durch Nivellements erster Ordnung miteinander verbunden werden. Die mittlern Höhen der verschiedenen Meere sollen in einer möglichst grossen Anzahl von Häfen und wo es angeht mittelst registrierender Apparate, sog. **Mareographen**, bestimmt werden; die Nullpunkte dieser **Pegel** (Wasserstands-Zeiger) sind in das Höhennetz erster Ordnung einzubeziehen. Je nach dem Resultate dieser Messungen wird später der für ganz Europa giltige Nullpunkt der absoluten Höhen bestimmt werden". — *b.* Hat man in mehreren zusammenhängenden Polygonen (wie z. B. in I—IV) alle Strecken (wie hier 1—13, wo die Pfeile je nach dem höhern Punkte gerichtet sind) nivelliert, und bezeichnet man den Schlussfehler jedes Polygones mit $\triangle$ und dessen Nummer, den Fehler jeder Strecke aber mit δ und deren Nummer, so bestehen offenbar die Gleichheiten



$$\begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 - \delta_3 - \delta_4 + \delta_5 &= \triangle_{I} \\ \delta_5 + \delta_6 - \delta_7 + \delta_8 &= \triangle_{II} \\ \delta_9 + \delta_{10} - \delta_{11} - \delta_4 - \delta_8 &= \triangle_{III} \\ \delta_3 + \delta_{13} + \delta_{12} - \delta_{11} &= \triangle_{IV} \end{aligned}$$

aus welchen man in entsprechender Weise, wie es (429) für die Winkelfehler eines Netzes gehalten wurde, die δ bestimmen kann. — *c.* Über den Fortgang der betreffenden Arbeiten und Besprechungen kann man sich am besten aus den seit 1863 regelmässig erschienenen Verhandlungen und Generalberichten der internationalen Gradmessungs-Kommission belehren.

434. Das sog. Geoid und die internationale Erdmessung. — Schon **Bessel** erkannte, dass das von ihm (428) berechnete und seinen Namen tragende Erdellipsoid nicht die eigentliche mathematische, auf allen Schwererichtungen senkrecht stehende Erdform, das sog. **Geoid**, sondern nur eine sich diesem letztern möglichst anschliessende regelmässige Fläche ist [a], und es hat sich denn auch die Geodäsie seither zur Hauptaufgabe gemacht, die Abweichungen des Geoids von jenem Ellipsoide zu ermitteln [b], ja es ist 1862 durch **Baeyer** wesentlich zu diesem Zwecke eine Vereinigung gegründet worden, welche sich aus bescheidenen Anfängen nach und nach zu einer internationalen aufgeschwungen hat und wohl nicht ruhen wird, bis jene Aufgabe gelöst ist [c].

Zu 434: *a.* **Bessel** definierte in seiner Schrift von 1838 (vgl. 427) die bei astronomisch-geodätischen Arbeiten in Betracht kommende Figur der Erde als „diejenige Fläche, in welcher sich die Oberfläche des Wassers eines mit dem Meere zusammenhängenden, die Erde bedeckenden Netzes von Kanälen befinden würde“, — sagte wohl auch, dass sich sein Ellipsoid zur wirklichen Gestalt der Erde „wie der ruhige Spiegel eines Sees zu dessen schwach bewegter Oberfläche“ verhalte. — Den Namen **Geoid** soll zuerst **Listing** in seiner Abhandlung von 1873 (vgl. c) vorgeschlagen haben. — *b.* Ich beschränke mich darauf, anzuführen, dass sich namentlich auch Ph. **Fischer** und J. H. **Pratt** (vgl. ihre Schriften in c) grosse Verdienste um diese neuere Entwicklung der Geodäsie erwarben, und verweise im übrigen auf die unten (am Schlusse von c) noch zu vervollständigende Fachlitteratur. — *c.* Schon im März 1833 sagte **Bessel** (vgl. pag. 59 seiner „Vorlesungen“): „Während man früher glaubte durch Vermehrung der Genauigkeit der Messung kleinerer Bögen alles Erforderliche leisten zu können, hat man jetzt erkannt, dass man nur von weit ausgedehnten Unternehmungen erheblichen Nutzen ziehen kann, — von so weit ausgedehnten, dass die Unregelmässigkeiten der Figur gegen die Grösse der Erdfläche, welche von der Messung bedeckt wird, verschwinden. **Dieses erfordert weniger neue Gradmessungen als eine Verbindung der schon vorhandenen untereinander.** Es fehlt nur noch wenig und man wird Messungen besitzen, welche, ohne Unterbrechung, von den Balearischen Inseln bis nach Lappland, und von dem nördlichen Teile von Schottland bis nach Dalmatien gehen“. In weiterer Ausführung dieses Gedankens wurde sodann einige Decennien später durch Bessels langjährigen Mitarbeiter **Baeyer** verschiedenen Staaten 1861 ein „Entwurf zu einer mittel-europäischen Gradmessung“ unterbreitet, und dieser wurde so beifällig aufgenommen, dass nicht nur alsbald die gewünschten Ergänzungsarbeiten angeordnet wurden und für deren einheitliche Durchführung Abgeordnete der sämtlichen Länder zu einer internationalen Kommission zusammentraten, sondern sogar der ursprüngliche Plan noch bedeutend ausgedehnt werden konnte: Abgesehen davon, dass durch den Beitritt anderer Länder die „mitteleuropäische“ schon 1867 in eine „europäische“ und 1886 sogar in eine „internationale Erdmessung“ überging, sind zu der anfänglich in Aussicht genommenen Aufgabe, eine Kette von Punkten zu erhalten, welche sowohl astronomisch durch Länge und Breite gut bekannt, als geodätisch durch Polarcoordinaten sicher aufeinander bezogen seien, noch Pendelmessungen (432) und Nivellements (433) hinzugekommen, während überdies durch Gründung eines „Bureau international des poids et mesures“ die nötigen Garantien geboten wurden, dass die in den verschiedenen Ländern angewandten Längeneinheiten miteinander übereinstimmen. Es unterliegt gegenwärtig wohl keinem Zweifel mehr, dass die erst von **Baeyer** und seit seinem Tode von **Ibannez** mit ebensoviel Liebe als Einsicht geleitete Arbeit binnen kurzem die wichtigsten Aufschlüsse geben und für den Erstgenannten das schönste Denkmal bilden wird. — Zum Schlusse führe ich zur Ergänzung der geodätischen Litteratur noch folgende Schriften auf: „Louis **Puissant** (La Ferme in Seine-et-Marne 1769 — Paris 1843; Prof. geod. und Akad. Paris; vgl. „Eloge“ durch Elie de Beaumont 1870), Traité de géodésie. Paris 1805 in 4. (3 éd. 1842 in 2 Vol.), — **Francoeur,** Géodésie. Paris 1835 in 8. (6 éd. 1878), — Alexei Pawlowitch **Bolotof** (Russland 1803 — Frankreich 1853; Cursus der Geodäsie. Petersburg 1836—37, 2 Bde. in 8. (russisch; 2. A. 1845—49), — **Gauss,** Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Göttingen 1844—47 in 4., — Philipp **Fischer** (Darmstadt

1818 — ebenda 1887; Prof. math. Darmstadt), Lehrbuch der höhern Geodäsie. Darmstadt 1845—46, 2 Bde. in 8., und: Untersuchungen über die Gestalt der Erde. Darmstadt 1868 in 8., — George Gabriel **Stokes** (Skreen in Irland 1819 geb.; Prof. math. Cambridge), On the variation of gravity at the surface of the earth (Trans. Cambr. 1849; vgl. auch spätere Abh.), — J. H. **Pratt**, A treatise on attractions, Laplace's functions and the figure of the earth. London 1860 in 8. (4. ed. 1871), — **Baeyer**, Denkschrift über die Grösse und Figur der Erde. Berlin 1861 in 8., und: Wissenschaftliche Begründung der Rechnungsmethoden des Centralbureaus der europäischen Gradmessung (als Manuskript gedruckt), 3 Hefte in 4., — R. **Wolf**, Über die Bedeutung der sog. mittel-europäischen Gradmessung für die Kenntnis der Erde im Allgemeinen und für die Schweiz ins Besondere. Zürich 1862 in 8., — **Hansen**, Geodätische Untersuchungen. Leipzig 1865 in 8., — Carl Christopher Georg **Andrae** (Hjertebjerg auf Alphen 1812 geb.; Geh. Konferenzrat in Kopenhagen), Den Danske Gradmaaling. Kjöbenhavn 1867—84 in 4., und: Problèmes de la haute géodésie. Copenhague 1881—83, 3 Cah. in 4., — **Bremiker**, Studien über höhere Geodäsie. Berlin 1869 in 8., — **Listing**, Über unsere jetzige Kenntnis der Grösse und Gestalt der Erde (Gött. Nachr. 1873), — Aimé **Laussedat** (Moulins in Allier 1819 geb.; Oberst und Dir. Cons. des arts et métiers Paris), Sur l'emploi des signaux lumineux dans les opérations géodésiques (Compt. rend. 1874), — Anton **Kautzner** (Aussee in Steiermark 1838 geb.; Prof. math. Graz), Über Geschichte und Bedeutung alter und neuer Gradmessungen. Graz 1876 in 8., — W. **Jordan**, Handbuch der Vermessungskunde. Stuttgart 1877—78, 2 Bde. in 8. (2. A. 1888), — Georg Carl Christian **Zachariae** (Kopenhagen 1835 geb.; Oberst und Dir. Gradmessung in Aarhus), Die geodätischen Hauptpunkte und ihre Coordinaten. Deutsche Ausgabe von E. Lamp. Berlin 1878 in 8., — Heinrich **Bruns** (Berlin 1848 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Leipzig), Die Figur der Erde. Berlin 1878 in 4., — **Helmert**, Die mathematischen und physikalischen Theorien der höhern Geodäsie. Leipzig 1880—84, 2 Bde. in 8., — **Bauernfeind**, Das bayerische Präcisionsnivellement und seine Beziehungen zur europäischen Gradmessung. München 1880 in 8., — A. R. **Clarke**, Geodesy. Oxford 1880 in 8., — Enrico **Pucci**, Fondamenti di Geodesia. Milano 1883—87, 2 Vol. in 8., — Ignaz **Bischoff**, Über das Geoid. München 1889 in 8. (Vgl. A. N. 2844 von 1888), — Otto **Börsch** (Marburg 1817 — Berlin 1890; Sektionschef im k. preuss. geod. Inst.), Geodätische Literatur. Berlin 1889 in 4., — J. Howard **Gore**, A Bibliography of Geodesy. Washington 1889 in 4., — René **Benoit** (Montpellier 1844 geb.; Dir. Bur. internat. des poids et mes. Paris), Rapport sur la construction, les comparaisons et les autres opérations ayant servi à déterminer les équations des nouveaux prototypes métriques. Paris 1889 in 4., — Friedrich **Ris** (Bern 1841 geb.; Gymnasiall. und Dir. eidg. Eichstätte Bern), Zur Geschichte des internat. Mass- und Gewichtbüreaus und der neuen Prototype des Meters und des Kilogramms. Bern 1890 in 8., — Willy **Hergesell**, Über die Formel von G. G. Stokes zur Berechnung regionaler Abweichungen des Geoids vom Normalsphäroid. Strassburg 1891 in 4., — etc.".

XVII. Einfluss und Bestimmung von Parallaxe und Refraktion.

Il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout, que de savoir tout d'une chose.
(Pascal.)

435. Einfluss der Parallaxe auf die Coordinaten. — Aus dem schon früher (231) gegebenen Begriffe der täglichen Parallaxe eines Gestirnes lässt sich ihr Einfluss auf die Coordinaten desselben mit Hilfe der allgemeinen Formeln für die Transformation von Polarcoordinaten (93 : 15) auf ein Parallelsystem sehr leicht bestimmen [a]. So erhält man z. B., wenn a, d, R, r und a', d', R', r' wahre und scheinbare Rektascension, Deklination, Distanz und Radius des Gestirnes, ϱ, φ', t aber die geocentrischen Coordinaten des Beobachters bezeichnen, und π die Parallaxe des Gestirnes ist, die bequemen Näherungsformeln

$$\begin{aligned} a' - a &= A \cdot \mathrm{Si}\,(a - t) \cdot \mathrm{Se}\, d & \qquad d' - d &= D \cdot \mathrm{Si}\,(d - n) \cdot \mathrm{Cs}\, n \\ R' - R &= - \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \gamma & r' - r &= r \cdot \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\, \gamma \cdot \mathrm{Si}\, 1'' \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

wo die Hilfsgrössen A, D, n, $\mathrm{Co}\,\gamma$ nach

$$\begin{aligned} A &= \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' & \qquad \mathrm{Tg}\, n &= \mathrm{Tg}\, \varphi' \cdot \mathrm{Se}\,(a - t) \\ D &= \varrho \cdot \pi \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' & \mathrm{Co}\, \gamma &= \mathrm{Si}\, d \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' + \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(a - t) \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

zu berechnen sind [b]. — Für weitern Detail vgl. die Speciallitteratur [c].

Zu 435: *a.* Ersetzt man nämlich in 93 : 15 die Willkürliche u durch w, R durch die in der Einheit des Equatorradius gegebene Distanz ϱ des Beobachters vom Erdcentrum, r (nach 231) durch $1/\mathrm{Si}\,\pi$, und bezeichnet mit $\triangle$ das Verhältnis der Distanzen des Gestirnes von Oberfläche und Centrum, so erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \triangle \cdot \mathrm{Co}\, v' \cdot \mathrm{Co}\,(w' - w) &= \mathrm{Co}\, v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \pi \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Co}\,(w - W) \\ \triangle \cdot \mathrm{Co}\, v' \cdot \mathrm{Si}\,(w' - w) &= \qquad\quad\; \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \pi \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Si}\,(w - W) \\ \triangle \cdot \mathrm{Si}\, v' &= \mathrm{Si}\, v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \pi \cdot \mathrm{Si}\, V \end{aligned} \qquad \mathbf{3}$$

welche das Problem vollständig lösen, aber sich allerdings für die Anwendung in folgender Weise noch bequemer arrangieren lassen: Zunächst erhält man aus den zwei ersten 3

$$\mathrm{Tg}\,(w' - w) = \frac{\varrho \cdot \mathrm{Si}\, \pi \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Si}\,(w - W)}{\mathrm{Co}\, v - \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \pi \cdot \mathrm{Co}\, V \cdot \mathrm{Co}\,(w - W)} \qquad \mathbf{4}$$

woraus sich (40 : 23, 24) sofort die Reihe

$$w' = w + \frac{\varrho \cdot Si\,\pi \cdot Co\,V}{Co\,v \cdot Si\,1''} \cdot Si\,(w - W) + \frac{\varrho^2\,Si^2\,\pi \cdot Co^2\,V}{2 \cdot Co^2\,v \cdot Si\,1''} \cdot Si^2\,(w - W) + \ldots \quad \mathbf{5}$$

ergiebt, von welcher in der Regel nur das erste Korrektionsglied zu berücksichtigen ist. Da ferner $Co\,x = 1 - 2\,Si^2\,{}^1/_2\,x$, so erhält man aus der ersten 3 mit Hilfe der zweiten

$$\triangle \cdot Co\,v' = Co\,v - \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Co\,V \cdot Co\,(w - W) + 2\,\triangle\,Co\,v' \cdot Si^2\,{}^1/_2\,(w' - w) =$$
$$= Co\,v - \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Co\,V \cdot Co\,[{}^1/_2\,(w' + w) - W] \cdot Se\,{}^1/_2\,(w' - w)$$

Setzt man nun

$$m \cdot Si\,n = Si\,V \qquad m \cdot Co\,n = Co\,V \cdot Co\,[{}^1/_2\,(w' + w) - W] \cdot Se\,{}^1/_2\,(w' - w) \quad \mathbf{6}$$

so geht diese letztere Beziehung und die dritte 3 in

$$\triangle \cdot Co\,v' = Co\,v - \varrho \cdot m \cdot Co\,n \cdot Si\,\pi \quad \mathbf{7} \qquad \triangle \cdot Si\,v' = Si\,v - \varrho \cdot m \cdot Si\,n \cdot Si\,\pi \quad \mathbf{8}$$

über und hieraus folgt, wenn man $8 \cdot Co\,v - 7 \cdot Si\,v$ durch $8 \cdot Si\,v + 7 \cdot Co\,v$ dividiert,

$$Tg\,(v' - v) = \frac{\varrho \cdot m \cdot Si\,\pi \cdot Si\,(v - n)}{1 - \varrho \cdot m \cdot Si\,\pi \cdot Co\,(v - n)} \quad \mathbf{9}$$

woraus sich entsprechend wie oben die Reihe

$$v' = v + \frac{\varrho \cdot m \cdot Si\,\pi}{Si\,1''} \cdot Si\,(v - n) + \frac{\varrho^2 \cdot m^2 \cdot Si^2\,\pi}{2 \cdot Si\,1''} \cdot Si\,2\,(v - n) + \ldots \quad \mathbf{10}$$

ergiebt. Endlich erhält man aus $8 \cdot Co\,n - 7 \cdot Si\,n$

$$\triangle \cdot Si\,(v' - n) = Si\,(v - n) \quad \mathbf{11} \quad \text{und somit} \quad r' : r = 1 : \triangle = Si\,(v' - n) : Si\,(v - n) \quad \mathbf{12}$$

Um diese Formeln auf die gewöhnlichen drei Coordinatensysteme anzuwenden, hat man einfach

die Grössen . . .	w	v	w'	v'	W	V
für den Horizont mit	w	$90^0 - z$	w'	$90^0 - z'$	0	$90^0 - \Delta\varphi$
- den Equator -	$-a$	d	$-a'$	d'	$-t$	φ'
- die Ekliptik -	$-l$	b	$-l'$	b'	$-L$	B

zu vertauschen, wo φ' und t geocentrische Breite und Sternzeit, B und L aber ihre nach 197 vom Equator auf die Ekliptik transformierten Werte bezeichnen, und endlich $\triangle\varphi$ der Überschuss der geographischen über die geocentrische Breite ist. — *b.* Nach oben erhält man z. B. für den Equator aus 5, 6 und 10, wenn man $Si\,\pi$ durch $\pi \cdot Si\,1''$ ersetzt und die spätern Glieder vernachlässigt,

$$a' = a + \varrho \cdot \pi \cdot Co\,\varphi' \cdot Se\,d \cdot Si\,(a - t) \qquad d' = d + \varrho \cdot m \cdot \pi \cdot Si\,(d - n) \quad \mathbf{13}$$

wo $m \cdot Si\,n = Si\,\varphi' \qquad m \cdot Co\,n = Co\,\varphi' \cdot Co\,[{}^1/_2\,(a' + a) - t] \cdot Se\,{}^1/_2\,(a' - a)$ **14**

Ferner ergiebt sich, wenn man die drei 3 quadriert und addiert

$$\triangle^2 = 1 + \varrho^2 \cdot Si^2\,\pi - 2\,\varrho\,Si\,\pi\,Co\,\gamma \quad \text{wo} \quad Co\,\gamma = Si\,d \cdot Si\,\varphi' + Co\,d \cdot Co\,\varphi' \cdot Co\,(a - t) \quad \mathbf{15}$$

woraus $\quad \triangle = 1 - \varrho \cdot \pi \cdot Co\,\gamma \cdot Si\,1'' \qquad 1 : \triangle = 1 + \varrho \cdot \pi \cdot Co\,\gamma \cdot Si\,1''$ **16**

folgt. Mit Hilfe des letztern Wertes erhält man aber nach 12

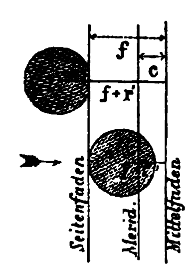
$$r' = r\,(1 + \varrho \cdot \pi \cdot Co\,\gamma \cdot Si\,1'') \quad \mathbf{17}$$

und mit Hilfe des erstern Wertes

$$R' - R = (\triangle - 1) \cdot R = (\triangle - 1) : \pi \cdot Si\,1'' = -\varrho \cdot Co\,\gamma \quad \mathbf{18}$$

Mit 13, 14, 17, 18 stimmen aber die 1 und 2 vollständig überein, sobald man sich noch die Annäherung erlaubt, in 14 für ${}^1/_2\,(a' + a)$ einfach a einzuführen. —

c. Die Formeln 13 und 17 gab schon **Lagrange** in seinem „Mémoire sur le passage de Vénus du 3 juin 1769 (Mém. Berl. 1766)", während sie erst **Oppolzer** in seinem „Lehrbuch der Bahnbestimmung (2. A. I 35)" auf die, wenn einmal für einen bestimmten Ort $Lg(\varrho \cdot Si\,\varphi')$ und mit einem Argumente x eine Tafel für $Lg(\varrho \cdot Co\,\varphi' \cdot Si\,x)$ berechnet ist, bequemere Form 1 gebracht zu haben scheint. Vgl. auch „Tob. **Mayer**, Inquisitio in parallaxin lunæ ejusdemque a terra distantiam (Comm. Gott. 1752), — **Euler**, De la parallaxe de la lune dans l'hypothèse de la terre sphéroïdique (Mém. Berl. 1749; lat. Comm. Petrop. 1779; deutsch Berl. Jahrb. 1783), — Joh. Friedrich **Wurm** (Nürtingen 1760 — Stuttgart 1833; erst Präceptor Nürtingen, dann Pfarrer Gruibingen, später Prof. math. Blaubeuren und Stuttgart), Praktische Anleitung zur Parallaxenrechnung samt neuberechneten Tafeln des Nonagesimus (Berl. Jahrb. 1808 und 1811), — J. J. **Littrow**, Beiträge zur Parallaxenrechnung (Berl. Jahrb. 1812), und: On Parallaxes (Mem. A. S. 1835), — etc." — Zum Schlusse mag noch zu Gunsten von 408 folgende Entwicklung nachgetragen werden: Bei Beobachtung des Antrittes eines Gestirnes des scheinbaren Radius r' an einen Seitenfaden des Passageninstruments hat man offenbar, wenn aus der Sternzeit t derselben auf die Durchgangszeit des Mittelpunktes durch den Meridian geschlossen werden soll, in 380 : 2', wo für unsere gegenwärtige Bezeichnung ohnehin δ in d' und τ in t — a' übergehen, die Grösse c, je nachdem man den vorgehenden oder nachfolgenden Rand beobachtet, durch $c - f \mp r'$ zu ersetzen, d. h. es ist



$$Si(c - f \mp r') = Si\,n \cdot Si\,d' + Co\,n \cdot Co\,d' \cdot Si(t - a' + m) \qquad \mathbf{19}$$

Bedenkt man aber, dass c, f, r', n, t — a' + m kleine Grössen sind, so erhält man

$$(t - a')\,Co\,d' = c - f \mp r' - m \cdot Co\,d' - n \cdot Si\,d' \qquad \mathbf{20}$$

oder, da aus 3', 3''' und $3' \cdot Si(w - W) + 3'' \cdot Co(w - W)$ in unserm Falle

$$\triangle \cdot Co\,d' = Co\,d - \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Co\,\varphi' \qquad \triangle \cdot Si\,d' = Si\,d - \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Si\,\varphi'$$

$$\triangle \cdot Co\,d' \cdot Si(t - a') = Co\,d \cdot Si(t - a) \quad \text{oder} \quad \triangle \cdot (t - a') \cdot Co\,d' = (t - a) \cdot Co\,d$$

folgen, wo nach 16

$$\triangle = 1 - \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Co\,\gamma = 1 - \varrho\,Si\,\pi \cdot Co(\varphi' - d)$$

ist,

$$a = t - (c - f \mp r)\,Se\,d + m + n \cdot Tg\,d + $$
$$+ \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Se\,d\,[(c - f)\,Co(\varphi' - d) - m \cdot Co\,\varphi' - n \cdot Si\,\varphi'] \qquad \mathbf{21}$$

Schreibt man nun diese Gleichung für jeden der n Faden auf, — nimmt aus sämtlichen Gleichungen das Mittel, — ersetzt $^1/_n \sum t$ durch das um die Uhrkorrektion $\triangle t$ vermehrte Fadenmittel t, und $^1/_n \sum f$ durch die Fadenkorrektion f, — und dividiert endlich, da sich die Zeiten, in welchen ein Interval durchlaufen wird, umgekehrt wie die Geschwindigkeiten verhalten, die ganze Korrektion von $t + \triangle t$ mit der Geschwindigkeit $(1 - \lambda)$ des Gestirnes, so erhält man

$$a = t + \triangle t - (I - II - III - IV) : (1 - \lambda) \qquad \mathbf{22}$$

wo

$$I = c \cdot Se\,d - n\,Tg\,d - m \qquad II = f \cdot Se\,d \qquad III = \pm r \cdot Se\,d \qquad \mathbf{23}$$

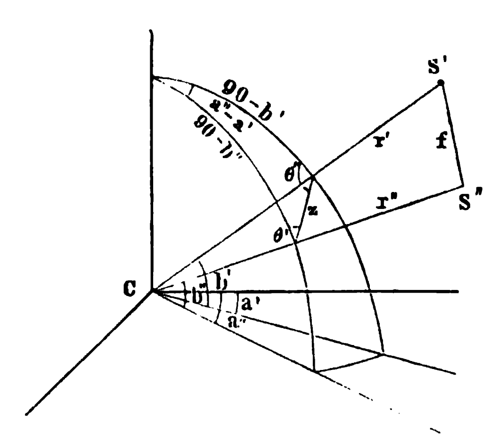
$$IV = \varrho \cdot Si\,\pi \cdot Se\,d \cdot [(c - f)\,Co(\varphi' - d) - m \cdot Co\,\varphi' - n \cdot Si\,\varphi'] \qquad \mathbf{24}$$

ist, d. h. die 23 die gewöhnlichen, die 24 die von der Parallaxe beeinflussten Korrektionen geben.

436. Die sog. Parallaxen der Distanz und Zeit. — Auch der Einfluss der Parallaxe auf die Distanz zweier Gestirne

und die Zeit, zu welcher letztere eine bestimmte Grösse erreicht, lässt sich leicht bestimmen, und es zeigt sich dabei, wie spätestens **Delisle** erkannte und sodann namentlich **Lagrange** scharf nachwies [a], dass es gewissermassen **Pole der Parallaxe** giebt, d. h. dass alle Punkte der Erde, für welche in demselben Momente die beiden Gestirne dieselbe Distanz voneinander zu haben scheinen, somit bei Durchgängen (446 u. f.) oder Bedeckungen (468 u. f.) dieselbe Phase gesehen wird, — und ebenso alle Punkte, für welche der Zeitunterschied zweier entsprechender Phasen dieselbe Grösse erreicht, je in einem Kreise liegen [b].

Zu 436: *a.* Vgl. 449 für die betreffenden Arbeiten von Jos. **Delisle**, — für diejenigen von **Lagrange** aber, dessen Entwicklungen wir hier zunächst folgen werden, dessen bereits (435 : c) erwähnte Abhandlung, — sowie endlich 447 für einen seither durch **Chauvenet** eingeschlagenen Weg, auf welchem eines der Hauptresultate noch rascher und allgemeiner erhalten wird. — *b.* Bezeichnen a′ b′ r′ und a″ b″ r″ die Coordinaten zweier in der Distanz f voneinander stehender Gestirne S′ und S″ der Parallaxen π' und π'' in Beziehung auf ein durch den Erdmittelpunkt C gelegtes Coordinatensystem, — α' β' ϱ' und α'' β'' ϱ'' aber ihre Coordinaten in Beziehung auf ein durch den Punkt A B R der Erdoberfläche gelegtes Parallelsystem, so hat man (435 : 5, 6, 10), wenn man die höhern Potenzen von π und in den Korrektionsgliedern den Unterschied von a und α vernachlässigt,



$$\alpha' = a' + \pi' \cdot x' \qquad \alpha'' = a'' + \pi'' \cdot x'' \qquad \beta' = b' + \pi' \cdot y' \qquad \beta'' = b'' + \pi'' \cdot y'' \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$\begin{aligned} x' &= R \cdot Co\,B \cdot Si\,(a' - A) \cdot Se\,b' \qquad & y' &= R\,[Si\,b' \cdot Co\,B \cdot Co\,(a' - A) - Co\,b' \cdot Si\,B] \\ x'' &= R \cdot Co\,B \cdot Si\,(a'' - A) \cdot Se\,b'' \qquad & y'' &= R\,[Si\,b'' \cdot Co\,B \cdot Co\,(a'' - A) - Co\,b'' \cdot Si\,B] \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

Bezeichnen ferner z und ζ die von C aus gesehene geocentrische und die von dem Punkte an der Erdoberfläche gesehene scheinbare Distanz der beiden Gestirne, so ist (s. Fig.)

$$Co\,z = Si\,b'' \cdot Si\,b' + Co\,b'' \cdot Co\,b' \cdot Co\,(a'' - a') \qquad \mathbf{3}$$

und analog

$$Co\,\zeta = Si\,\beta'' \cdot Si\,\beta' + Co\,\beta'' \cdot Co\,\beta' \cdot Co\,(\alpha'' - \alpha') \qquad \mathbf{4}$$

Substituiert man aber in 4 die aus 1 folgenden Werte

$$\begin{aligned} Si\,\beta'' &= Si\,b'' + \pi'' \cdot y'' \cdot Co\,b'' \cdot Si\,1'' \qquad & Si\,\beta' &= Si\,b' + \pi' \cdot y' \cdot Co\,b' \cdot Si\,1'' \\ Co\,\beta'' &= Co\,b'' - \pi'' \cdot y'' \cdot Si\,b'' \cdot Si\,1'' \qquad & Co\,\beta' &= Co\,b' - \pi' \cdot y' \cdot Si\,b' \cdot Si\,1'' \end{aligned}$$

$$Co\,(\alpha'' - \alpha') = Co\,(a'' - a') - (\pi'' \cdot x'' - \pi' \cdot x') \cdot Si\,(a'' - a') \cdot Si\,1''$$

so erhält man unter Benutzung von 3 und der unmittelbar aus der Figur folgenden Beziehungen

$$\text{Co}\, b'' : \text{Si}\, \theta'' = \text{Si}\, z : \text{Si}\,(a'' - a') = \text{Co}\, b' : \text{Si}\, \theta'$$

$$\text{Si}\, z \cdot \text{Co}\, \theta' = \text{Co}\, b'' \cdot \text{Si}\, b' - \text{Si}\, b'' \cdot \text{Co}\, b' \cdot \text{Co}\,(a'' - a') \qquad 5$$

$$\text{Si}\, z \cdot \text{Co}\, \theta'' = \text{Si}\, b'' \cdot \text{Co}\, b' - \text{Co}\, b'' \cdot \text{Si}\, b' \cdot \text{Co}\,(a'' - a')$$

sofort

$$\text{Co}\, \zeta = \text{Co}\, z + \begin{bmatrix} y'' \cdot \pi'' \cdot \text{Co}\, \theta' + x' \cdot \pi' \cdot \text{Co}\, b' \cdot \text{Si}\, \theta'' + \\ y' \cdot \pi' \cdot \text{Co}\, \theta'' - x'' \cdot \pi'' \cdot \text{Co}\, b'' \cdot \text{Si}\, \theta' \end{bmatrix} \cdot \text{Si}\, z \cdot \text{Si}\, 1'' \qquad 6$$

und setzt man daher einerseits

$$\pi'' = k \cdot \pi' \qquad \text{oder} \qquad k = \pi'' : \pi' = r' : r'' \qquad 7$$

sowie anderseits

$$\zeta = z - \pi' \cdot \Delta z \qquad \text{oder} \qquad \text{Co}\, \zeta = \text{Co}\, z + \pi' \cdot \text{Si}\, z \cdot \Delta z \cdot \text{Si}\, 1'' \qquad 8$$

so erhält man sofort

$$\Delta z = y' \cdot \text{Co}\, \theta'' + k \cdot y'' \cdot \text{Co}\, \theta' + x' \cdot \text{Co}\, b' \cdot \text{Si}\, \theta'' - k \cdot x'' \cdot \text{Co}\, b'' \cdot \text{Si}\, \theta' \qquad 9$$

Ersetzt man aber in 9 die x und y durch ihre Werte aus 2, dabei (wie es für ein blosses Korrektionsglied ganz gut angeht) zur Vereinfachung $R = 1$ setzend, und führt, erst die drei Hilfsgrössen L, M, N durch

$$\begin{aligned} L &= \text{Si}\, b' \cdot \text{Co}\, a' \cdot \text{Co}\, \theta'' + \text{Si}\, a' \cdot \text{Si}\, \theta'' + k\,[\text{Si}\, b'' \cdot \text{Co}\, a'' \cdot \text{Co}\, \theta' - \text{Si}\, a'' \cdot \text{Si}\, \theta'] \\ M &= \text{Si}\, b' \cdot \text{Si}\, a' \cdot \text{Co}\, \theta'' - \text{Co}\, a' \cdot \text{Si}\, \theta'' + k\,[\text{Si}\, b'' \cdot \text{Si}\, a'' \cdot \text{Co}\, \theta' + \text{Co}\, a'' \cdot \text{Si}\, \theta'] \\ N &= -\text{Co}\, b' \cdot \text{Co}\, \theta'' - k \cdot \text{Co}\, b'' \cdot \text{Co}\, \theta' \end{aligned} \qquad 10$$

und sodann die drei Hilfsgrössen α, β, γ durch

$$\gamma \cdot \text{Co}\, \alpha \cdot \text{Co}\, \beta = L \qquad \gamma \cdot \text{Si}\, \alpha \cdot \text{Co}\, \beta = M \qquad \gamma \cdot \text{Si}\, \beta = N \qquad 11$$

ein, so wird

$$\Delta z = \gamma\,[\text{Co}\, B \cdot \text{Co}\, \beta \cdot \text{Co}\,(\alpha - A) + \text{Si}\, B \cdot \text{Si}\, \beta] \qquad 12$$

Durch Quadrieren und Addieren der 11 erhält man, unter Benutzung der 10 und der aus der Figur folgenden Beziehungen,

$$\gamma^2 = L^2 + M^2 + N^2 = 1 - 2k \cdot \text{Co}\, z + k^2 \qquad 13$$

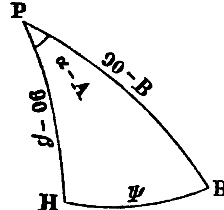
während aus dem ebenen Dreiecke S' C S''

$$f^2 = r'^2 + r''^2 - 2 \cdot r' \cdot r'' \cdot \text{Co}\, z \qquad 14$$

folgt. Es muss also wegen 7

$$f^2 = r''^2 \cdot \gamma^2 \qquad \text{oder} \qquad \gamma = f : r'' \qquad 15$$

sein. Anderseits folgt, wenn H die Coordinaten α und β hat und ψ seinen vom Erdcentrum aus gesehenen Winkelabstand vom Beobachter B bezeichnet,

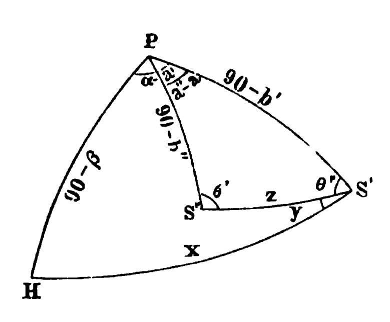


$$\text{Co}\, \psi = \text{Si}\, B \cdot \text{Si}\, \beta + \text{Co}\, B \cdot \text{Co}\, \beta \cdot \text{Co}\,(\alpha - A) \qquad 16$$

also hat man nach 8' und 12 die Beziehung

$$\zeta = z - \pi' \cdot \gamma \cdot \text{Co}\, \psi \qquad 17$$

welche die sog. **Parallaxe der Distanz** mit Hilfe der durch 15 und 16 definierten Grössen γ und ψ in einfachster Weise ausdrückt, und überdies zeigt, dass diese Parallaxe für alle Punkte, welche von H gleich weit abstehen, auch gleich gross ist, — oder also dass, wenn man von H, dem sog. **Pol der Parallaxe**, irgend einen Kreis beschreibt, für alle unter diesem Kreise befindlichen Punkte der Erde die beiden Gestirne in demselben Momente auch denselben scheinbaren Abstand voneinander besitzen. — Ein merkwürdiges Resultat ergiebt sich ferner, wenn man den Pol H der Parallaxe seiner Lage nach mit den beiden Gestirnen S' und S'' vergleicht: Bezeichnet nämlich x die Distanz von H und



S', so folgt aus beistehender Figur

$$\mathrm{Co}\,x = \mathrm{Si}\,b' \cdot \mathrm{Si}\,\beta + \mathrm{Co}\,b' \cdot \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}(\alpha - a') \qquad \mathbf{18}$$

während

$$\mathrm{Si}\,(\theta'' + y) = \mathrm{Si}\,(\alpha - a') \cdot \mathrm{Co}\,\beta : \mathrm{Si}\,x \qquad \mathbf{19}$$

$$\mathrm{Si}\,\beta = \mathrm{Co}\,x \cdot \mathrm{Si}\,b' + \mathrm{Si}\,x \cdot \mathrm{Co}\,b' \cdot \mathrm{Co}(\theta'' + y) \qquad \mathbf{20}$$

ist. Mit Benutzung von 11, 10 und 5 erhält man aber aus 18

$$\mathrm{Co}\,x = -k \cdot \mathrm{Si}\,z : \gamma \qquad \mathbf{21}$$

und somit unter Benutzung von 13

$$\mathrm{Si}\,x = \sqrt{1 - \mathrm{Co}^2 x} = (k \cdot \mathrm{Co}\,z - 1) : \gamma \qquad \mathbf{22}$$

Ferner erhält man aus 19 mit Hilfe von 11, 10, 5 und 22

$$\mathrm{Si}\,(\theta'' + y) = \frac{M \cdot \mathrm{Co}\,a' - L \cdot \mathrm{Si}\,a'}{\gamma \cdot \mathrm{Si}\,x} = \frac{\mathrm{Si}\,\theta''}{\gamma \cdot \mathrm{Si}\,x}(k \cdot \mathrm{Co}\,z - 1) = \mathrm{Si}\,\theta''$$

also $y = 0$ und man hat daher, um H zu erhalten, nur x von S' über S'' hinaus aufzutragen. — Bezeichnen t_1 und t_2 die Zeiten, wo vom Erdmittelpunkte aus zwei Wandelsterne (z. B. Sonne und Mond, Sonne und Venus, etc.) bei ihrer Annäherung aneinander, und dann wieder bei ihrem Auseinandergehen, eine bestimmte Distanz z zu haben scheinen, — T_1 und T_2 aber die Zeiten, zu welchen sie ein Beobachter in dieser Distanz zu sehen glaubt, — θ_1 und θ_2 endlich die stündlichen Bewegungen in Distanz bei Annäherung und Entfernung, so hat man, da nach 17 für den Beobachter den Zeiten t_1 und t_2 die Distanzen

$$\zeta_1 = z - \pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_1 \qquad \zeta_2 = z - \pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_2 \qquad \mathbf{23}$$

entsprechen, also für ihn bei der Annäherung die Distanz z schon $\pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_1 : \theta_1$ Stunden vorüber ist, und bei der Entfernung erst in $\pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_2 : \theta_2$ Stunden folgt,

$$T_1 = t_1 - \pi' \cdot \gamma_1 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_1 : \theta_1 \qquad T_2 = t_2 + \pi' \cdot \gamma_2 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_2 : \theta_2 \qquad \mathbf{24}$$

Es ist also für den Beobachter die Zwischenzeit der beiden gleichen Phasen

$$T_2 - T_1 = t_2 - t_1 + \pi' (\gamma_1 \,\mathrm{Co}\,\psi_1 : \theta_1 + \gamma_2 \,\mathrm{Co}\,\psi_2 : \theta_2) \qquad \mathbf{25}$$

oder es ist die sog. **Zeitparallaxe**

$$\tau = \pi' (w_1 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\,\psi_2) \quad \mathbf{26} \qquad \text{wo} \qquad w_1 = \gamma_1 : \theta_1 \qquad w_2 = \gamma_2 : \theta_2 \quad \mathbf{27}$$

oder also, wenn man für ψ_1 und ψ_2 nach 16 substituiert und die Hilfsgrössen Γ, $\mathit{\Delta}$, B und Ψ durch

$$\begin{aligned} \Gamma \cdot \mathrm{Co}\,\mathit{\Delta} \cdot \mathrm{Co}\,B &= w_1 \cdot \mathrm{Co}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Co}\,\alpha_2 \\ \Gamma \cdot \mathrm{Si}\,\mathit{\Delta} \cdot \mathrm{Co}\,B &= w_1 \cdot \mathrm{Co}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_1 + w_2 \cdot \mathrm{Co}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha_2 \\ \Gamma \cdot \mathrm{Si}\,B &= w_1 \cdot \mathrm{Si}\,\beta_1 \cdot + w_2 \cdot \mathrm{Si}\,\beta_2 \end{aligned} \qquad \mathbf{28}$$

und

$$\mathrm{Co}\,\Psi = \mathrm{Si}\,\mathrm{B} \cdot \mathrm{Si}\,B + \mathrm{Co}\,\mathrm{B} \cdot \mathrm{Co}\,B \cdot \mathrm{Co}\,(\mathrm{A} - \mathit{\Delta}) \qquad \mathbf{29}$$

einführt,

$$\tau = \pi' \cdot \Gamma \cdot \mathrm{Co}\,\Psi \qquad \mathbf{30}$$

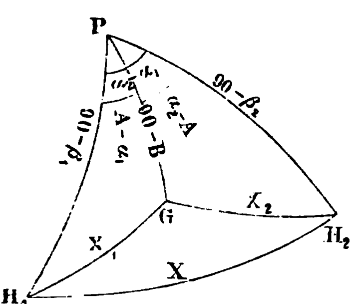
Da laut 29 die Hilfsgrösse Ψ offenbar die Distanz eines Punktes G der Coordinaten $\mathit{\Delta}$ und B von dem Beobachter vorstellt, und durch Quadrieren und Addieren der 28

$$\Gamma^2 = w_1^2 + w_2^2 + 2\,w_1 \cdot w_2 \cdot \mathrm{Co}\,X \qquad \mathbf{31}$$

folgt, wo

$$\mathrm{Co}\,X = \mathrm{Si}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\beta_2 + \mathrm{Co}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha_2 - \alpha_1) \qquad \mathbf{32}$$

ist, so dass X mit der vom Beobachter unabhängigen Distanz der den Zeiten t_1 und t_2 entsprechenden Pole H_1 und H_2 der Distanzparallaxe übereinkömmt, so kann man aus 30 schliessen, dass auch die Zeitparallaxe für alle Beobachter,



welche von G dieselbe Distanz haben, gleich gross ist, oder dass also G in diesem Sinne ebenfalls eine Art **Pol der Parallaxe** vorstellt. Sind nun entsprechend X_1 und X_2 die Distanzen von G zu H_1 und H_2, so hat man mit Hilfe von 28 und 32

$$\begin{aligned} \text{Co}\,X_1 &= \text{Si}\,\beta_1 \cdot \text{Si}\,B + \text{Co}\,\beta_1 \cdot \text{Co}\,B \cdot \text{Co}(A-\alpha_1) = \\ &= (w_1 + w_2 \cdot \text{Co}\,X) : \Gamma \\ \text{Co}\,X_2 &= \text{Si}\,\beta_2 \cdot \text{Si}\,B + \text{Co}\,\beta_2 \cdot \text{Co}\,B \cdot \text{Co}(A-\alpha_2) = \\ &= (w_2 + w_1 \cdot \text{Co}\,X) : \Gamma \end{aligned} \qquad 33$$

und hieraus

$$\text{Si}\,X_1 = w_2 \cdot \text{Si}\,X : \Gamma \qquad \text{Si}\,X_2 = w_1 \cdot \text{Si}\,X : \Gamma \qquad 34$$

Aus 33 und 34 erhält man aber $X_1 + X_2 = X$, also fällt G in $H_1 H_2$, und zwar, wenn $w_1 = w_2$ ist, offenbar in die Mitte. Ist dagegen $w_2 = w_1 + \triangle w$, wo aber (27, 15) $\triangle w$ als kleine Grösse betrachtet werden darf, so erhält man nach 31 nahe

$$\Gamma = 2\,w_1 \sqrt{1 + \triangle w : w_1} \cdot \text{Co}\,{}^1\!/_2\,X = 2\,w_1\,\text{Co}\,{}^1\!/_2\,X : (1 - {}^1\!/_2\,\triangle w : w_1) \qquad 35$$

und somit nach 33, wenn

$$\triangle w' = \triangle w \cdot \text{Tg}\,{}^1\!/_2\,X : (2\,w_1 \cdot \text{Si}\,1'') \qquad 36$$

gesetzt wird,

$$\text{Co}\,X_1 = \frac{w_1(1 + \text{Co}\,X) + \triangle w \cdot \text{Co}\,X}{2\,w_1 \cdot \text{Co}\,{}^1\!/_2\,X} \times \left(1 - \frac{\triangle w}{2\,w_1}\right) = \text{Co}\left(\frac{X}{2} + \triangle w'\right)$$

oder $X_1 = {}^1\!/_2\,X + \triangle w'$, so dass man auch in diesem Falle G durch Berechnung von $\triangle w'$ leicht finden kann. — Anhangsweise ist noch hervorzuheben, dass für zwei Gestirne, die eine kleine geocentrische Distanz z haben, auch nahe $\gamma = 1 - k$ ist, wo (7) $k = \pi'' : \pi'$, also nach 17 auch nahe

$$\zeta = z \pm (\pi' - \pi'') \cdot \text{Co}\,\psi \qquad 37$$

wo sich das obere Zeichen auf Annäherung, das untere auf Entfernung der beiden Gestirne bezieht. Bezeichnet nun T' die Pariserzeit, zu welcher ein Beobachter die geocentrisch zur Pariserzeit T vor sich gehende äussere oder innere Berührung der beiden Gestirne der Halbmesser s' und s'' sieht, so muss nach 37

$$s'' \pm s' = [s'' \pm s' + (T' - T) \cdot dz : dt] \pm (\pi' - \pi'') \cdot \text{Co}\,\psi$$

sein, sofern $dz : dt$ die Veränderung von z in einer Zeiteinheit bezeichnet, welche nach 3 mit Hilfe der Tafeln berechnet werden kann, also einen bestimmten Wert α hat. Es muss also

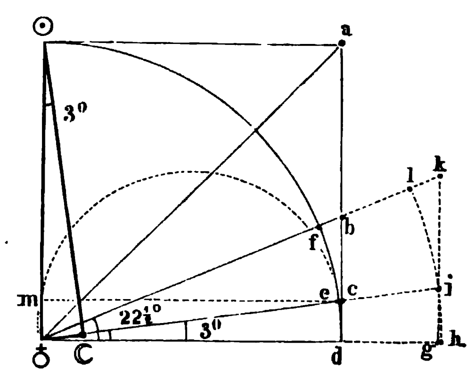
$$T' = T \mp (\pi' - \pi'') \cdot \text{Co}\,\psi : \alpha \qquad 38$$

sein, wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere Zeichen für den Austritt gilt und das zweite Glied die sog. **Zeitparallaxe** darstellt.

437. Die Bestimmungen von Aristarch. — Die ältesten Ansichten über die Distanzen der Gestirne sind schon früher (230) besprochen worden und es wurde schon damals hervorgehoben, welch' ungemeiner Fortschritt es war, als es **Aristarch** gelang, eine erste geometrische Methode zu ihrer Bestimmung aufzufinden [a]. Diese Methode bestand darin, dass er, gestützt auf die richtige Über-

legung, dass zur Zeit der Viertel oder einer sog. **Dichotomie** [b], Sonne, Mond und Erde ein am Monde rechtwinkliges Dreieck bilden müssen, in einer dem damaligen Bestande der Geometrie angemessenen Weise zeigte [c], wie man aus dem scheinbaren, von ihm zu 87° angenommenen Abstande, welchen Mond und Sonne zu jener Zeit besitzen, das Verhältnis ihrer Distanzen von der Erde ableiten könne [d]. Wenn nun auch das praktische Ergebnis seiner Bestimmung, dass nämlich jenes Verhältnis zwischen $^1/_{18}$ und $^1/_{20}$ liegen werde, noch viel zu wünschen übrig liess [e], so wurden durch dasselbe dennoch die Anschauungen über das Weltgebäude bereits wesentlich berichtigt [f], und es ist zu bedauern, dass ein Lapsus [g] den genialen Mann, trotz allem angewandten Scharfsinne, nicht wenigstens auch zu einer entsprechend guten Ermittlung der absoluten Distanzen und Grössen gelangen liess [h].

Zu 437: *a.* Die betreffende, von **Aristarch** unter dem Titel „Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου καὶ σελήνης (De magnitudinibus et distantiis Solis et Lunæ)“ verfasste Schrift wurde „Venetiis 1498 in fol.“ durch Georg **Valla** und „Pisauri 1571 in 4.“ durch F. **Commandine** in lateinischer Sprache herausgegeben; ferner griechisch 1688 zu Oxford durch **Wallis**, — französisch 1821 zu Paris durch Joseph **Fortia d'Urban** (Avignon 1756 — Paris 1843; früher Offizier, dann Privatgel. Paris), — deutsch 1854 zu Freiburg durch **Nokk**, — etc. Sie beginnt mit den sechs Thesen: „1) Der Mond erhält sein Licht von der Sonne. 2) Die Erde kann als ein Punkt im Centrum der Mondbahn betrachtet werden. 3) Wenn uns der Mond halbiert erscheint, so befinden wir uns in der Ebene, welche den erleuchteten von dem dunkeln Teile trennt. 4) Zu dieser Zeit steht der Mond um $^1/_{30}$ des Quadranten weniger als ein Quadrant von der Sonne ab. 5) Die Breite des Erdschattens in der Distanz des Mondes ist gleich zwei Monden. 6) Der vom Mond am Himmel eingenommene Bogen ist gleich $^1/_{15}$ eines Zeichens“, und diesen folgen 19 Propositionen, von welchen die wichtigsten unten ebenfalls wörtlich folgen werden. — *b.* Für die Ableitung des Wortes **Dichotomie** vgl. 208. — *c.* Die von **Aristarch** als Nro. 8 aufgestellte Proposition besagt: „Die Distanz, in welcher die Sonne sich von der Erde befindet, ist mehr als 18 mal und weniger als 20 mal so gross als diejenige, in welcher der Mond steht“, wie dies für uns in der That unmittelbar aus den Thesen 3 und 4 hervorgeht, da nach denselben Dreieck ⊙ ☾ ♁ die Winkel ☾ = 90° und ♁ = 87° besitzt, und wir wissen, dass Co 87° ≕ $^1/_{19}$ ist. Die Zeit von **Aristarch** hatte dagegen von solchen Verhältnissen noch keinen Hochschein, und es war daher eine wissenschaftliche That, einen ersten Weg zu ihrer annähernden Bestimmung aufzufinden. — *d.* Der



von **Aristarch** eingeschlagene Weg ist folgender: Beschreiben wir über der Hypotenuse des Dreieckes $\odot$ ☾ ♁ ein Quadrat mit Diagonale und Quadrant, — halbieren $\angle$ a ♁ d durch ♁ b, — verlängern ♁ ☾ über c hinaus bis zu einem beliebigen Punkte i, — ziehen durch diesen gk $\perp$ ♁ d und von ♁ aus den Kreisbogen lh, — ferner em $\parallel$ ♁ d, — und endlich über ♁ e einen Halbkreis, der notwendig auch durch m geht, so kann man nach damals bereits bekannten Sätzen folgende Reihe von Schlüssen machen: Zunächst ist

$$\frac{bd}{cd} = 1 + \frac{bc}{cd} = 1 + \frac{ki}{ig} = 1 + \frac{\Delta\, ki\text{♁}}{\Delta\, gi\text{♁}} > 1 + \frac{\text{Sect. } li\text{♁}}{\text{Sect. } hi\text{♁}} =$$

$$= \frac{\text{Sect. } lh\text{♁}}{\text{Sect. } hi\text{♁}} = \frac{22^1/_2}{3} = \frac{15}{2} \qquad \text{also} \qquad \frac{bd}{cd} > \frac{15}{2} \qquad \mathbf{1}$$

$$\frac{ad}{bd} = 1 + \frac{ab}{bd} = 1 + \frac{a\text{♁}}{d\text{♁}} = 1 + \sqrt{2} > 1 + \sqrt{49:25} =$$

$$= 1 + \frac{7}{5} = \frac{12}{5} \qquad \text{also} \qquad \frac{ad}{bd} > \frac{12}{5} \qquad \mathbf{2}$$

woraus

$$\frac{ad}{cd} = \frac{bd}{cd} \cdot \frac{ad}{bd} > 18 \qquad \mathbf{3}$$

und somit

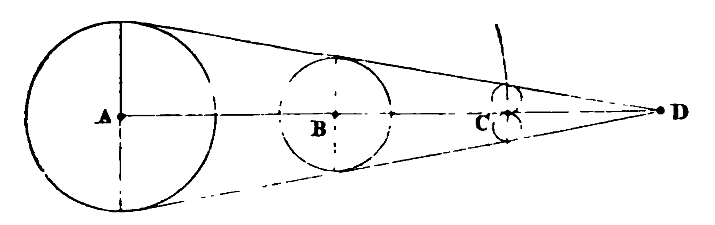
$$\frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} = \frac{\text{♁}e}{\text{♁}m} > \frac{ad}{cd} > 18 \qquad \text{also} \qquad \frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} > 18 \qquad \mathbf{4}$$

folgt, also die in Proposition 8 aufgestellte untere Grenze als richtig erwiesen ist. Die obere Grenze aber ergiebt sich aus dem Umstande, dass dem Bogen ♁ m des Hilfskreises ein Winkel von 3^0 als Peripheriewinkel entspricht, dass er also $6^0 = {}^1/_{10} \cdot 60^0$ hält, somit die Sehne ♁ m = ♁ ☾ grösser als ${}^1/_{10}$ der dem Radius ${}^1/_2$ ♁ e gleichen Sehne von 60^0, folglich

$$\frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} = \frac{\text{♁}e}{\text{♁}m} < \frac{\text{♁}e}{{}^1/_{10} \cdot {}^1/_2\, \text{♁}e} = 20 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\text{♁}\odot}{\text{♁☾}} < 20 \qquad \mathbf{5}$$

sein muss. — ***e.*** Vgl. 439. — ***f.*** Die Propositionen 9, 10 und 11 **Aristarchs** lauten der Reihe nach: „Wenn die Sonne ganz verfinstert ist, so umfasst ein bestimmter Kegel, der seine Spitze an unserm Auge hat, zugleich Sonne und Mond. — Der Durchmesser der Sonne ist mehr als 18 mal und weniger als 20 mal so gross als derjenige des Mondes. — Das Verhältnis der Sonne zum Monde liegt zwischen 5832 : 1 und 8000 : 1". Die erste derselben geht unmittelbar aus dem Faktum hervor, dass eine totale Sonnenfinsternis immer nur ganz kurze Zeit andauert, — und die zwei folgenden resultieren aus ihrer Verbindung mit Proposition 8. — ***g.*** Da aus Proposition 9 hervorgeht, dass der scheinbare Durchmesser des Mondes nahe gleich dem der Sonne ist, und **Aristarch** letztern nahe richtig zu ${}^1/_{720}$ des Umkreises oder ${}^1/_{60}$ eines Zeichens annahm, wie (205) aus dem Zeugnisse von Archimedes mit aller Sicherheit folgt, so kann man kaum begreifen, wie er dazu kam, dem Monddurchmesser in These 6 den vierfachen Wert desjenigen der Sonne beizulegen, — dagegen allerdings nur zu gut, dass die auf dieser falschen Grundlage aufgebaute Proposition 12: „Der Durchmesser des Mondes enthält weniger als ${}^2/_{45}$ und mehr als ${}^1/_{30}$ seiner Distanz von der Erde" trotz dem dafür gegebenen (auf zwei mit $\text{Tg } 1^0 < {}^1/_{45} \cdot \text{Tg } 45^0$ und $\text{Ch } 2^0 > {}^1/_{30} \text{ Ch } 60^0$ übereinstimmenden Sätzen beruhenden) Beweise ebenfalls total unrichtig ist. — ***h.*** Die von **Aristarch** aufgestellten Propositionen 16 und 18: „Das Verhältnis des Durchmessers der Sonne zum Durchmesser der Erde ist grösser als ${}^{19}/_3$ und kleiner als ${}^{43}/_6$, — und: Das Verhältnis des Durchmessers des Mondes zum Durchmesser der Erde ist grösser als ${}^{19}/_{60}$ und kleiner als ${}^{12}/_{108}$" wurden von ihm

in folgender Weise bewiesen. Sind A, B, C die Mittelpunkte von Sonne, Erde und Mond zur Zeit einer centralen Mondfinsternis und ist D die Spitze des



Schattenkegels, so hat man mit Hilfe von Proposition 8 successive

$$18 < \frac{AB}{BC} < 20 \qquad 19 < \frac{AC}{BC} < 21 \qquad \frac{1}{19} > \frac{BC}{AC} > \frac{1}{21} \qquad \text{also} \qquad \frac{18}{19} < \frac{AB}{AC} < \frac{20}{21} \qquad 6$$

Anderseits hat man, da die Breite des Erdschattens in der Distanz des Mondes nach These 5 gleich zwei Monden, somit nach Proposition 10 kleiner als $^1/_9$ und grösser als $^1/_{10}$ des Sonnendurchmessers ist,

$$\frac{1}{9} > \frac{CD}{AD} > \frac{1}{10} \qquad \text{also} \qquad \frac{8}{9} < \frac{AC}{AD} < \frac{9}{10} \qquad 7$$

folglich durch Multiplikation von 6 und 7

$$\frac{16}{19} < \frac{AB}{AD} < \frac{18}{21} \qquad \text{oder} \qquad \frac{3}{19} > \frac{BD}{AD} > \frac{3}{21} \qquad 8$$

Bezeichnet man daher die Durchmesser von Sonne, Erde und Mond mit s, e und m, so folgt wegen

$$\frac{s}{e} = \frac{AD}{BD} \qquad \text{nach 8 sofort} \qquad \frac{19}{3} < \frac{s}{e} < \frac{42}{6} \qquad 9$$

und, da nach 4 und 5

$$\frac{1}{20} < \frac{m}{s} < \frac{1}{18} \qquad \text{ist, wegen 9} \qquad \frac{19}{60} < \frac{m}{e} < \frac{42}{108} \qquad 10$$

womit die vorstehenden Propositionen bewiesen sind, da dieselben von den 9 und 10 nur darin abweichen, dass **Aristarch** die Zahl 42 infolge einer hier zu übergehenden Düftelei schliesslich durch 43 ersetzen zu müssen glaubte. — Die Propositionen 17 und 19 endlich gehen aus den 16 und 18 einfach hervor, indem man die in letztern gegebenen Verhältnisse durch kubieren auf die Kugeln überträgt. — Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass, wenn M die Distanz des Mondes von der Erde bezeichnet, nach der allerdings numerisch unrichtigen Proposition 12

$$\frac{45}{2} < \frac{M}{m} < 30 \qquad \text{und somit nach 10} \qquad \frac{57}{8} < \frac{M}{e} < \frac{105}{9} \qquad 11$$

oder eine erste absolute Distanzbestimmung des Mondes folgt, und man sich zu verwundern hat, dass **Aristarch** seine Schrift nicht mit einer entsprechenden Proposition 20 abschloss. Warum er dies verabsäumte, wissen wir ebensowenig als ob er seinen Lapsus später erkannte und seine Rechnungen revidierte.

438. Die Bestimmungen von Hipparch. — Als der ausgezeichnete **Hipparch** den glücklichen Gedanken hatte, die uns (246) bereits bekannten Verhältnisse beizuziehen, welche bei einer Mondfinsternis statthaben, gelang es ihm mit Hilfe des von **Aristarch**

übernommenen Verhältnisses $^1/_{19}$ in leichter Weise, für die Parallaxen von Sonne und Mond die Näherungswerte 3′ und 57′ zu ermitteln [a], und sodann unter Anwendung der von ihm eingeführten Sehnenrechnung (61) auch die seinem Vorgänger höchstens in viel unvollkommnerer Weise gelungenen Bestimmungen der absoluten Distanzen und Grössen der beiden Gestirne in Erdradien zu erhalten [b].

Zu 438: *a.* Führt man in die, unter Weglassung des erst einer spätern Zeit angehörenden Erfahrungsfaktors, aus 246 : 1 hervorgehende Relation

$$\odot + ☾ = r + \varphi \qquad 1$$

entsprechend der Aristarch'schen Bestimmung (437) $☾ = 19 \cdot \odot$ ein, — ferner (205) $r = 15'$, — und nimmt überdies an, die Dauer einer totalen Mondfinsternis betrage etwa $2^1/_2{}^h$, die tägliche Verspätung des Mondes aber $51^m = 765'$, so erhält man offenbar $\varphi \risingdotseq {}^1/_{24} \cdot 765 \cdot 1^1/_4 = 40'$, und somit

$$20 \cdot \odot \risingdotseq 55' \qquad \text{oder} \qquad \odot \risingdotseq 3' \qquad ☾ \risingdotseq 57' \qquad 2$$

— *b.* Bezeichnet man sodann mit D und R Distanz und Radius der Sonne, mit Δ und ϱ Distanz und Radius des Mondes, und mit r' den Erdradius, so erhält man sofort

$$D = \frac{r'}{\mathrm{Si}\,\odot} = \frac{2\,r'}{\mathrm{Ch} \cdot 2\,\odot} = 1200 \cdot r' \qquad R = D \cdot \mathrm{Si}\, r = \frac{D}{2} \cdot \mathrm{Ch}\, 2\,r = 5^1/_2\, r' \qquad 3$$

$$\Delta = \frac{r'}{\mathrm{Si}\,☾} = \frac{2\,r'}{\mathrm{Ch} \cdot 2\,☾} = 59 \cdot r' \qquad \varrho = \Delta \cdot \mathrm{Si}\, r = \frac{\Delta}{2} \cdot \mathrm{Ch}\, 2\,r = {}^1/_4\, r' \qquad 4$$

Diese Zahlen, welche mit den von **Hipparch** selbst ermittelten vollständig übereinstimmen, sind nun zwar, insoweit sie die Sonne betreffen, infolge der von **Aristarch** übernommenen 19, noch sehr unrichtig, — dagegen, insoweit sie den Mond betreffen, da sich für diesen der Haupteinfluss jener Zahl eliminiert, schon recht hübsche Annäherungen.

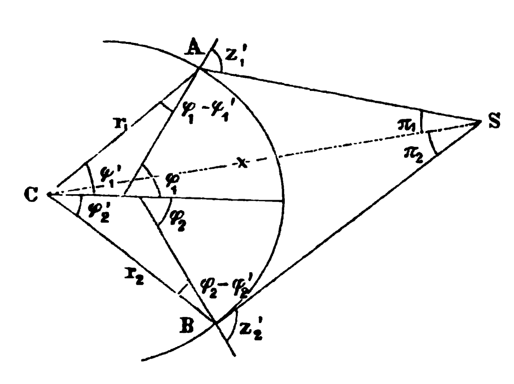
439. Die Revision der Hipparch'schen Werte. — Abgesehen von einigen kaum auf wirklichen Messungen beruhenden andern Angaben [a] und einigen einschlagenden, aber zu keinen sichern Resultaten führenden Versuchen von **Ptolemäus** [b], blieb man bis gegen Ende des 16. Jahrhunderts bei den von **Hipparch** erhaltenen Werten stehen, ja es waren erst die beiden Freunde **Kepler** und **Remus** [c], welche dessen grosse Sonnenparallaxe ernstlich beanstandeten [d]. Als sodann um die Mitte des 17. Jahrhunderts, und wahrscheinlich infolge eines von **Kepler** in seinen Ephemeriden auf 1619 ausgesprochenen Wunsches, Gottfried **Wendelin** [e] je zur Zeit des ersten Viertels wiederholt den scheinbaren Abstand von Sonne und Mond bestimmte, fand er im Mittel für denselben $89^0\,45' \risingdotseq \mathrm{Aco}\ {}^1/_{229}$ und hieraus ergiebt sich dann in der That, unter Benutzung der übrigen Daten Hipparchs, dass die Sonnenparallaxe von 3′ auf 14″ herabzusetzen ist, während die Mondparallaxe aus dem (438) angegebenen Grunde von dieser Veränderung nur unmerklich berührt wird [f].

Zu 439: *a.* Wie **Posidonius** bald nach der Zeit von Hipparch dazu kam, anzunehmen, es betrage die Distanz des Mondes $52^1/_3$, diejenige der Sonne aber 13095 Erdradien, weiss man absolut nicht und kann somit auch nicht entscheiden, ob die entsprechenden Parallaxen 65',9 und 15",6, von welchen erstere gegenüber Hipparch einen erheblichen Rückschritt, die zweite dagegen einen enormen Fortschritt konstatieren würde, als wirkliche Messungsresultate angesehen werden dürfen. So weit man jedoch die damaligen Instrumente und Verfahren kennt, muss man letzteres wenigstens in Beziehung auf die Sonnenparallaxe entschieden bezweifeln und geht kaum irre, wenn man sie als Ergebnisse einer blossen Spekulation betrachtet und mit **Ptolemäus** ignoriert. Und wenn wir in der etwa aus dem Ende des 13. Jahrhunderts stammenden Kosmographie des Syriers **Dimashqui** (1254? — 1327) Zahlen finden, welche mit ☾ $= 16^1/_3$' und ⨀ = 9",9 übereinstimmen, so haben wir es noch augenscheinlicher mit illusorischen Bestimmungen zu thun, zumal auch da wieder die leichter zu ermittelnde Grösse fehlerhafter geworden ist. — *b.* **Ptolemäus** versuchte namentlich die Mondparallaxe aus ihrem Einflusse auf die Sonnenfinsternisse und auf die Zenitdistanzen genauer zu bestimmen, — hatte jedoch wegen Mangel zureichender Beobachtungsmittel nicht den gewünschten Erfolg. — *c.* Johannes Rudrauff genannt **Remus** (Herda in Thüringen 1588? — Ruffach im Elsass 1632?) lebte längere Zeit als Leibarzt und Mathematicus des Kaisers Matthias in Wien, wurde auch auf einer Reise nach Italien mit Galilei persönlich bekannt. — *d.* **Kepler** kam beim Studium der Beobachtungen Tychos zur Überzeugung, dass die Parallaxe des Mars selbst bei dessen Opposition für die damaligen Beobachtungsmittel unmerklich sei, dass also dies für die Sonne noch in vermehrtem Masse der Fall sein müsse, und die Sonnenparallaxe somit jedenfalls nicht mehr als 1' betragen könne, — und **Remus** wurde (vgl. seinen 1628 aus Ruffach geschriebenen Brief in Epist. Kepl.) durch ähnliche Betrachtungen veranlasst, die Sonnenparallaxe sogar mindestens auf 17" herunterzusetzen oder die Distanz der Sonne wenigstens auf 12300 Erdradien zu erhöhen. Letzteres kam dann allerdings **Kepler** etwas zu stark vor und er schrieb (vgl. „Franz Dvorsky, Neues über Kepler. Prag 1880 in 8.°), bei Übersendung eines von Remus angefertigten Prognostikons, 1629 II 24 aus Sagan an Albrecht v. Waldstein: „**Hipparchus** hat die Sonne 1200 Erdboden hoch in Himmel hinauff gesetzt. **Ich** habe 3400 Erdboden höch daraus gemacht. **Remus** aber setzt noch 10000 Erdboden darzue, das Ihrer 14000 werden. Das muss ich nun leiden und den Nachkommen das Urtheil überlassen, welcher es besser gemachet". — *e.* Gottfried **Wendelin** (Herken bei Lüttich 1580 — Renaix 1667) war erst Korrektor in Lyon, dann Advokat in Paris, Pfarrer in den Niederlanden, und zuletzt Canonicus in Renaix. — *f.* **Wendelin** machte seine Beobachtungen 1650 unter Anwendung des Fernrohrs während einem Aufenthalte auf Majorka. — Den 14" entsprechen die Werte $D = 14733 \cdot r'$ und $R = 64^1/_4 \cdot r'$, deren ersterer zu Gunsten von **Remus** entscheidet.

440. Die Parallaxenbestimmung aus zwei Ständen. — Ein grösserer Fortschritt in der Parallaxenbestimmung wurde allerdings erst erzielt, als vor etwas mehr als zwei Jahrhunderten den Methoden von **Aristarch** und **Hipparch**, welche wir als Bestimmungen aus **Einem Stande** zusammenfassen können, solche aus **Zwei Ständen** substituiert wurden, d. h. als man anfing, nach Analogie der in der

praktischen Geometrie bei Ermittlung der Distanz eines unzugänglichen Punktes gebräuchlichen Weise zu progredieren. Allerdings erfordert auch diese Methode, welche schon früher (232) vorläufig erörtert wurde, hier dagegen ohne die damals angenommenen vereinfachenden Voraussetzungen durchgeführt werden soll [a], wie noch die folgenden Nummern belegen werden, die äusserste Sorgfalt und lässt sich, abgesehen vom Monde, direkt nur auf die Planeten Venus oder Mars zur Zeit ihrer in unterer Konjunktion oder Opposition stattfindenden Erdnähe anwenden, verschafft aber mit Hilfe des dritten Kepler'schen Gesetzes nichts destoweniger auch die Parallaxen der Sonne und der übrigen Planeten [b].

Zu 440: *a.* Sind nämlich A und B zwei auf demselben Erdmeridiane, aber unter wesentlich verschiedenen Polhöhen φ_1 und φ_2 gelegene Beobachtungspunkte, φ_1' und φ_2' deren geocentrische Breiten, r_1 und r_2 ihre Distanzen vom Erdcentrum, und endlich z_1' und z_2' die im Momente der Culmination eines Wandelsternes S gemessenen und für die Refraktion verbesserten Zenitdistanzen dieses letztern, so hat man, wenn π_1 und π_2 die parallaktischen Winkel an S bezeichnen, aus dem Viereck ACBS die Beziehungen



$$\pi_1 + \pi_2 = \\ = z_1' + z_2' - (\varphi_1 + \varphi_2) \quad 1$$

$$x = \frac{r_1 \cdot \mathrm{Si}(z_1' - \Delta\varphi_1)}{\mathrm{Si}\,\pi_1} = \frac{r_2 \cdot \mathrm{Si}(z_2' - \Delta\varphi_2)}{\mathrm{Si}\,\pi_2} \quad \text{wo } \Delta\varphi_1 = \varphi_1 - \varphi_1', \quad \Delta\varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_2' \quad 2$$

Führt man daher α durch

$$\mathrm{Tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{Si}\,\pi_1}{\mathrm{Si}\,\pi_2} = \frac{r_1 \cdot \mathrm{Si}(z_1' - \Delta\varphi_1)}{r_2 \cdot \mathrm{Si}(z_2' - \Delta\varphi_2)} \quad 3$$

ein, so dass α eine bekannte Grösse ist, so hat man nach goniometrischen Beziehungen

$$\mathrm{Tg}\frac{\pi_1 - \pi_2}{2} = \frac{\mathrm{Si}\,\pi_1 - \mathrm{Si}\,\pi_2}{\mathrm{Si}\,\pi_1 + \mathrm{Si}\,\pi_2} \cdot \mathrm{Tg}\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} = \mathrm{Tg}(\alpha - 45^0) \cdot \mathrm{Tg}\frac{\pi_1 + \pi_2}{2} \quad 4$$

kann somit successive nach 1 und 4 die halbe Summe und halbe Differenz der beiden π, folglich auch diese selbst, sodann nach 2 die Distanz x, und mit Hilfe dieser, wenn a den Radius des Equators bezeichnet, nach

$$\mathrm{Si}\,\Pi = a : x \qquad \text{oder} \qquad \Pi = a : (x \cdot \mathrm{Si}\,1'') \quad 5$$

auch die Equatoreal-Horizontal-Parallaxe von S berechnen. — Die dieser Rechnung zu Grunde liegende Voraussetzung, dass beide Beobachter genau unter demselben Meridiane stehen, also für sie die Culmination gleichzeitig eintrete, lässt sich nun allerdings höchst selten realisieren; dagegen kann man leicht die Beobachtung des Einen, unter Voraussetzung bekannter Längendifferenz und der Zeit proportionaler Veränderung der Deklination des Wandel-

sternes, durch Rechnung in den Punkt verlegen, wo sein Parallel den Meridian des Andern schneidet, sobald derselbe die Zenitdistanz bei zwei successiven Culminationen gemessen und somit deren stündliche Veränderung bestimmt hat. — *b.* Ist S ein Planet, so kennt man aus den Tafeln seine in Beziehung auf die mittlere Distanz Sonne-Erde als Einheit gegebene Distanz $\triangle$ von der Erde, und kann daher aus seiner Parallaxe auch die der Distanz 1 entsprechende Parallaxe $\pi = \Pi \cdot \triangle$, d. h. die Sonnenparallaxe, berechnen. — Anhangsweise mag noch hervorgehoben werden, dass man zur Bestimmung der Parallaxe auch folgende, die Gleichzeitigkeit der Beobachtungen gar nicht erfordernde Methode anwenden kann: Bezeichnen d_1 und d_2 die geocentrischen Deklinationen des Wandelsternes zu den beiden Beobachtungszeiten, so sind die geocentrischen Zenitdistanzen

$$z_1 = \varphi_1 - d_1 \qquad z_2 = \varphi_2 - d_2 \qquad \textbf{6}$$

und dagegen die scheinbaren Zenitdistanzen entsprechend 435 : 13, da für die Culmination $n = \varphi'$ wird und in den Korrektionsgliedern die z_1 und z_2 durch z_1' und z_2' ersetzt werden dürfen,

$$z_1' = z_1 + r_1 \cdot \pi_1 \cdot \mathrm{Si}\,(z_1' - \triangle\varphi_1) \qquad z_2' = z_2 + r_2 \cdot \pi_2 \cdot \mathrm{Si}\,(z_2' - \triangle\varphi_2) \qquad \textbf{7}$$

wo, wenn $\triangle_1$ und $\triangle_2$ die geocentrischen Distanzen von S sind, und π wie oben die Sonnenparallaxe bezeichnet,

$$\pi_1 = \pi : \triangle_1 \qquad \pi_2 = \pi : \triangle_2 \qquad \textbf{8}$$

ist. Aus 6, 7 und 8 folgt aber, wenn man die aus den Beobachtungen und Tafeln bekannten Grössen

$$z_1' - z_2' - (\varphi_1 - \varphi_2) + d_1 - d_2 = \alpha, \quad \mathrm{Si}(z_1' - \triangle\varphi_1) \cdot r_1 : \triangle_1 - \mathrm{Si}(z_2' - \triangle\varphi_2) \cdot r_2 : \triangle_2 = \beta \qquad \textbf{9}$$

setzt,

$$\pi = \alpha : \beta \qquad \textbf{10}$$

womit offenbar die Aufgabe vollständig gelöst ist. Aber allerdings wird die Grösse α im Verhältnis zu ihrem Betrage von der Unsicherheit der Refraktionsbestimmung, der Einstellung und Ablesung, etc., etwas stark beeinflusst, so dass es höchst zweckmässig ist, die absoluten Messungen durch Differentialbestimmungen zu ersetzen, in welchen sich ein grosser Teil dieser Fehler eliminiert, — d. h. den Wandelstern auf beiden Stationen mit demselben Fixsterne zu vergleichen: Ist D die Deklination dieses letztern und bezeichnen $\triangle d_1$ und $\triangle d_2$ die an den beiden Stationen bestimmten Höhendifferenzen, so hat man

$$D + \triangle d_1 = \varphi_1 - z_1' \qquad D + \triangle d_2 = \varphi_2 - z_2' \qquad \triangle d_1 - \triangle d_2 = (\varphi_1 - \varphi_2) - (z_1' - z_2')$$

folglich statt 9

$$\alpha = d_1 - d_2 - (\triangle d_1 - \triangle d_2), \quad \beta = \mathrm{Si}(\varphi_1' - D - \triangle d_1) \cdot r_1 : \triangle_1 - \mathrm{Si}(\varphi_2' - D - \triangle d_2) \cdot r_2 : \triangle_2 \qquad \textbf{11}$$

Hat man aber eine Reihe solcher Bestimmungen, so kann man für jede derselben nach 10 die Gleichung $\alpha = \beta \cdot \pi$ aufschreiben, welche die Normalgleichung

$$\Sigma\,(\alpha \cdot \beta) = \pi \cdot \Sigma\,\beta^2 \quad \text{und somit} \quad \pi = \Sigma\,(\alpha \cdot \beta) : \Sigma\,\beta^2 \qquad \textbf{12}$$

ergeben. — Vgl. auch 442 : c.

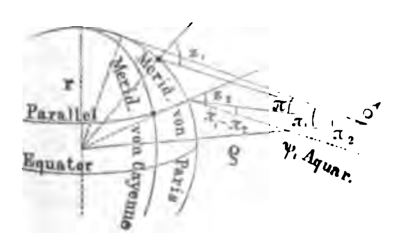
441. Die Expedition nach Cayenne. — Die erste Anwendung der neuen Methode hatte bei Anlass der Mars-Opposition des Jahres 1672 statt. Die Pariser Akademie sandte nämlich damals ihren Adjunkten Jean **Richer** nach Cayenne, um daselbst wiederholt die Culminationshöhen des Mars mit denjenigen benachbarter Sterne zu vergleichen, während Dom. **Cassini** in Paris korrespondierende

Beobachtungen machen sollte [a], und es hatte diese Expedition, durch welche die Wissenschaft gewissermassen Besitz von der neuen Welt nahm, sowie auch Kenntnis von einer früher (419) erwähnten wichtigen Thatsache erhielt, für die genauere Kenntnis der Sonnenparallaxe wirklich guten Erfolg, indem sie aus Kombination der zuverlässigsten Serien den für die damalige Zeit ganz vorzüglichen Wert von $9^1/_2{}''$ ergab [b].

Zu 441: *a.* **Richer** schiffte sich 1672 II 8 zu La Rochelle mit einem Gehilfen, Namens Meurisse, ein, — langte IV 27 in Cayenne an, — liess sich von den Wilden ein kleines Observatorium bauen, welches Wandungen aus Baumrinde und ein Dach von Palmenblättern hatte, — stellte in demselben eine in Paris sorgfältig regulierte, aber nunmehr (vgl. 419) eine Retardation von vollen 2^m zeigende Pendeluhr, sowie einen 6-füssigen Oktanten auf, dessen kupferner Limbus direkt 1′ und mittelst Transversalen 10″ gab, — begann V 12 mit Eifer die ihm durch die Picard'sche Instruktion vorgeschriebenen Beobachtungen, welche er ein volles Jahr fortsetzte, — sich dann wieder einschiffte und gegen Ende des Jahres 1673 glücklich nach Paris zurückkehrte, wo er (vgl. Hist. de l'Acad. 1673) zum Ärger des eifersüchtigen **Cassini** wie ein Sieger empfangen wurde. — *b.* Unter den vielfachen Beobachtungen von **Richer**, für welche seine „Observations astronomiques et physiques faites en l'Isle de Cayenne. Paris 1679 in fol." zu vergleichen sind, kommen hier zunächst die zahlreichen Meridianhöhen in Betracht, welche er von 1672 VII 28 bis XI 19 von Mars und benachbarten Sternen bestimmte, so z. B. folgende, zu welchen **Cassini** in Paris korrespondierende erhielt:

1872	Gegenstand	Höhe in Cayenne beob.	Höhe in Cayenne red. auf Paris		Höhe in Paris		Differ. d. Diff.	
		° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	′ ″	″	
IX 8	♂ ob. Rand	74 31 45						
- 9	dito	74 28 10	74 28 43	−16 3	30 35 35	−15 50	+13	
- --	ψ′ Aquarii	74 12 40	74 12 40		30 19 45			
- 23	♂ ob. Rand	73 57 25						15″
- 24	dito	73 57 10	73 57 12	+15 28	30 4 0	+15 45	+17	
- —	ψ′ Aquarii	74 12 40	74 12 40		30 19 45			

Die gegenseitige Lage von Paris und dem nach Richers Beobachtungen etwa $3^h\ 38^m = {}^{11}/_{72}{}^d$ westlich davon und 4° 56′ nördlich vom Equator gelegenen Observatorium auf Cayenne ist durch beistehende Figur angedeutet, welche überdies die von mir gewählten Bezeichnungen enthält.



Die Beobachtungen von IX 8 und 9 ergaben nun für die Höhe von Mars eine tägliche Abnahme von 3′ 35″; setzt man also die Veränderung der Zeit proportional, so hat man für den Moment, wo Mars IX 9 im Parallel von Cayenne durch den Pariser Meridian ging, seine Höhe um ${}^{11}/_{72} \cdot 3'\ 35'' = 33''$

grösser als die in Cayenne wirklich beobachtete anzunehmen; diese reduzierte Höhe ist dann auch in vorstehende Tafel eingetragen, und für IX 24 entsprechend verfahren worden. Der übrige Eintrag bedarf wohl keiner weitern Erläuterung und es erzeigt sich, dass in Paris nahe in der Mitte zwischen IX 9 und 24 Mars in der Höhe von ψ' Aquarii, dagegen in Cayenne gleichzeitig um 15″ höher stand, dass also für jene Zeit $\pi_1 - \pi_2 = 15''$ gesetzt werden darf, — ferner $z_1 = 90^0 - 30^0\,19'\,45''$ und $z_2 = 90^0 - (74^0\,12'\,40'' + 15'')$. Nun hat man aber aus der Figur sehr nahe

$$\pi_1 = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}\,z_1 \qquad \pi_2 = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''} \cdot \mathrm{Si}\,z_2 \qquad \pi = \frac{r}{\varrho \cdot \mathrm{Si}\,1''} \qquad 1$$

also

$$\pi_1 - \pi_2 = \pi\,(\mathrm{Si}\,z_1 - \mathrm{Si}\,z_2) \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{\pi_1 - \pi_2}{2\,\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(z_1 - z_2) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(z_1 + z_2)} \qquad 2$$

und hieraus folgt mit obigen Daten $\pi = 25^1\!/_3''$, oder, da damals Mars nahe seinen kleinsten Abstand 0,372 von der Erde hatte, dass die Parallaxe in der Distanz 1 oder die Sonnenparallaxe

$$\Pi = 0{,}372 \times 25^1\!/_3 = 9^1\!/_2''$$

sei. Wenn aus andern, weniger günstig situierten Beobachtungen kleinere oder grössere Werte hervorgingen, ja sogar die Parallaxe Null nicht ausgeschlossen blieb, so darf man sich für jene Zeit darüber gar nicht verwundern, kam ja noch weit später Ähnliches vor.

442. Die Kontrol-Methode von Cassini. — Während wir jetzt die Ergebnisse der Expedition nach Cayenne durch Vergleichung mit neuern Bestimmungen prüfen können, so musste damals die wünschbare Kontrole in anderer Weise angestrebt werden, und in der That suchte **Cassini** eine solche in der Weise zu erhalten, dass er (436) die Parallaxe auch aus ihrem Einflusse auf die Distanz des Planeten von einem benachbarten Sterne bestimmte [a], dabei zur Vereinfachung der Distanz die Rektascensionsdifferenz substituierend, und je zwei Beobachtungen kombinierend, bei welchen der Planet vor und nach der Culmination gleichen Stundenwinkel besass [b]. Da er nun in dieser Weise mehrere Bestimmungen erhielt, welche mit den aus Cayenne-Paris abgeleiteten befriedigend übereinstimmten, so waren damit jede Zweifel an letztern vollständig beseitigt [c].

Zu 442: *a.* Sind nämlich a′, d′ die geocentrischen Equatorealcoordinaten eines Wandelsternes der Parallaxe π' zur Sternzeit t und a″, d″ die entsprechenden Coordinaten eines Fixsternes ($\pi'' = 0$), — ist ferner φ' die geocentrische Breite des Beobachters, und bezeichnen ζ und z die scheinbare und geocentrische Distanz der beiden Gestirne, so hat man nach 436 : 8, 12, da in diesem Falle $k = 0$ und (nach 13) $\gamma = 1$ werden, A und B aber durch $-$t und φ' zu ersetzen sind,

$$\zeta = z - \pi' \cdot [\mathrm{Si}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(u + t)] \qquad 1$$

während (vgl. dortige Fig.) die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,u \cdot \mathrm{Co}\,\beta &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,a' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' - \mathrm{Si}\,a' \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,u \cdot \mathrm{Co}\,\beta &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,a' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' - \mathrm{Co}\,a' \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,z \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,d'' - \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,d'' \cdot \mathrm{Co}\,(a'' - a') \\ \mathrm{Co}\,z &= \mathrm{Si}\,d' \cdot \mathrm{Si}\,d'' + \mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,d'' \cdot \mathrm{Co}\,(a'' - a') \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathrm{Si}\,\beta &= -\,\mathrm{Co}\,d' \cdot \mathrm{Co}\,\theta'' \\ \mathrm{Si}\,z \cdot \mathrm{Si}\,\theta'' &= \\ &= \mathrm{Co}\,d'' \cdot \mathrm{Si}\,(a'' - a') \end{aligned} \qquad 2$$

bestehen. Da nun für jede Sternzeit t, zu welcher man ζ gemessen hat, nach 2 successive z, θ'', α und β berechnet werden können, so lässt sich π' aus jeder solchen Messung nach 1 bestimmen und aus den verschiedenen Werten ein ordentlicher Mittelwert für die Parallaxe erhalten, — zumal wenn man einen Stern in der Nähe des Wandelsternes wählt, um den störenden Einfluss der Refraktion auf ein Minimum zu reduzieren. — Vernachlässigt man die Veränderung der geocentrischen Coordinaten des Wandelsternes in der Zwischenzeit zwischen zwei unter gleichen Stundenwinkeln s **vor** und **nach** der Culmination gemessenen Distanzen ζ_1 und ζ_2, so behalten z, θ'', α, β für beide Beobachtungen dieselben Werte, während die entsprechenden Sternzeiten

$$t_1 = a' - s \qquad\qquad t_2 = a' + s \qquad\qquad 3$$

sind, und wenn man daher 1 für beide Beobachtungen aufschreibt, so erhält man durch Subtraktion

$$\zeta_1 - \zeta_2 = -2\pi' \cdot \text{Co}\,\varphi' \,\text{Co}\,\beta \cdot \text{Si}\,(\alpha + a') \cdot \text{Si}\,s$$

oder mit Benutzung der 2, aus denen $\text{Co}\,\beta \cdot \text{Si}\,(\alpha + a') = -\text{Si}\,\theta''$ folgt,

$$\pi' = A \cdot \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} \qquad \text{wo} \qquad A = \frac{\text{Si}\,z \cdot \text{Se}\,\varphi' \cdot \text{Se}\,d''}{\text{Si}\,(a'' - a') \cdot \text{Si}\,s} \qquad 4$$

woraus sich unter Zuziehung der 2 die Parallaxe in sehr einfacher Weise berechnen lässt, — am einfachsten allerdings, wenn Beobachter und Gestirne im Equator stehen, und bei Auf- und Untergang beobachtet wird, da diesem Falle $A = 1$ entspricht. — *b.* Natürlich lässt sich die Methode, die Parallaxe aus korrespondierenden Distanzmessungen zu bestimmen, auch ohne die für Aufstellung von 4 gemachten Annahmen durchführen, ja sie wird sogar, wenn man nicht der Eleganz der Formel die wertvollere Genauigkeit opfern will, ohne sie durchgeführt werden müssen. Ferner kann man, anstatt wie oben die Parallaxe aus der Parallaxe der Distanz zu bestimmen, dieselbe auch aus dem Einflusse auf die Rektascensionsdifferenz ableiten, besonders wenn der Vergleichstern im Parallel des Wandelsternes gewählt wird. — *c.* In letzterer Richtung ging nun **Cassini** vor, und fand so z. B. am 9. September 1672 unter Anwendung von $s = 4^h$ für Mars die ziemlich richtige Parallaxe von $24^3/_4{}''$, — am 17. September dagegen $27^1/_2{}''$, bei Aufführung letzterer Bestimmung jedoch in seinen „Elémens de l'astronomie vérifiez. Paris 1684 in fol." selbst bemerkend: „Elle devoit estre plûtot un peu plus petite que la précédente ($24^3/_4$), puisque Mars estait un peu plus éloigné de la terre; mais elle résulte un peu plus grande à cause de la difficulté extrême de déterminer ces différences avec la dernière précision", leider aber keine Angaben über die angewandten Instrumente und Rechnungsmethoden beifügend, sondern dafür auf seinen „Traité de la Comète de l'an 1680" verweisend, dessen ich bis jetzt nicht habhaft werden konnte. Es macht ihm diese Methode und deren für damalige Zeit gut gelungene Anwendung jedenfalls grosse Ehre, und trägt wohl auch mit Recht seinen Namen, obschon sich (vgl. Kästner IV 248) erste Spuren derselben schon bei **Tycho** und **Kepler** nachweisen lassen und wenig später auch **Flamsteed** (vgl. Ph. Tr. 1673) von derselben Gebrauch machte. — Zum Schlusse füge ich noch zur Ergänzung von 440 bei, dass das dort gelehrte Verfahren, die Parallaxe aus Differentialbeobachtungen im Meridiane zu bestimmen, sich mit geringen Abänderungen auch auf den Fall anwenden lässt, wo an zwei Stationen mit dem Mikrometerapparat eines parallaktisch montierten Fernrohrs ausserhalb des Meridianes Deklinationsdifferenzen zwischen dem Planeten und einem benachbarten Sterne gemessen worden sind: Be-

zeichnen nämlich wie damals Δd_1 und Δd_2 die gemessenen und für Refraktion bereits verbesserten Deklinationsdifferenzen, so besteht zwar die Beziehung 440 : 11'

$$\alpha = d_1 - d_2 - (\Delta d_1 - \Delta d_2) \qquad 5$$

noch ganz unverändert, aber es erleidet die durch 11" eingeführte β für Bestimmungen ausser dem Meridiane eine wesentliche Abänderung, da man in diesem Falle (bei Vernachlässigung der Parallaxe in Rektascension in den Korrektionsgliedern) nach 435 : 13, 14

$$r_1 \pi_1 m_1 \cdot \text{Si}\,(d_1 - n_1) = \pi\, r_1 m_1 \cdot \text{Si}\,(d_1 - n_1) : \Delta_1$$
$$r_2 \pi_2 m_2 \cdot \text{Si}\,(d_2 - n_2) = \pi\, r_2 m_2 \cdot \text{Si}\,(d_2 - n_2) : \Delta_2$$

hat, wo

$$m_1 \cdot \text{Si}\, n_1 = \text{Si}\, \varphi_1' \qquad m_1 \cdot \text{Co}\, n_1 = \text{Co}\, \varphi_1' \cdot \text{Co}\,(a_1 - t_1)$$
$$m_2 \cdot \text{Si}\, n_2 = \text{Si}\, \varphi_2' \qquad m_2 \cdot \text{Co}\, n_2 = \text{Co}\, \varphi_2' \cdot \text{Co}\,(a_2 - t_2)$$

sind, und somit, wenn γ_1 und γ_2 durch

$$\text{Tg}\, \gamma_1 = \text{Tg}\, \varphi_1' \cdot \text{Se}\,(a_1 - t_1) \cdot \qquad \text{Tg}\, \gamma_2 = \text{Tg}\, \varphi_2' \cdot \text{Se}\,(a_2 - t_2) \qquad 6$$

eingeführt werden, nunmehr

$$\beta = \frac{r_1}{\Delta_1} \cdot \frac{\text{Si}\, \varphi_1' \cdot \text{Si}\,(\gamma_1 - d_1)}{\text{Si}\, \gamma_1} - \frac{r_2}{\Delta_2} \cdot \frac{\text{Si}\, \varphi_2' \cdot \text{Si}\,(\gamma_2 - d_2)}{\text{Si}\, \gamma_2} \qquad 7$$

hat, mit welchem neuen β die Parallaxe nach

$$\pi = \alpha : \beta \qquad 8$$

zu berechnen ist. Der Vorteil besteht eben darin, dass man die Messung an jedem Tage beliebig oft wiederholen, z. B. am ersten Orte m_1 und am zweiten Orte m_2 Daten erhalten, und sodann die Mittelergebnisse beider Serien in folgender Weise vergleichen kann: Man ermittelt für jede der erhaltenen Bestimmungen mit Hilfe von 6 die Grösse

$$c = \frac{r}{\Delta} \cdot \frac{\text{Si}\, \varphi' \cdot \text{Si}\,(\gamma - d)}{\text{Si}\, \gamma} \quad 9 \qquad \text{und alsdann} \qquad d = D + \Delta d + c \cdot \pi \quad 10$$

erhält somit für die beiden Stationen die Tagesmittel

$$d_1 = D + \frac{1}{m_1} \cdot \Sigma \Delta d_1 + \frac{\pi}{m_1} \cdot \Sigma c_1 \qquad d_2 = D + \frac{1}{m_2} \cdot \Sigma \Delta d_2 + \frac{\pi}{m_2} \cdot \Sigma c_2 \qquad 11$$

setzt nunmehr

$$\alpha = d_1 - d_2 - \left(\frac{\Sigma \Delta d_1}{m_1} - \frac{\Sigma \Delta d_2}{m_2} \right) \qquad \beta = \frac{\Sigma c_1}{m_1} - \frac{\Sigma c_2}{m_2} \qquad 12$$

und berechnet schliesslich mit diesen Werten nach 8 den Wert der Parallaxe für den betreffenden Tag.

443. Die Bemühungen von Krosigk. — Eine neue Expedition, durch welche namentlich eine genauere Bestimmung der Mondparallaxe erhalten werden sollte, liess ein Liebhaber der Astronomie, der reiche Baron **Krosigk** [a], im Anfange des 18. Jahrhunderts auf seine Kosten unternehmen: Ein gewisser Peter **Kolb** sollte am Kap der guten Hoffnung während längerer Zeit die Culminationshöhen des Mondes bestimmen, während Wilhelm **Wagner** die correspondierenden Beobachtungen in Berlin zugeteilt wurden [b]. Da jedoch **Kolb** das auf ihn gesetzte Vertrauen in keiner Weise rechtfertigte, so brachte leider die Munificenz von **Krosigk** der Astronomie keinen irgendwie erheblichen Nutzen [c].

Zu 443: *a.* Bernhard Friedrich v. **Krosigk** (Magdeburg 1660? — Herxen in Holland 1714) lebte erst in Wolfenbüttel, dann in Berlin als Oberst und Geheimer Rat, liess sich 1705 an letzterm Orte unter Leitung von Gottfried Kirch eine Privat-Sternwarte bauen, und zog sich 1713 auf die ihm zugehörende Herrschaft Herxen zurück. — *b.* Peter **Kolb** (Dorflas bei Wunsiedel 1675 — Neustadt an der Aisch 1726; damals Hauslehrer bei Krosigk, später Rektor zu Neustadt) und Joh. Wilhelm **Wagner** (Heldburg in Franken 1681 — Berlin 1745; damals von Krosigk für seine Sternwarte berufen, später Akad. Berlin und Christfried Kirchs Nachfolger) waren Schüler von Georg Christoph Eimmart (vgl. 235), der als vorzüglicher Beobachter galt. — *c.* Als Hauptresultat ergab sich für die Perigeums-Parallaxe des Mondes der bei 6′ zu grosse Wert von $67\frac{1}{2}'$, also eine schon für damals unverantwortlich schlechte Bestimmung, und es ist zu begreifen, dass der fleissige und an diesem Misserfolge unschuldige **Wagner** sich nur schwer und erst 1740 entschloss, in die Misc. Berol. eine „Brevis narratio de ratione ac methodo observationum astronomicarum auspiciis D. de Krosigk, Berolini et simul in Capite Bonæ Spei, per aliquot annos olim institutarum“ einzurücken. In dem dickleibigen Werke, das **Kolb** unter dem Titel „Caput bonæ spei hodiernum, d. i. Vollständige Beschreibung des Afrikanischen Vorgebürges der Guten Hoffnung. Nürnberg 1719 in fol. (holländ. Amsterdam 1727) ausgehen liess, findet sich (wohl aus guten Gründen) kein gehöriger Aufschluss über die eigentliche Mission, und auch was der Verfasser nach siebenjährigem Aufenthalt über Land und Leute beizubringen wusste, war begreiflicherweise unerheblich, da Lacaille, auf Grund an Ort und Stelle eingezogener Erkundigungen, erklärt: „Quoiqu'il en dise, il n'a fait aucun voyage dans l'intérieur du pays“.

444. Die Expedition von Lacaille. — Ganz anders gestaltete sich die Sache, als ein halbes Jahrhundert später **Lacaille** die Rolle am Kap und der junge **Lalande** diejenige in Berlin übernahm [a]. Nicht nur wurde die Mondparallaxe mit der grössten Sorgfalt ermittelt [b], sondern auch die Sonnenparallaxe unter Benutzung verschiedener europäischer Beobachtungsserien mehrfach bestimmt [c], ja der unermüdliche **Lacaille** fand noch Zeit, die bereits (424) besprochene Gradmessung auszuführen, die ebenfalls (186) schon erwähnte Durchmusterung des südlichen Himmels vorzunehmen, die, seinen alsbald (457) auseinander zu setzenden Arbeiten über die Refraktion zu Grunde liegenden Beobachtungen zu absolvieren, und überhaupt seine Expedition zu einer der fruchtbarsten aller Zeiten zu machen [d].

Zu 444: *a.* Als der treffliche **Lacaille** 1750 der Pariser Akademie die Wünschbarkeit einer Kap-Expedition für Revision des südlichen Himmels, genauere Parallaxenbestimmungen, etc., auseinandersetzte, erhielt er ihren vollen Beifall und bald auch von der Regierung die Zusage der ihm nötigen Unterstützung. Er forderte hierauf in seinem „Avis aux astronomes par M. de La Caille, à l'occasion des observations qu'il va faire, par ordre du roi, dans l'hémisphère austral. Paris 1750 in 4.“ die Astronomen zu den erforderlichen korrespondierenden Beobachtungen auf, — führte sodann von 1750 X 21 bis 1751 IV 19 die damals noch äusserst mühsame und für ihn wegen heftiger

Seekrankheit doppelt beschwerliche Reise nach dem Kap aus, — und liess sich dort sofort ein Lokal herrichten, um seine Sternuhr und einen dreifüssigen Quadranten, dem ein Hilfsfernrohr mit Rautenmikrometer (392) beigegeben war, aufstellen, d. h. seine Beobachtungen beginnen zu können. — Unterdessen reiste auch im Auftrage der Akademie der von seinem Lehrer **Lemonnier** zum europäischen Sekundanten Lacailles vorgeschlagene und mit dessen fünffüssigen Mauerquadranten, einem von 1742 datierenden Meisterstücke Jonathan **Sissons**, ausgerüstete, damals erst 18jährige Jérôme **Le Français**, seinem Namen ohne weitere Begründung und wahrscheinlich nur, um bessere Figur zu machen, „de **La Lande**" beifügend, nach Berlin ab, um nach dem von Lacaille entworfenen Programme zu beobachten, — wurde dort von Johannes **Kies** (Tübingen 1713 — ebenda 1781; damals Prof. math. und Dir. Obs. Berlin, später Prof. math. et phys. Tübingen) freundlich aufgenommen und in seiner Arbeit unterstützt, — durch **Euler** in der höhern Mathematik unterrichtet, — und durch **Maupertuis** in die bekannten Zirkel Friedrich des Grossen eingeführt. — Ferner ist beizufügen, dass der erwähnte „Avis" zur Folge hatte, dass auch Laurent **Béraud** (Lyon 1702 — ebenda 1777; Jesuit; Prof. math. Lyon und als solcher Lehrer von Lalande, Montucla, Bossut, etc.) in Lyon, — Jam. **Bradley** in Greenwich, — C. F. **Cassini** de Thury in Paris, — Augustin **Darquier** (Toulouse 1718 — ebenda 1802; reicher Privat-Astronom) und François-Philippe-Auguste **Garipuy** (Toulouse 1711 — ebenda 1782; Staatsbeamter und Besitzer einer Sternwarte) in Toulouse, — Augustin Nathanael **Grischow** (Berlin 1726 — Petersburg 1760; damals Prof. math. Berlin, später Prof. astr. Petersburg) auf der nahe im Meridiane des Kaps gelegenen livländischen Insel Oesel, — Pehr Vilhelm **Wargentin** (Sunne Prestgard auf Jemtland 1717 — Stockholm 1783; Sekr. Akad. Stockholm) in Stockholm, — und Eustachio **Zanotti** (Bologna 1709 — ebenda 1782; Prof. astr. Bologna) in Bologna, korrespondierende Beobachtungen anstellten. — *b.* Zur Berechnung benutzte **Lacaille** teils die im Eingange von 440 entwickelte Methode, welche ihm **Clairaut** empfohlen, aber wohl schon vor diesem **Tob. Mayer** aufgestellt hatte, — teils ein selbst ausgedachtes, dem ebenfalls in 440 gegebenen ähnliches Verfahren, welches ihn von der Voraussetzung gleichzeitiger Beobachtungen dispensierte, — und erhielt so im Mittel von 40 Einzelresultaten für die Polarparallaxe den Wert 56′ 56″, sowie daraus, unter der allerdings nicht sehr glücklichen Annahme von $^1/_{200}$ als Abplattung der Erde, für die Equatorealparallaxe den Wert 57′ 13″,1, welchen später Christian Friis Rottböll **Olufsen** (Kopenhagen 1802 — ebenda 1855; Prof. astr. und Dir. Obs. Kopenhagen), vgl. dessen „Untersuchungen über den Wert der Monds-Parallaxe, die aus den in der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellten korrespondierenden Beobachtungen abgeleitet werden kann (A. N. 326 von 1837)" durch Neuberechnung auf 57′ 2″,60 ± 0″,45 heruntersetzte. Das Verhältnis zwischen Radius und Polarparallaxe des Mondes bestimmte **Lacaille** zu

$$15' \, 0'' : 54' \, 41'' = 1 : 3{,}646 = 0{,}2743 : 1$$

während er den grössten Radius gleich 1010″ setzte. — *c.* Aus den im Herbst 1751 während der Opposition des Mars gemachten Vergleichungen desselben mit λ Aquarii erhielt **Lacaille** mit Benutzung von Stockholm im Mittel aus 27 Bestimmungen eine Sonnenparallaxe von 10″,20, und da ihm 4 Vergleichungen von b Aquarii mit der in unterer Konjunktion stehenden Venus, zu welchen er aus Greenwich korrespondierende Beobachtungen erhielt, den nur wenig grössern Wert 10″,38, dagegen einige am Kap und in Paris gelungene direkte

Vergleichungen der Sonne mit Arktur den etwas kleinern Wert 9",94 ergaben, so hielt er sich begreiflich zu dem Schlusse berechtigt, dass die Sonnenparallaxe kaum um ¼" von 10",20 abweichen werde. — *d.* Für weitern Detail auf die Schriften „**Lacaille,** Observations faites au Cap pour déterminer la parallaxe de la Lune, de Mars et de Vénus (Mém. Par. 1748, ausg. 1753), ferner: Sur la parallaxe de la Lune (Mém. Par. 1761), und: Journal historique du voyage fait au Cap de Bonne-Espérance. Paris 1763 in 12., — **Lalande,** Sur la détermination de la parallaxe de la Lune et de la courbure de la Terre entreprise au Cap de Bonne-Espérance et à Berlin (Mém. Berl. 1750, ausg. 1752), ferner: Sur la parallaxe de la Lune (Mém. Par. 1751 u. f.), und: De observationibus berolinensibus ad parallaxin Lunæ definiendem Epistola (Acta Erud. 1752), — **Bradley,** Observations à Greenwich correspondantes à celles de La Caille au Cap (Mém. Par. 1752), — **Garipuy,** Parallaxes de la Lune, de Mars et de Vénus (Mém. Toulouse 1754), — **Grischow,** Sermo de parallaxi coelestium corporum. Petropoli 1755 in 4., — **Wargentin,** Försök at determinera Solens parallaxis, genom correspondenta observationer pa planeten Mars hälne Ar 1751 vid Caput Bonae Spei af De la Caille och i Stockholm (Stockh. Hdl. 1756, 60), — E. **Zanotti,** Observationes in bononiensi specula habitæ A. 1751/2 ad investigandas Lunæ, Martis et Veneris parallaxes (Comm. Bon. 1757), — etc." verweisend, füge ich zum Schlusse noch bei, dass **Lacaille** seinen Aufenthalt am Kap auch zu verschiedenen grössern Exkursionen benutzte, um Land und Leute kennen zu lernen, — dass er sich 1753 neun Monate auf Mauritius aufhielt, um infolge erhaltener Ordre eine Karte dieser Insel aufzunehmen, — und dass er endlich 1754 VI 28 wohlbehalten wieder in Paris eintraf, um nun sofort an die Bearbeitung des gesammelten Materiales zu gehen.

445. Neuere verwandte Bestimmungen. — In der neuern Zeit wurden wiederholt günstige Mars-Oppositionen, sowohl in der ursprünglichen Weise (440—41) als nach der Methode von Cassini (442), mit bestem Erfolge zur Neubestimmung der Sonnenparallaxe benutzt [a], und ein ebensolcher war 1873 zu verzeichnen, als nach dem Vorschlage von **Galle** versucht wurde, Mars durch einen der kleinen Planeten zu ersetzen [b]. Eine in den Jahren 1849—52 unternommene amerikanische Expedition nach Chili, um dieselbe Grösse nach dem von **Gerling** entworfenen Plane aus Beobachtung von Venus-Stillständen zu erhalten, misslang dagegen wegen ungenügenden korrespondierenden Beobachtungen [c].

Zu 445: *a.* Unter einer „günstigen" Mars-Opposition versteht man natürlich eine solche, bei der Mars ($a' = 1{,}5237$, $e' = 0{,}0933$) zugleich nahe im Perihel, die Erde ($a = 1$, $e = 0{,}0168$) nahe im Aphel steht, also die Distanz Erde-Mars ihrem bei Vernachlässigung der Neigung der Marsbahn $a'(1 - e') - (1 + e) = 0{,}365$ betragenden Minimum nahe ist, während dieselbe bei andern Oppositionen bis auf $a'(1 + e') - (1 - e) = 0{,}673$ ansteigen kann. Eine solche wurde z. B. 1862 in Pulkowa (P), Greenwich (G), Williamstown in Australien (W) und am Kap (K) beobachtet, wobei sich nach den Rechnungen von Theodor **Winnecke** (Gross-Heere in Hannover 1835 geb.; damals Obs. Pulkowa, später bis zu seiner Erkrankung Dir. Strassburg) und E. J. **Stone** (vgl. A. N. 1409 von 1863 und Mem. Astr. Soc. Vol. 33) die Werte

P. K. 8″,964 ± 0,038 G. K. 8″,918 ± 0,014 G. W. 8″,930 ± 0,041

ergaben, deren Mittel 8″,937 sehr nahe mit dem (452) durch die theoretischen Untersuchungen geforderten Werte übereinstimmt. — *b.* **Galle** hatte nämlich die Genugthuung, dass nach seinem Vorschlage (A. N. 1879 von 1872) schon im Herbst 1873 während der perihelischen Opposition der Flora teils am Kap, in Cordoba und Melbourne, — teils in Clinton, Bothkamp, Leipzig, etc., zahlreiche Vergleichungen zwischen derselben und einem benachbarten Sterne gemacht wurden, aus welchen er (vgl. A. N. 2033 von 1875 und seine Specialschrift „Über eine Bestimmung der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen der Flora. Breslau 1875 in 8.") den guten Wert $\pi = 8'',879 \pm 0'',040$ ableiten konnte, und es ist auch wirklich diese Methode darum sehr vorteilhaft, weil sich die kleinen Planeten sozusagen als Punkte präsentieren, und so eine ganze Reihe der bei Mars-Beobachtungen vorkommenden systematischen Fehler wegfällt. Man durfte somit wohl annehmen, dass der sich aus 8,937 und 8,879 ergebende Mittelwert

$$\pi = 8'',908$$

der Wahrheit sehr nahe kommen werde. — *c.* Wenn aus angegebenen Gründen die von James **Gilliss** (Georgetown in Columbia 1811 — Washington 1865; erster Superintendent des durch seine Bemühung entstandenen Naval Observatory in Washington) geleitete Expedition nach Chili für den Hauptzweck, die von **Gerling** (A. N. 599 von 1847) vorgeschlagene neue Methode zu prüfen und auszunutzen, so ziemlich resultatlos verlief, so verdankt man ihr wenigstens, wie die Publikation „The U. S. Naval astronomical expedition in the southern hemisphere during the years 1849—52. Washington 1855—59, 4 Vol. (1—3 und 6; 4 und 5, welche speciell die astronomischen Bestimmungen enthalten sollten, sind nie erschienen) in 4." zeigt, in anderer Richtung manche wertvolle Belehrung.

446. Die Durchgänge der untern Planeten. — In der neuern Zeit spielte ferner die Methode, aus partiellen Bedeckungen der Sonne durch einen der untern Planeten (voraus Venus) die Parallaxe der erstern zu bestimmen, eine so hervorragende Rolle, dass wir sowohl diesen Ereignissen, als ihrer Vorausbestimmung (447) und Verwerthung (448—51) auch hier einlässlich zu gedenken haben. — Vorerst ist zu erinnern, dass, wenn einer der untern Planeten zur Zeit seiner untern Konjunktion (276) nahe genug an einem seiner beiden Knoten in der Ekliptik steht, derselbe sich von der Erde aus gesehen als eine kleine dunkle Scheibe über die Sonne zu bewegen scheint oder ein sog. **Durchgang** dieses Planeten statt hat [a]. Bei Merkur sind nun solche Durchgänge ziemlich häufig und so auch seit 1631 vielfach beobachtet worden [b]; die Durchgänge der Venus sind dagegen selten, so dass seit 1639, wo ein erster gesehen wurde, bis auf die Gegenwart nur vier vorkamen und sich erst zu Anfang des neuen Jahrtausends wieder ein solcher ereignen wird [c].

Zu 446: *a.* Die Gesetze, nach welchen sich die Durchgänge folgen, hängen offenbar zunächst von dem Verhältnisse des siderischen Umlaufes zu dem

synodischen Umlaufe ab, d. h. bei Merkur, wo dieselben 0,2408 und 0,3172 Jahre betragen, von

$$\frac{2408}{3172} = 1 : [1, 3, 6, 1, 1, 2, \ldots] \asymp \frac{1}{1}, \frac{3}{4}, \frac{19}{25}, \frac{22}{29}, \frac{41}{54}, \frac{104}{137}, \ldots$$

bei Venus dagegen, wo sie 0,6152 und 1,5987 Jahre halten, von

$$\frac{6152}{15987} = 1 : [2, 1, 1, 2, 29, 1, \ldots] \asymp \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{13}, \frac{147}{382}, \frac{152}{395}, \ldots$$

ab, und es kehren daher die für Durchgänge in der Nähe desselben Knotens günstigen Bedingungen, da

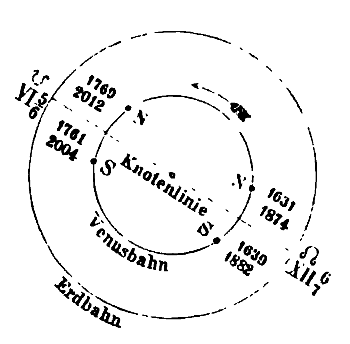
0,2408 ×	29 =	6^a,9832	und	0,3172 ×	22 =	6^a,9806
	54	13,0032			41	13,0052
	137	32,9896			104	32,9888

ist, bei Merkur schon nahe in 7, genauer in 13 oder 33 Jahren zurück, — bei Venus dagegen, weil

0,6152 ×	13 =	7^a,9976	und	1,5987 ×	5 =	7^a,9935
	382	235,0064			147	235,0089
	395	243,0040			152	243,0024

in 8., genauer in 235 oder 243 Jahren. Jedoch hängt das wirkliche Zustandekommen und der nähere Verlauf solcher Durchgänge auch von verschiedenen andern Umständen ab, welche bei jedem der beiden Planeten etwas verschieden sind, und so einzeln ins Auge gefasst werden müssen, wie dies unten für Venus kurz geschehen soll, während für den weniger wichtigen Merkur nur einige historische Nachrichten folgen werden. — *b.* Von den Durchgängen Merkurs, die natürlich jeweilen nur um den 9. November oder 7. Mai statthaben können, wo die Erde die Länge seines auf- oder absteigenden Knotens erreicht, und deren Wahrnehmung erst die Erfindung des Fernrohrs ermöglichte, so dass man eine Stelle in „Raffaele **Gualterotti** (Firenze 1543 — ebenda 1639; Philos. und Poet), Discorso sopra l'apparizione della nuova stella. Firenze 1605 in 4." wohl mit Unrecht auf eine solche beziehen wollte, wurde der erste, wie schon oben bemerkt, im Jahre 1631 wirklich gesehen: **Kepler** hatte, gestützt auf seine neuen Tafeln, in seiner „Admonitio ad astronomos rerumque coelestium studiosos de miris rarisque A. 1631 phænomenis, Veneris putà et Mercurii in Solem incursu. Lipsiæ 1629 in 4." denselben für den 7. November avisiert, und dem entsprechend wurde er dann auch von **Cysat** in Insbruck, von **Remus** zu Ruffach im Elsass, und von **Gassendi** in Paris beobachtet, ja letzterer widmete ihm eine eigene Schrift „Mercurius in Sole visus et Venus invisa A. 1631. Parisiis 1632 in 4." Seither wurde diese Konstellation, welche sich nach den Rechnungen von **Delambre** durchschnittlich in einem Jahrhundert 13 mal wiederholt, sehr häufig beobachtet, so z. B. 1677 XI 7 durch **Halley** auf St. Helena, wobei ihm (vgl. 448) der fruchtbare Gedanke auftauchte, dass solche Durchgänge zur genauern Bestimmung der Sonnenparallaxe verwendbar sein dürften, wie dies schon eingangs angedeutet wurde. — *c.* Auch die Durchgänge der Venus sind entsprechend an den 6./7. Dezember oder 5./6. Juni gebunden, wo die Erde die Länge ihres auf- oder absteigenden Knotens erreicht; dagegen können sie unter besonders günstigen Umständen von freiem Auge bemerkt werden und es ist daher die Angabe, es sei aus Bruchstücken assyrischer Schreibtäfelchen darauf zu schliessen, dass man schon im 16. Jahrhundert v. Chr. in Babylonien einen Venusdurchgang beobachtet habe, trotz aller (vgl. 272) in solcher Richtung vorgekommenen Täuschungen, nicht von vorneherein zu

verwerfen, zumal sich aus den unten zu entwickelnden Verhältnissen ergiebt, dass sich um 1528 und 1520 v. Chr. wirklich solche Durchgänge ereignet haben werden. Immerhin fällt die erste sichere Konstatierung einer betreffenden Konstellation, wie schon oben bemerkt, nicht vor das Jahr 1639 n. Chr.: Zwar hatte **Kepler** in seiner „Admonitio" bereits auf den 6. Dezember 1631 einen Venusdurchgang avisiert; aber derselbe gieng, wie schon der Titel der Gassendischen Schrift andeutet, ungesehen vorüber, da er, wie **Lalande** später nachwies, für Europa während der Nacht erfolgte, — und beinahe wäre auch derjenige vom 4. Dezember 1639 unbeachtet geblieben, denn es war nur ein glücklicher Zufall, dass Jeremias **Horrox** (Toxteth in Lancastershire 1619 — Hool bei Liverpool 1641; vgl. Opera posthuma, London 1678 in 4., und: Whatton, Memoir, London 1875 in 8.) auf diesen durch Kepler übersehenen Durchgang durch eigene, sich auf die Lansberg'schen Tafeln stützende Rechnung, noch rechtzeitig genug aufmerksam wurde, um ihn mit seinem Freunde William **Crabtree** (Brougthon bei Manchester 1620? — ebenda 1652) beobachten und diesen Vorgang in der Schrift „Venus in Sole visa (als Anhang zu „Hevel, Mercurius in Sole visus A. 1661. Gedani 1662 in fol." abgedruckt)" beschreiben zu können. Seither haben sich, wie schon oben bemerkt, noch vier solche Durchgänge ereignet, auf deren Beobachtung und Benutzung wir unter den nächstfolgenden Nummern einlässlich einzutreten haben werden, während hier noch der gerade durch sie repräsentierte eigentümliche Cyklus ins Auge gefasst werden soll, der sich mit Hilfe der oben entwickelten Zahlenverhältnisse in folgender Weise leicht ergiebt: Kommt nämlich Venus (wie dies 1631 der Fall war) kurz nach dem Durchgange durch den aufsteigenden Knoten in Konjunktion mit der Sonne, so wird sie auf derselben eine nördliche, — sodann (da $7^a,9935$ etwa um $2^1/_2{}^d$ kleiner als 8^a ist) nicht volle 8 Jahre später (wie es 1639 geschah) etwas vor dem Durchgange durch denselben (da die Breite der Venus sich in der Nähe des Knotens in $2^1/_2{}^d$ etwa um $^3/_4$ des Sonnendurchmessers verändert) eine südliche Sehne beschreiben, — in circa weitern 8 Jahren dagegen bei der Konjunktion noch zu tief stehen, um sich auf die Sonne projizieren zu können, — etc.

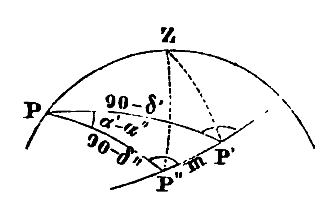


Am Ende werden sich die Verspätungen der Konjunktion so anhäufen, dass dieselbe erst kurz nach dem Eintritte in den absteigenden Knoten statt hat, und zwar, da der unbestimmten Gleichung $a \cdot 395 = (b + {}^1/_2) \cdot 152$ als kleinste Werte in ganzen Zahlen $a = 76$ und $b = 197$ entsprechen und $76 \times 1,5987 = 121^1/_2 = 197^1/_2 \times 0,6152$ ist, nach $121^1/_2$ Jahren, so dass nun (wie 1761) wieder ein Durchgang mit südlicher Sehne statt hat, dem sodann (wie 1769) in 8 Jahren ein solcher mit nördlicher Sehne folgt. Hiemit sind aber von den 243^a, welche sich oben für den grossen Cyklus ergeben haben, bereits $8 + 121^1/_2 + 8 = 137^1/_2{}^a$ verflossen; es bleiben also noch $105^1/_2{}^a$ übrig, nach deren Ablauf (wie 1874) eine neue Folge beginnt, — etc.

447. Die Vorausberechnung der Durchgänge. — Die Vorausberechnung der bei dem Durchgange eines der untern Pla-

neten zunächst in Betracht fallenden Zeiten und Stellen des Ein- und Austrittes lässt sich für einen im Erdcentrum gedachten Beobachter verhältnismässig leicht durchführen [a], und sodann ist es auch möglich, die Korrektionen zu finden, welcher jene Ergebnisse bedürfen, um sie auf einen wirklichen Beobachter von gegebener geographischer Lage überzutragen [b].

Zu 447: *a.* Bezeichnet m die der Zeit T entsprechende geocentrische Distanz zweier Gestirne P' und P'' der Rektascensionen α' und α'' und der Deklinationen δ' und δ'', und bilden ihre Deklinationskreise mit m die Winkel P' und P'', so hat man, wenn $P' + P'' = 2P$ und $\delta' + \delta'' = 2\delta$ gesetzt wird, nach den sog. Gauss'schen Formeln die Beziehungen



$$\begin{aligned} \text{Si}\,\tfrac{1}{2}m \cdot \text{Si}\,P &= \text{Si}\,\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') \cdot \text{Co}\,\delta \\ \text{Si}\,\tfrac{1}{2}m \cdot \text{Co}\,P &= \text{Co}\,\tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha'') \cdot \text{Si}\,\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta'') \end{aligned} \quad \mathbf{1}$$

in welchen aber in unserm Falle, wo es sich um den Durchgang eines der untern Planeten (P') durch die Sonne (P'') handelt, die m, $(\alpha' - \alpha'')$ und $(\delta' - \delta'')$ so klein sind, dass man jene Beziehungen füglich durch

$$m \cdot \text{Si}\,P = (\alpha' - \alpha'') \cdot \text{Co}\,\delta \qquad m \cdot \text{Co}\,P = \delta' - \delta'' \qquad \mathbf{2}$$

ersetzen darf, und so z. B. für eine der Konjunktion nahe Zeit T_0, wenn die dieser Zeit entsprechenden Grössen ebenfalls mit dem Zeiger 0 versehen werden,

$$m_0 \cdot \text{Si}\,P_0 = (\alpha_0' - \alpha_0'') \cdot \text{Co}\,\delta_0 \qquad m_0 \cdot \text{Co}\,P_0 = \delta_0' - \delta_0'' \qquad \mathbf{3}$$

hat. Ist nun $T = T_0 + \tau$, wo τ in Stunden ausgedrückt sein soll, die irgend einer Phase des Durchganges entsprechende Zeit, und sind a und d die Differenzen der stündlichen Änderungen der AR und D der beiden Gestirne, so dass

$$\alpha' - \alpha'' = \alpha_0' - \alpha_0'' + a \cdot \tau \qquad \delta' - \delta'' = \delta_0' - \delta_0'' + d \cdot \tau \qquad \mathbf{4}$$

sind ferner s' und s'' die scheinbaren Halbmesser in Beziehung auf das Erdcentrum, so dass für die äussere oder innere Berührung $m = s'' \pm s'$ wird, so hat man nach 2 für diese Berührungen unter Vernachlässigung des Unterschiedes zwischen Co δ und Co δ_0

$$(s'' \pm s') \cdot \text{Si}\,P = (\alpha_0' - \alpha_0'' + a \cdot \tau) \cdot \text{Co}\,\delta_0 \qquad (s'' \pm s') \cdot \text{Co}\,P = \delta_0' - \delta_0'' + d \cdot \tau$$

oder, wenn man

$$n \cdot \text{Si}\,N = a \cdot \text{Co}\,\delta_0 \qquad n \cdot \text{Co}\,N = d \qquad \mathbf{5}$$

setzt, und 3 benutzt

$$(s'' \pm s') \cdot \text{Si}\,P = m_0 \cdot \text{Si}\,P_0 + n \cdot \text{Si}\,N \cdot \tau \qquad (s'' \pm s') \cdot \text{Co}\,P = m_0 \cdot \text{Co}\,P_0 + n \cdot \text{Co}\,N \cdot \tau \qquad \mathbf{6}$$

oder endlich, wenn man 6' · Co N − 6'' · Si N und 6' · Si N + 6'' · Co N bildet,

$$(s'' \pm s') \cdot \text{Si}(P - N) = m_0 \cdot \text{Si}(P_0 - N) \qquad (s'' \pm s') \cdot \text{Co}(P - N) = m_0 \cdot \text{Co}(P_0 - N) + n \cdot \tau \qquad \mathbf{7}$$

Setzt man daher

$$\text{Si}\,\psi_1 = m_0 \cdot \text{Si}\,(P_0 - N) : (s'' + s') \qquad \text{Si}\,\psi_2 = m_0 \cdot \text{Si}\,(P_0 - N) : (s'' - s') \qquad \mathbf{8}$$

so hat man nach 7''

$$\tau = \frac{s'' \pm s'}{n} \cdot \text{Co}\,(P - N) - \frac{m_0}{n} \cdot \text{Co}\,(P_0 - N) \qquad \mathbf{9}$$

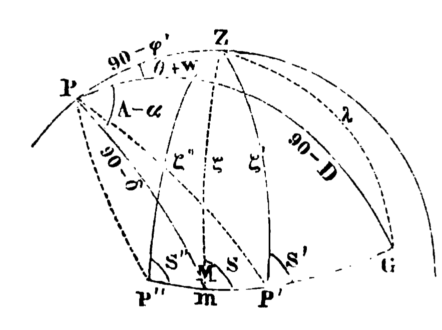
wo in beiden Fällen (wegen der Zweideutigkeit des Sinus) P — N nach 7' entweder gleich ψ oder gleich $180^\circ - \psi$ ist. Da der zweite dieser Werte das

erste Glied von τ negativ macht, so entspricht er offenbar dem Eintritte, der erste dagegen dem Austritte, so dass für die 4 Berührungen, nämlich die

erste äussere	$T = T_0' - (s'' + s') \cdot Co\,\psi_1 : n$		$P = N + 180^\circ - \psi_1$	
erste innere	$- (s'' - s') \cdot Co\,\psi_2 : n$	**10**	$+ 180^\circ - \psi_2$	**11**
letzte innere	$+ (s'' - s') \cdot Co\,\psi_2 : n$		$+ \psi_2$	
letzte äussere	$+ (s'' + s') \cdot Co\,\psi_1 : n$		$+ \psi_1$	

wird, wo $$T_0' = T_0 - m_0 \cdot Co\,(P_0 - N) : n \qquad \mathbf{12}$$

die Zeit der Mitte des Durchganges oder der kürzesten Distanz der Mittelpunkte der beiden Gestirne bezeichnet, und der Positionswinkel P vom Nordpunkte der Sonnenscheibe nach Osten zu zählen ist. — ***b.*** Um die Durchgangserscheinungen für einen Punkt an der Erdoberfläche vorauszubestimmen, seien φ und w dessen geographische Breite und Länge, φ' und ϱ dessen geocentrische Coordinaten, während m' die Distanz bezeichne, welche an ihm die beiden Gestirne P' und P'' zu derselben Zeit zeigen, wo sie die geocentrische Distanz m besitzen. Haben nun zu dieser Zeit T die beiden Gestirne die geocentrischen Zenitdistanzen ζ' und ζ'', so sind nach 435, wenn π' und π'' die Parallaxen bezeichnen und je im Korrektionsgliede der Unterschied $\varphi - \varphi'$ vernachlässigt wird, die entsprechenden scheinbaren Zenitdistanzen gleich $\zeta' + \varrho \cdot \pi' \cdot Si\,\zeta'$ und $\zeta'' + \varrho \cdot \pi'' \cdot Si\,\zeta''$, und man hat daher, wenn $m' = m + dm$ ist, nach der Fehlergleichung 92:1, bei Vernachlässigung des minimen Einflusses der Parallaxe auf den die Differenz der Azimute darstellenden Winkel P' Z P'',



$$m' - m = dm = Co\,S'' \cdot d(ZP'') - Co\,S' \cdot d(ZP') = \varrho\,[\pi'' \cdot Si\,\zeta'' \cdot Co\,S'' - \pi' \cdot Si\,\zeta' \cdot Co\,S'] \qquad \mathbf{13}$$

Nun folgen aber (90:3), wenn M die Mitte zwischen P' und P'' bezeichnet, aus den Dreiecken Z M P' und Z M P''

$$Si\,\zeta' \cdot Co\,S' = Si\,\zeta \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Co\,S - Co\,\zeta \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m$$
$$Si\,\zeta'' \cdot Co\,S'' = Si\,\zeta \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Co\,S + Co\,\zeta \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m$$

also nach 13, wenn g und γ durch

$$g \cdot Si\,\gamma = (\pi' + \pi'') \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m \qquad g \cdot Co\,\gamma = (\pi' - \pi'') \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \quad \text{so dass } g > \pi' - \pi'' \qquad \mathbf{14}$$

eingeführt werden,

$$\begin{aligned} m' - m &= \varrho\,[(\pi' + \pi'') \cdot Si\,{}^1\!/_2\,m\,Co\,\zeta - (\pi' - \pi'') \cdot Co\,{}^1\!/_2\,m \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S] \\ &= g \cdot \varrho \cdot [Si\,\gamma\,Co\,\zeta - Co\,\gamma \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S] \end{aligned} \qquad \mathbf{15}$$

Verlängert man aber P'' P' bis G, wo $MG = 90^\circ + \gamma$ sein soll, so folgt aus dem dadurch bestimmten Dreiecke M Z G

$$Co\,\lambda = Co\,\gamma \cdot Si\,\zeta \cdot Co\,S - Si\,\gamma \cdot Co\,\zeta \qquad \mathbf{16}$$

und man hat daher statt 15 die einfache Beziehung

$$m' = m - g \cdot \varrho \cdot Co\,\lambda \qquad \mathbf{17}$$

welche **Chauvenet** (Astr. I 595) auf diese hübsche Weise, dagegen allerdings (vgl. 436:17) schon **Lagrange** für $\varrho = 1$ abgeleitet hat. Sie zeigt, dass, abgesehen von der kleinen Verschiedenheit wegen ϱ, die sog. **Parallaxe der**

Distanz $m' - m$ für alle Punkte der Erde, deren Zenit von G denselben Abstand besitzt, auch den gleichen Betrag hat. — Bezeichnen A und D Rektascension und Deklination dieses merkwürdigen Punktes G, so erhält man, da M sehr nahe die Coordinaten $\alpha = \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha'')$ und $\delta = \frac{1}{2}(\delta' + \delta'')$, sowie $\angle$ PMG sehr nahe den Wert $P = \frac{1}{2}(P' + P'')$ hat, aus Dreieck PMG

$$\begin{aligned} \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Si}\,(A - \alpha) &= \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,P & \text{wo} \quad f \cdot \mathrm{Si}\,F &= \mathrm{Si}\,\gamma \\ \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(A - \alpha) &= - f \cdot \mathrm{Si}\,(F + \delta) & f \cdot \mathrm{Co}\,F &= \mathrm{Co}\,\gamma \cdot \mathrm{Co}\,P \\ \mathrm{Si}\,D &= f \cdot \mathrm{Co}\,(F + \delta) \end{aligned} \qquad \mathbf{18}$$

so dass A und D sehr leicht berechnet werden können. Ist ferner μ die der Zeit T am Ephemeridenort entsprechende Sternzeit, und setzt man $\theta = \mu - A$, so ist $\angle$ GPZ (da die Sternzeit für unsern Ort gleich $\mu + w$ ist) als Ortsstundenwinkel von G gleich $\mu + w - A = \theta + w$, also folgt, da $PZ = 90^0 - \varphi'$ ist, aus Dreieck PZG

$$\mathrm{Co}\,\lambda = \mathrm{Si}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,D + \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(\theta + w) \qquad \mathbf{19}$$

wonach nun λ, folglich nach 17 auch m' wirklich berechnet werden kann. — Bezeichnet T' die Zeit, zu welcher an unserm Orte dieselbe Phase statt hat, welche geocentrisch zur Zeit T eintritt, so ist also z. B., wenn der Zeit T die geocentrische Distanz $m = s'' \pm s'$ entspricht, zur Zeit T' die scheinbare Distanz (abgesehen von der zu vernachlässigenden Veränderung der Radien) ebenfalls $m' = s'' \pm s'$. Ist somit $dm : dt$ die Veränderung von m in einer Zeiteinheit, so ist die geocentrische Distanz zur Zeit T' offenbar $m = m' + (T' - T) \cdot dm : dt$, also muss nach 17

$$(T' - T)\, dm : dt = g \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\lambda \qquad \mathbf{20}$$

sein. Aus 2 folgen aber durch Differentiation mit Hilfe von 5

$$\frac{dm}{dt} \cdot \mathrm{Si}\,P + \frac{dP}{dt} \cdot m \cdot \mathrm{Co}\,P = \frac{d(\alpha' - \alpha'')}{dt} \cdot \mathrm{Co}\,\delta = a \cdot \mathrm{Co}\,\delta_0 = n \cdot \mathrm{Si}\,N$$

$$\frac{dm}{dt} \cdot \mathrm{Co}\,P - \frac{dP}{dt} \cdot m \cdot \mathrm{Si}\,P = \frac{d(\delta' - \delta'')}{dt} = d = n \cdot \mathrm{Co}\,N$$

oder, indem man die erstere dieser Gleichheiten mit Si P, die zweite mit Co P multipliziert, und dann beide addiert, sowie schliesslich die aus 7' und 8' gezogenen Schlüsse benutzt,

$$dm : dt = n \cdot \mathrm{Co}\,(P - N) = \mp n \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad \mathbf{21}$$

wo das obere Zeichen für den Eintritt, das untere für den Austritt gilt. Man hat also nach 20, 14 und 19

$$T' = T \mp \frac{g \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\lambda}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} = T \mp \mathbf{A} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' \mp \mathbf{B} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\theta + w) \qquad \mathbf{22}$$

wo

$$\mathbf{A} = \frac{\pi' - \pi''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \cdot \mathrm{Si}\,D \qquad \mathbf{B} = \frac{\pi' \quad \pi''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \cdot \mathrm{Co}\,D \qquad \mathbf{23}$$

Nach diesen, in der Reihenfolge 3, 5, 8, 12, 10, 11 für die geocentrischen, und 14, 18, 23, 22 für die lokalen Erscheinungen zu benutzenden Formeln, erhielt ich seiner Zeit für den Venusdurchgang von 1882 XII 6, unter Benutzung der Angaben des Naut. Alm., für die vier Hauptphasen die Schlussformeln

$$\begin{aligned} T' &= 1^h\ 55^m\ 55^s + 2{,}54701^s \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' - 2{,}48164 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - \ \ 88^0\ 25') \\ &= 2\ \ 16\ \ 15 + 2{,}59455 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' - 2{,}47983 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - \ \ 86\ \ 25) \\ &= 7\ \ 51\ \ 41 - 2{,}31298 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + 2{,}63665 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 138\ \ 25) \\ &= 8\ \ 12\ \ \ 1 - 2{,}23951 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' + 2{,}63468 \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(w - 134\ \ 46) \end{aligned} \qquad \mathbf{24}$$

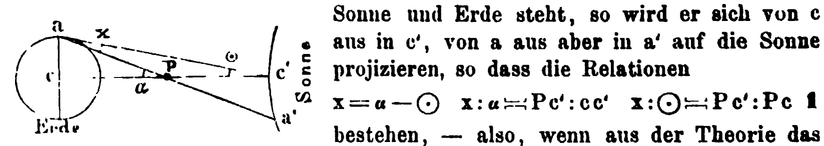
und nach diesen z. B. für Zürich ($\varrho = \overline{9{,}99921}$, $\varphi' = 47^\circ\ 11'\ 12''$, $w = 0^h\ 24^m\ 51^s + 9^m\ 22^s = 8^\circ\ 33'\ 15''$)

$T' = 1^h\ 59^m\ 37^s$	$2^h\ 20^m\ 20^s$	$7^h\ 46^m\ 7^s$	$8^h\ 7^m\ 1^s$	Gr.
$= 2\ \ 33\ \ 50$	$2\ \ 54\ \ 33$	$8\ \ 20\ \ 20$	$8\ \ 41\ \ 14$	Z.

wobei aber im günstigsten Falle nur die zwei ersten zu sehen gewesen wären, da die Sonne schon lange vor dem Austritte unterging, — in Wirklichkeit aber wegen bedecktem Himmel ebenfalls nicht beobachtet werden konnten: Venus wurde von mir nur zwei Mal je einen Moment vor der Sonne gesehen, — etwas vor dem vollständigen Eintritte und wieder etwas nach demselben, doch immerhin so, dass die Vorausberechnung richtig zu sein schien.

448. Die Methoden von Halley und Delisle. — Bei Anlass eines 1677 von **Halley** während seines zur Revision des südlichen Himmels bestimmten Aufenthaltes auf St. Helena beobachteten Merkurdurchganges kam derselbe auf den Gedanken, dass man durch Vergleichung der beobachteten Verweilung des Planeten auf der Sonne mit der aus den Tafeln für das Erdcentrum berechneten oder noch besser mit der an einem andern Orte ebenfalls beobachteten Verweilung die Sonnenparallaxe berechnen könnte [a], — und bei weiterer Ueberlegung zeigte sich ihm, dass bei Anwendung der Venus [b], und bei richtiger Auswahl der Stationen [c], sogar auf diese Weise eine sehr gute Bestimmung erhalten werden dürfte, so dass er schon 1691 und dann namentlich 1716 den spätern Geschlechtern dringend empfahl, die bevorstehenden Venusdurchgänge in dieser Weise auszunutzen [d]. Später wurde sodann diese Methode durch Joseph-Nicolas **Delisle** [e] noch wesentlich vervollständigt, indem derselbe zeigte, dass auch vereinzelte Beobachtungen einer bestimmten Phase des Durchganges brauchbar seien, sobald sie an wenigstens zwei Orten gelingen [f].

Zu 448: *a.* Die Grundidee der mutmasslich schon **Kepler** bei Abfassung seiner „Admonitio" vorschwebenden, jedenfalls spätestens durch Jam. **Gregory** in seiner „Optica promota. London 1663 in 4." angedeuteten, aber doch erst durch **Halley** in lebensfähige Form gebrachten neuen Methode der Parallaxenbestimmung ist folgende: Wenn einer der untern Planeten bei P zwischen Sonne und Erde steht, so wird er sich von c aus in c', von a aus aber in a' auf die Sonne projizieren, so dass die Relationen



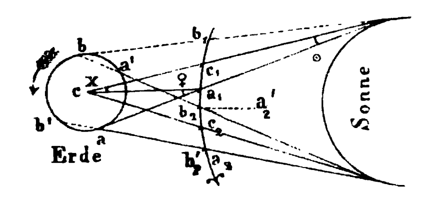
$$x = \alpha - \odot \qquad x : \alpha \doteq Pc' : cc' \qquad x : \odot \doteq Pc' : Pc \qquad 1$$

bestehen, — also, wenn aus der Theorie das Verhältnis von Pc' zu cc' oder Pc bekannt ist, durch Bestimmung von x wirklich α und $\odot$ erhalten werden können. Dabei wird x, das offenbar dem scheinbaren Abstande der durch P beim Vorübergange für a und c beschriebenen Sonnen-Sehnen entspricht, sich in der Weise finden lassen, dass man in a die Ein- und Austrittszeit von P beobachtet, für c dagegen diese Zeiten mit Hilfe der Tafeln berechnet, und analog wie beim Kreismikrometer (395) aus

den in Zeitdifferenzen liegenden Massen der Sehnen auf ihren Abstand schliesst. — *b.* So fand **Halley**, wie er selbst in einem Anhange zu seinem „Catalogus stellarum australium (616)“ erzählt, dass der von ihm 1677 X 28 a. St. beobachtete Merkurdurchgang $5^h\ 14^m\ 20^s$ in Anspruch genommen habe, und schloss daraus unter Benutzung der von Th. **Streete** in seiner „Astronomia carolina (10)“ gegebenen, aber allerdings noch sehr unvollkommenen Tafeln, dass $x = 21''$ und $\odot = 45''$ sein müsse, — ein Ergebnis, das allerdings viel zu wünschen übrig liess, aber wohl beträchtlich besser ausgefallen sein würde, wenn ihm korrespondierende Beobachtungen zur Verfügung gestanden hätten, geschweige wenn statt eines Merkurdurchganges ein Venusdurchgang vorgelegen wäre. Da nämlich für Merkur $Pc' \fallingdotseq 0,387 \cdot cc'$, für Venus dagegen $Pc' \fallingdotseq 0,723 \cdot cc'$ ist, so hat man nach 1, wenn sich x' auf ☿, x'' auf ♀ bezieht,

$$\odot = \frac{613}{387} \cdot x' \fallingdotseq \frac{8}{5} x' \qquad \odot = \frac{277}{723} \cdot x'' \fallingdotseq \frac{5}{13} x''$$

und es ist daher ♀ für diese Bestimmung nahe $^8/_5 : ^5/_{13} \fallingdotseq 4$ mal günstiger als ☿, was auch **Halley** einsah und darum schon damals die Astronomen auf den Venusdurchgang von 1761 vertröstete. — *c.* Ebenso sah **Halley** ganz gut ein, dass für korrespondierende Beobachtungen die Auswahl der Beobachtungsorte sehr wichtig sei, indem man dadurch die eine Verweilung erheblich verkürzen, dagegen die andere verlängern, und so den Einfluss der Parallaxe stärker hervortreten lassen könne: Von c aus sieht man nämlich die Venus in die Sonne eintreten, wenn sie in den Punkt c_1 ihrer Bahn gekommen ist, und austreten in c_2, — von a und b aus bei ruhender Erde eintreten in a_1 und b_1, austreten in a_2 und b_2, so dass die Bogen $a_1 a_2 \fallingdotseq c_1 c_2 \fallingdotseq b_1 b_2$; kömmt aber während dem Durchgange, infolge der Rotation der Erde, a nach a' und b nach b', so scheint für a' die Venus **schon** in a_2', für b' aber **erst** in b_2' auszutreten, und es ist sehr merklich $b_1 b_2' > a_1 a_2'$.



Während somit z. B. für einen dem Equator nahen Punkt durch die Erdrotation die Verweilung verkürzt wird, so nimmt sie dagegen für einen Punkt auf der Mitternachtsseite des beleuchteten Poles (wo man den Eintritt Abends vor Sonnenuntergang und den Austritt Morgens nach Sonnenaufgang beobachten kann) infolge derselben zu. — *d.* Vgl. **Halleys** Abhandlungen „De visibili conjunctione inferiorum planetarum cum Sole (Ph. Tr. No. 193 for 1691 III—VI, jedoch Bestandteil des erst 1694 vollständig erschienenen Vol. 17 for 1693, und so oft falsch citirt), und: Methodus singularis quæ Solis parallaxis, ope Veneris intra Solem conspiciendæ, tuto determinari poterit (Ph. Tr. 1716)“. — *e.* Joseph Nicolas **Delisle** (Paris 1688 — ebenda 1768) war Akad. Paris, brachte aber die Jahre 1725—47 in Petersburg zu, wohin ihn sein jüngerer Bruder Louis (Paris 1690? — Awatscha in Kamtschatka 1741) begleitete, um von dort aus die nördlichsten Teile Russlands behufs Ortsbestimmungen zu bereisen. Für einen ältern Bruder vgl. 218 : d. — *f.* Bezeichnen T_1 und T_2 die auf den Anfangsmeridian bezüglichen Zeiten, zu welchen geocentrisch dieselbe Phase beim Ein- und Austritte statt hat, T_1', T_1'', T_2', T_2'' aber die Ortszeiten, zu welchen sie von zwei Beobachtern unter den Längen w' und w'' gesehen wird, so hat man nach 447 : 22'

$$T_1' - w' = T_1 - (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_1'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad T_2' - w' = T_2 + (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_2'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi}$$

$$T_1'' - w'' = T_1 - (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_1''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \qquad T_2'' - w'' = T_2 + (\pi' - \pi'') \cdot \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_2''}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi} \quad \mathbf{2}$$

Kann man nun aus den erhaltenen Beobachtungen nach der **Vorschrift von Halley** die Differenz k' der Verweilungen oder nach der **Annahme von Delisle** wenigstens die Differenz k'' zweier entsprechenden Phasenzeiten bestimmen, so hat man nach 2

$$k' = T_2'' - T_1'' - (T_2' - T_1') = m' \cdot (\pi' - \pi'')$$
$$k'' = T'' - T' = w'' - w' - m'' \cdot (\pi' - \pi'') \quad \mathbf{3}$$

wo $m' = \frac{\varrho''(\mathrm{Co}\,\lambda_1'' + \mathrm{Co}\,\lambda_2'') - \varrho'(\mathrm{Co}\,\lambda_1' + \mathrm{Co}\,\lambda_2')}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi}, \quad m'' = \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda'' - \varrho' \cdot \mathrm{Co}\,\lambda'}{n \cdot \mathrm{Co}\,\psi}$ **4**

bekannte Grössen sind, — kann daher in beiden Fällen $\pi' - \pi''$, folglich auch, da aus der Theorie das den Distanzen reciproke Verhältnis $\pi' : \pi$ bereits bekannt ist, jede der beiden Parallaxen selbst berechnen, — und sodann schliesslich aus der einen oder andern von ihnen auch die der Distanz 1 entsprechende Sonnenparallaxe π ableiten. Die Halley'sche Methode hat vor der Delisle'schen den namentlich im vorigen Jahrhundert nicht zu übersehenden Vorzug, eine genaue Kenntnis der Längendifferenz der beiden Stationen nicht voraussetzen zu müssen.

449. Die Venusdurchgänge von 1761 und 1769. — Der Mahnruf von **Halley** wurde nicht vergessen, sondern man unternahm, als der erste der beiden auf 1761 und 1769 angesagten Durchgänge herannahte, ernstliche Vorbereitungen zu seiner Beobachtung [a], ja präparirte, weil man nicht überall alle Phasen zu sehen hoffen konnte und die besten Kombinationen ermöglichen wollte, mehrere Expeditionen in ferne Erdgegenden [b]. Trotzdem entsprach der Erfolg keineswegs den von **Halley** gehegten Erwartungen [c], indem man sich sogar eingestehen musste, nach 1761 über den Betrag der Sonnenparallaxe weniger zu wissen als man vorher zu wissen glaubte [d], und es ist als ein Glück im Unglücke zu betrachten, dass man sich durch diesen Misserfolg nicht entmutigen liess, sondern gegenteils alle Kräfte anspannte, um 1769 das erwünschte Ziel zu erreichen [e]. Es gelang dies dann auch wirklich in befriedigender Weise, indem sich im Mittel aus den (450) damals nach den verschiedensten Kombinationen und Rechnungsmethoden erhaltenen Werten die Sonnenparallaxe

$$\pi = 8'',681 + 0'',052$$

ergiebt, welche sich (452) unzweifelhaft der Wahrheit sehr nahe anschliesst [f].

Zu 449: *a.* Namentlich war **Delisle** in dieser Richtung unermüdlich und gab schon in seinem „Avertissement aux astronomes sur le passage de Mercure au devant du Soleil, qui doit arriver le 6 mai 1753. Avec une Mappemonde. Paris 1753 (24 p.) in 4.", wo sich zum ersten Mal die in 436 besprochenen Kreise angewandt finden, — ganz besonders aber in seinem „Mémoire présenté

au Roi le 27 avril 1760 pour servir d'explication à la Mappemonde présentée en même tems à sa Majesté au sujet du passage de Vénus sur le Soleil, que l'on attend le 6 juin 1761. Paris 1760 (8 p. in 4.)", wo er auch die oben (448) besprochene Möglichkeit hervorhob, korrespondierende Beobachtungen einzelner Phasen nutzbar zu machen, wertvolle Andeutungen über die zweckmässigste Auswahl der Stationen und das bei der Beobachtung einzuschlagende Verfahren gab. Ferner wird auf die betreffenden Abhandlungen der **Lalande** (Mém. Paris 1757), **Chabert** (dito), **Boscovich** (Ph. Tr. 1760), etc., verwiesen. — ***b.*** So reiste Joseph-Guillaume **Legentil** (Coutances in Normandie 1725 — Paris 1792; Akad. Paris; vgl. p. 358—72 der „Mémoires" von J. D. Cassini) schon 1759 nach Pondichery ab, wo er dann aber, infolge unglücklicher politischer Verhältnisse, nichts destoweniger erst nach dem Durchgange von 1761 landen konnte, und auch denjenigen von 1769 (wegen Wolken) vergeblich abwartete (vgl. „Voyage dans les mers de l'Inde. Paris 1778—81, 2 Vol. in 4."), — etwas später **Pingré** nach der östlich von Madagaskar gelegenen Insel Rodriguez (Mém. Par. 1761 und 1763), — **Maskelyne** nach St. Helena (Ph. Tr. 1761), — Anders **Planmann** (Hattula Socken 1724 — Pemar Prestgard 1803; Prof. phys. Abo) nach Cajaneburg in Nordschweden (Schwed. Abh. 1761), — **Chappe** d'Auteroche nach Tobolsk (vgl. „Voyage en Sibérie. Paris 1763, 3 Vol. in 4."), — Stephan **Rumovski** (Gouv. Wladimir 1734 — Petersburg 1812; Schüler von Euler; Prof. math. Petersburg) nach Selengisk an der Grenze der Mongolei (Nov. Comm. Petr. 11), — etc., und da im centralen Europa ebenfalls fast überall beobachtet wurde, so waren schliesslich, wenn auch durch Witterung und Zufälle aller Art manche Beobachtungen vereitelt wurden, immerhin 72 Stationen vorhanden, von welchen brauchbare Ergebnisse vorlagen. — ***c.*** Da aus 448:f die Proportion $d\pi : \pi = dk' : k'$ folgt, — ferner k' bis auf mindestens 1500^s gesteigert werden kann, — dagegen zur Zeit von **Halley** alle die kleinen störenden Einflüsse unbekannt waren, also von ihm angenommen werden durfte, dass die Unsicherheit dk' höchstens einige Sekunden betragen könne, — so war er nämlich zu der Hoffnung berechtigt, dass sich nach seiner Methode die Sonnenparallaxe mindestens bis auf $^1/_{100}$" genau bestimmen lassen werde. — ***d.*** Auch mit Ausschluss einzelner Daten, welche die Sonnenparallaxe verschwinden liessen oder bis auf 30" brachten, ergab die Berechnung gar nicht die gehoffte Übereinstimmung, indem z. B. **Pingré** (Mém. Par. 1761) $\pi = 10^1/_2$", **Short** (Ph. Tr. 1762) $\pi = 8^1/_2$", **Hornsby** (Ph. Tr. 1763) $\pi = 9^3/_4$", etc., erhielt. — ***e.*** Unter den auf diesen zweiten Durchgang vorbereitenden Publikationen hebe ich, ausser der mehrerwähnten Abhandlung **Lagranges** von 1766, teils die schon 1764 von **Lalande** nebst einer „Explication (26 p. in 4.)" ausgegebene, derjenigen von Delisle für 1761 entsprechende „Figure du passage de Vénus sur le disque du Soleil qu'on observera le 3 juin 1769", hervor, welche eine rasche Übersicht über den Verlauf der Erscheinung darbietet, — teils die von **Maskelyne** gegebenen „Instructions relative to the observations of the ensuing transit of Venus. London 1768 in 8.", in welchen unter anderm der bemerkenswerte Vorschlag gemacht wurde, ausser den Hauptphasen auch die kürzeste Distanz der Mittelpunkte und möglichst viele relative Venusörter zu bestimmen. — Von den für die Beobachtung selbst arrangierten Expeditionen erwähne ich diejenige, welche James **Cook** (Marton in Yorkshire 1728 — Owaihi 1779; britt. Marine-Kapitän) im Begleite von Ch. Green und D. Solander nach Otaheiti machte (Ph. Tr. 1771), — ferner diejenigen von **Pingré** nach St. Domingo (Mém. Par. 1770), von **Chappe** nach Kalifornien (vgl. die von J. D. Cassini aus dessen

Nachlass herausgegebene „Voyage en Californie. Paris 1772 in 4.“), von **Rittenhouse** nach Norriton (Amer. Tr. I), von **Planmann** nach Cajaneborg (Vetensk. Acad. Handl. 1769), von **Hell** im Begleite von Saynovizs und Borgreeving nach Wardoehuus in Norwegen (vgl. für dessen von Manchen als gefälscht, von Andern als berechtigt korrigiert betrachteten Beobachtungen, seine „Observatio transitus Veneris. Havniæ 1770 in 4.“, ferner „K. Littrow, Hell's Reise nach Wardoe. Wien 1835 in 8.“, etc.), — etc., wozu noch eine Reihe von Beobachtungsstellen aus Westeuropa, und dann namentlich ein in Russland durch **Euler** und seine Schule organisiertes grosses Beobachtungsnetz hinzukam (vgl. die „Collectio omnium observationum, quæ occasione transitus Veneris per Solem A. 1769 per Imperium russicum institutæ fuerunt. Petropoli 1770 in 4., — und: Christ. Mayer, Expositio de transitu Veneris. Petropoli 1769 in 4.“), so dass im ganzen, obschon auch da viele Beobachtungen durch die Witterung vereitelt wurden, bei 77 Stationen mit brauchbaren Ergebnissen vorlagen. — *f.* Das oben mitgeteilte Ergebnis von 1769 ist das Mittel aus den sofort von **Planmann, Lalande, Lexell, Hell, Maskelyne, Hornsby, Pingré** und **Duséjour** nach den verschiedensten Kombinationen und Methoden erhaltenen 8 Werten

8″,43 8″,50 8″,68 8″,70 8″,72 8″,78 8″,80 8″,84

(vgl. Ph. Tr., Mém. Par., Comm. Petr., Vet. Acad. Handl. und Eph. Vind. aus den Jahren 1769—74), deren Übereinstimmung damals als sehr befriedigend bezeichnet werden durfte.

450. Die Berechnung der Beobachtungen. — Anstatt in analoger Weise, wie es oben (448) gelehrt, ja auch unmittelbar nach Beobachtung der Venusdurchgänge von 1761 und 1769 fast ausschliesslich praktiziert wurde, die Stationen in geeigneter Art paarweise zusammenzustellen, aus jedem Paare nach den entwickelten Regeln die Sonnenparallaxe zu bestimmen, und schliesslich aus den erhaltenen Einzelwerten einfach (wie in 449) das Mittel zu ziehen, wurde schon von **Euler** und seiner Schule beliebt, solche Einzelrechnungen höchstens zur vorläufigen Orientierung auszuführen, dagegen für die definitive Bestimmung die zwischen den gegebenen, beobachteten und gesuchten Grössen bestehenden Beziehungen für jede einzelne Beobachtung aufzuschreiben, und sodann erst aus der Gesamtheit der so erhaltenen Bedingungsgleichungen die zur Bestimmung der Unbekannten nötige Anzahl sog. Normalgleichungen zu erstellen ᵃ. Die neuere Zeit hat dann allerdings diese Methode, namentlich in Beziehung auf die früher etwas willkürliche Bildung der Normalgleichungen, nach den Principien der Ausgleichungsrechnung (52) noch wesentlich verbessert, und es hat sich **Encke** das Verdienst erworben, die Gesamtheit der 1761 und 1769 erhaltenen Daten in dieser Weise nochmals zu bearbeiten, wobei sich der mit dem oben (449) gegebenen nahe zusammenstimmende, aber

dennoch, wie wir jetzt (452) wissen, trotz dem grossen Rechnungs-apparate etwas weniger gute Wert

$$\pi = 8'',578 \pm 0'',077$$

und damit zugleich ein neues Belege dafür ergab, dass man solche feinere Methoden in der Regel nur da mit Vorteil anwendet, wo auch entsprechend vollkommene und namentlich für eine richtige Gewichtsbestimmung genügende Daten vorliegen [b].

Zu 450: *a.* Für den Detail der Rechnung auf die bereits erwähnte „Collectio" von 1770 verweisend, füge ich bei, dass damals aus 17 Bedingungsgleichungen für die Sonnenparallaxe der mutmassliche, mit dem (449) aus den Einzelwerten gezogenen Mittel fast ganz übereinstimmende Wert $\pi = 8'',66$ erhalten wurde. — *b.* Für die **Encke** zu verdankenden Zusammenstellungen und Rechnungen auf dessen Schriften „Die Entfernung der Sonne von der Erde aus dem Venusdurchgange von 1761 hergeleitet. Gotha 1822 in 8., — und: Der Venusdurchgang von 1769. Gotha 1824 in 8." verweisend, bleibt beizufügen, dass der seither erschienenen Arbeit „Karl Rudolf **Powalky** (Neu-Dietendorf bei Gotha 1817 — Washington 1881; astr. Rechner in Berlin und Washington), Neue Untersuchung des Venusdurchganges von 1769. Kiel 1864 in 8." ebenfalls ein gewisses Verdienst nicht abzusprechen ist, zumal ihr Schlussresultat sich mit $\pi = 8'',832$ den neuesten Bestimmungen ganz vorzüglich anschliesst; aber da dieses Resultat nicht nur Folge der Anwendung neuer Tafeln und Ortsbestimmungen, sondern namentlich auch eines teilweise etwas willkürlichen Ausschlusses von Beobachtungen ist, so gewährt es doch auch nicht volle Befriedigung. Eine in der neuesten Zeit durch S. **Newcomb** unternommene ähnliche Arbeit soll als wahrscheinlichstes Resultat der beiden Durchgänge von 1761 und 1769 den Wert $\pi = 8'',79 \pm 0'',05$ ergeben haben.

451. Die Venusdurchgänge von 1874 und 1882. — Auch für die Beobachtung der Durchgänge von 1874 und 1882 fehlte es weder an Vorarbeiten und Besprechungen aller Art, noch an Ausrüstung zahlreicher Expeditionen in die entlegensten Gegenden, und man durfte hoffen, unter Benutzung der frühern Erfahrungen, Anwendung der vollkommensten Instrumente, Ausdehnung der Beobachtungen auf die ganze Zeit des Vorüberganges und Beiziehung der Photographie, wieder einen bedeutenden Fortschritt in der Kenntnis der Sonnenparallaxe zu machen [a]. Diese Hoffnung ging jedoch nur bis zu einem gewissen Grade in Erfüllung, indem sich sowohl in der Auffassung der Erscheinungen als bei den mikrometrischen Bestimmungen immer noch unerwartete Abweichungen zeigten, und auch die den photographischen Aufnahmen entnommenen Daten lange nicht die vermuthete Sicherheit besassen. Immerhin darf man annehmen, dass, wenn einmal das gewonnene grosse Beobachtungsmaterial einheitlich bearbeitet sein wird, ein ziemlich sicheres, mut-

masslich sich von dem aus einer Reihe von Einzelbestimmungen erhaltenen Mittelwerte

$$\pi = 8'',885 \pm 0'',021$$

wenig entfernendes Schlussresultat erlangt werden kann [b].

Zu 451: *a.* Obgleich man zum voraus wusste, dass der im Dezember 1874 zu erwartende Venusdurchgang unter nicht sehr günstigen Verhältnissen verlaufen, in Europa mit Ausnahme von Unter-Italien und Griechenland gar nicht zu sehen sein werde, und man nur in Asien etwas lange, in Australien und den Südseeinseln etwas kurze Verweilungen erwarten könne, so wurden doch von Staats wegen bei 60 Expeditionen zu seiner Beobachtung ausgerüstet, um wenigstens über die Leistungsfähigkeit der neuern Beobachtungsmittel Erfahrungen sammeln, und diese sodann bei dem ohnehin weit günstigern und zugleich für unser Jahrtausend letzten Durchgange im Dezember 1882 verwerten zu können. Dank dieser grossen Anstrengung wurden dann auch, trotz der namentlich auf den sibirischen Stationen ungünstigen Witterung, zahlreiche Beobachtungen und viele, wenn auch grossenteils nicht sehr erfreuliche, Erfahrungen gesammelt wie z. B. die, dass an demselben Orte zwei mit wesentlich gleichen Instrumenten bewaffnete Beobachter den Zeitmoment derselben Phase bis auf 10 und mehr Zeitsekunden verschieden angaben, — oder wieder, dass die aufgenommenen Photographien lange nicht den auf sie gesetzten Hoffnungen entsprechen, indem nach **Hilfiker** (Bull. Neuch. 1882) der wahrscheinliche Fehler der aus einer Photographie bestimmten Distanz der Centra von ♀ und ⊙ bei fünf mal grösser ist als der aus einer mikrometrischen Messung gezogene, — ja **Tupman** bei Abnahme einer Anzahl englischer Photographien sogar zu der verzweifelten Ansicht gelangt sein soll, dass man die Anwendung der Photographie zu solchem Zwecke am besten geradezu verbieten würde. — Um die Ergebnisse von 1874 für 1882 möglichst nutzbar zu machen, versammelte sich im Oktober 1881 in Paris eine internationale Kommission, welche sich alsbald darüber einigte, dass es vor allem aus sehr wünschbar wäre, wenn sich, im Gegensatze zu 1874, die verschiedenen Staaten sowohl über die Auswahl der Stationen und Instrumente, als über die für die Beobachtungen und deren Bearbeitung zu erteilenden Instruktionen verständigen könnten. Speciell brach sich die Ansicht Bahn, dass die photographischen Aufnahmen in den Hintergrund zu treten haben, — dass für die während der ganzen Dauer des Durchganges vorzunehmenden Distanzbestimmungen die Fadenmikrometer mit den Doppelbildmikrometern nicht konkurrieren können und namentlich Heliometer zu empfehlen seien, — dass es wünschbar wäre, wenn die Ein- und Austritte wenigstens an einzelnen Stationen nach dem schon früher durch **Secchi** (vgl. Brief an Gautier von 1874 X 14 in Notiz 396) gemachten Vorschlage mit Hilfe des Spektroskopes beobachtet würden, — und dass für die gewöhnliche Beobachtung der Kontakte überall möglichst gleichartige Instrumente benutzt werden sollten. In Beziehung auf die schon von **Delisle**, gestützt auf Erfahrungen bei Merkurdurchgängen, in seinem „Avertissement“ von 1753 angedeutete, und bei den bisherigen Venusdurchgängen vielfach Unsicherheiten in den Zeitangaben bewirkende, aber noch gegenwärtig weder durch Diffraktion noch sonst ganz genügend erklärte Erscheinung, dass der Planet in der Regel noch **nach** der ersten innern, und schon **vor** der zweiten innern Berührung wie durch eine, erst mehrere Sekunden später plötzlich reissende oder einige Sekunden zuvor plötzlich

entstehende Brücke (ligament noir), einen sog. **Tropfen** (goutte), mit dem Sonnenrande verbunden erscheint, wurde endlich die Anweisung erteilt: „S'il se produit une goutte noire ou un ligament, les instants à noter sont **à l'entrée** celui de la rupture définitive, **à la sortie** celui de la prémière apparition du ligament“. — Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Besprechungen einen sehr günstigen Einfluss auf die Beobachtungen von 1882 ausübten, für welche, ausser zahlreichen europäischen und amerikanischen Sternwarten, nicht weniger als 38, meistenteils nach den nördlichsten und südlichsten Teilen Amerikas bestimmte Expeditionen in Aussicht genommen waren, obschon sich Russland, infolge der schlechten Rendite der 1874 für dasselbe weit über eine Million betragenden Unkosten, nicht an letztern beteiligte. Der Erfolg war dann auch, wie schon oben angedeutet wurde, ein ziemlich befriedigender. — *b.* In Beziehung auf den Durchgang von 1874 füge ich noch bei, dass vorläufig die Franzosen aus ihren damaligen Beobachtungen den Durchschnittswert $\pi = 8'',97$ erhielten, die Engländer $\pi = 8'',83$, die Deutschen $\pi = 8'',89$ und die Amerikaner $\pi = 8'',88$, was im Mittel $\pi = 8'',892 \pm 0'',029$ ergiebt, d. h. eine mit der oben als vorläufiges Resultat des Durchganges von 1882 über Erwarten gut übereinstimmende Zahl. — Die sichere Hoffnung aussprechend, dass der kürzlich S. **Newcomb** für die „Discussion of contact observations of Venus during its transits in 1874 and 1882“ zugesprochene Anteil an der grossartigen, von Miss **Bruce** zur Förderung astronomischer Untersuchungen gemachten Vergabung, wertvolle Aufschlüsse veranlassen werde, verweise ich zum Schlusse für weitern Detail auf „Victor-Alexandre **Puiseux** (Argenteuil in Seine-et-Oise 1820 — Frontenay im Dép. du Jura 1883; Prof. astr. und Akad. Paris), Note sur la détermination de la parallaxe du Soleil par l'observation du passage de Vénus en 1874 (Compt. r. 1869 und Conn. d. t. 1871, wo noch später mehrere betreffende Arbeiten von ihm folgten), — **Hansen**, Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge. Leipzig 1870 in 4., — Edm. **Dubois**, Les passages de Vénus sur le disque solaire. Paris 1873 in 8., — F. **Schorr**, Der Vorübergang der Venus vor der Sonnenscheibe am 9. Dezember 1874. Braunschweig 1873 in 8., — **Tacchini**, Il passagio di Venere sul Sole dall' 8/9 dicembre 1874 osservato a Muddapur nel Bengala. Palermo 1875 in 4., — **Airy**, Report on the telescopic observations of the transit of Venus 1874. London 1877 in 4., und: Account of observations of the transit of Venus 1874 XII 8 made under the authority of the british governement. London 1881 in 4., — Recueil de mémoires, rapports et documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil. Paris 1877—87, 3 Vol. in 4., — G. L. **Tupman**, On the photographs of the transit of Venus (Monthly Not. 38 von 1878), — L. **Weinek**, Die Photographie in der messenden Astronomie, insbesondere bei Venusvorübergängen. Halle 1879 in 4., — S. **Newcomb**, Observations of the transit of Venus 1874 XII 8/9 made and reduced under the direction of the commission created by congress. Washington 1880 in 4., — Conférence internationale du passage de Vénus: Procès-verbaux. Paris 1881 in fol., — C. F. **Pechüle**, Expédition danoise pour l'observation du passage de Vénus 1882. Copenhague 1883 in 8., — etc., etc.“

452. Andere Bestimmungen und letzte Resultate. — Auf einige untergeordnete Vorschläge zur Bestimmung der Sonnenparallaxe nicht näher eintretend [a], bleibt an die Beziehung zwischen derselben und der Erdmasse zu erinnern, welche schon **Newton** zur

Ermittlung dieser letztern benutzte, und sodann **Laplace** in für seine Zeit ganz berechtigter Weise umgekehrt anwandte, um erstere zu berechnen [b], — ferner an diejenige zwischen Sonnenparallaxe und Geschwindigkeit des Lichtes, welche, nachdem letztere, wie wir alsbald (467) hören werden, auf physikalischem Wege mit genügender Sicherheit ermittelt werden konnte, mit $\pi = 8'',788$ für erstere eine vorzügliche Kontrolbestimmung ergeben hat [c]. — Stellen wir zum Schlusse die erhaltenen neuern Bestimmungen der Sonnenparallaxe zusammen, so ergiebt sich aus

Oppositionen (445)	8″,908
Durchgängen (451)	885
Lichtgeschwindigkeit	788

so dass die Unhaltbarkeit des während vielen Decennien vorzugsweise benutzten Encke'schen Wertes erwiesen, sowie der frühere Widerspruch zwischen Bestimmungen aus Durchgängen und Oppositionen gehoben ist, und an den früher (271) mitgeteilten Werten von Sonnenparallaxe, Sonnendistanz und Sonnendurchmesser ohne Bedenken festgehalten werden kann [d].

Zu 452: *a.* Ich erwähne beispielsweise den (vgl. „Halley, Synopsis; éd. Lemonnier p. 67") von Nic. **Fatio** geäusserten Gedanken, es würde ein Komet, dessen Knoten nahe an die Erdbahn fällt, wenn zur Zeit seines Durchganges durch denselben die Erde gerade an der richtigen Stelle ihrer Bahn stehen würde, ein vortreffliches Mittel abgeben, um aus Bestimmung seiner Parallaxe die Sonnenparallaxe zu erhalten, — und verweise anderseits auf den von C. **Lagrange** in seiner Note „Détermination de la parallaxe solaire par les passages de la Terre sur le Soleil (Ciel et terre 1882)" gemachten originellen Vorschlag. — *b.* Bezeichnet m die Erdmasse in Teilen der Sonnenmasse, und $R = 1 : (\pi \cdot \mathrm{Si}\, 1'')$ die Entfernung der Sonne in Erdradien, so erhält man nach 270 : 4

$$\frac{1}{m} = \left(\frac{1}{r \cdot \pi\, \mathrm{Si}\, 1''}\right)^3 : \left(\frac{T}{t}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \pi = \frac{1}{r \cdot \mathrm{Si}\, 1''} \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^{2/3} \cdot \sqrt[3]{m} \qquad 1$$

wo r die Distanz des Mondes in Erdradien bezeichnet, t und T aber die siderischen Umlaufszeiten von Mond und Erde sind, — und hieraus, für $r = 51805 : 859,43 = 60,278$, $t = 27,322$ und $T = 365,256$,

$$\pi = 607,48 \cdot \sqrt[3]{m} = \overline{2,783532} \cdot \sqrt[3]{m} \qquad 2$$

Setzt man hier, wie es zur Zeit von Newton (wo das Verhältnis von Erd- und Sonnen-Masse noch total unbekannt war, dagegen nach Richer (441) $\pi \risingdotseq 9\frac{1}{2}''$ angenommen werden konnte) gemacht werden musste, diesen letztern Wert ein, so erhält man $m = 1/_{281471}$, — während **Newton** selbst (der für r, t, T etwas andere Daten besass und Richers Bestimmung nicht kannte) erst, $\pi = 20''$ annehmend, $m = 1/_{28700}$, und später, $\pi = 10\frac{1}{2}''$ annehmend, $m = 1/_{169282}$ fand. Setzt man dagegen mit **Laplace**, der (vgl. Mém. Par. 1789) aus Pendelmessungen die Erdmasse ziemlich sicher bestimmt zu haben glaubte, während ihm die damaligen Annahmen für die Sonnenparallaxe noch etwas zweifelhaft erschienen, $m = 1/_{328266}$, so erhält man nach 2 den vorzüglichen Wert $\pi = 8'',81$, — wäh-

rend umgekehrt jetzt 2 für $\pi = 8'',9$ den Wert $m = 1/_{317998}$ ergiebt. — *c.* In der neuesten Zeit, wo sowohl (264) die Aberrationskonstante k, als (466—67) die Geschwindigkeit v des Lichtes, und (428) der Radius ϱ des Erdequators mit grosser Sicherheit bekannt sind, ist die Methode, die Sonnenparallaxe ⊙ aus diesen Grössen zu bestimmen, sehr wertvoll: Bezeichnet nämlich u die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, $R = \varrho \cdot Ct\odot$ den Radius der Letztern und T die in mittlern Zeitsekunden ausgedrückte Länge des siderischen Jahres, so ist (264)

$$\operatorname{Tg} k = \frac{u}{v} = \frac{2 R \pi}{v \cdot T} = \frac{2 \pi \varrho}{v \cdot T \cdot \operatorname{Tg}\odot} \qquad \text{oder} \qquad \operatorname{Tg}\odot = \frac{2 \pi \varrho}{v \cdot T \cdot \operatorname{Tg} k} \qquad 3$$

und setzt man $\varrho = 6378{,}233^{km}$, $k = 20'',492$, $v = 300\,000^{km}$ und $T = 365{,}2564 \times 86400^s$, so erhält man nach 3 den schon oben mitgeteilten Wert $\odot = 8'',788$ für die Sonnenparallaxe. — *d.* Immerhin behält das, einen Auszug aus „J. B. **Listing**, Einige Bemerkungen die Parallaxe der Sonne betreffend (A. N. 2232 von 1878)" bildende, jedoch wegen dem Encke'schen Werte rückwärts bis auf 8",50 verlängerte Täfelchen

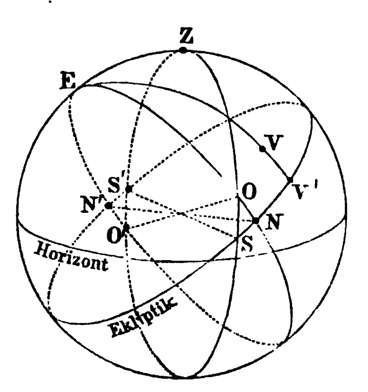
⊙	Mittl. Sonnendistanz in geogr. Meilen	Mittl. Sonnendistanz in Kilometern
8",50	20 855475	154 756281
60	20 612970	152 956790
70	20 376030	151 198600
80	20 144490	149 480500
90	19 918150	147 801000
9,00	19 696840	146 158700

einen gewissen Wert, da sich an dasselbe gar manche Betrachtungen anknüpfen lassen. — Zum Schlusse mögen zur Ergänzung der betreffenden Litteratur noch die Schriften „J. D. **Cassini**, Histoire abrégée de la parallaxe du Soleil (Anhang zu „Chappe, Voyage"), — Jak. **Hilfiker**, Über die Bestimmung der Constante der Sonnenparallaxe, mit besonderer Berücksichtigung der Oppositionsbeobachtungen. Bern 1878 in 8., — F. **Tisserand**, Résumé des tentatives faites jusqu'ici pour déterminer la parallaxe du Soleil (Annal. de l'Observ. de Paris, Mém. 16 von 1882), — W. **Harkness**, The Solar Parallax and its related Constants. Washington 1891 in 4. (Auch Washington Observ. 1885 App. III), — etc." namhaft gemacht werden.

453. Die Vorgeschichte der Refraktionstheorie. — Die Existenz der astronomischen Strahlenbrechung soll schon **Archimedes** vermutet haben und ganz sicher ist, dass **Kleomedes**, der (135) überhaupt betreffende Einsichten besass, die Möglichkeit der sog. horizontalen Mondfinsternisse (463) auf dieselbe zurückführte, sowie dass **Ptolemäus**, dem wir ja auch (135) die ersten Brechungsversuche verdanken, bereits eine richtige Methode zu ihrer Bestimmung veröffentlichte, die jedoch mutmasslich erst durch **Alhazen** zur Anwendung gebracht wurde [a]. Nachdem sodann die Refraktion lange wieder fast unbeachtet geblieben war und nur **Walther** gegen das Ende des 15. Jahrhunderts durch einen Versuch, die störenden

Wirkungen derselben zu eliminieren, eine rühmliche Ausnahme gemacht hatte [b], ergab sich jedoch, als in der zweiten Hälfte des 16. Jahrhunderts die praktische Astronomie in Kassel und auf Hveen einen neuen Aufschwung nahm, die unabweisbare Notwendigkeit, derselben Rechnung zu tragen, ja es bemühten sich damals **Wilhelm** und **Tycho** in anerkennenswerter Weise, betreffende Hilfstafeln zu erstellen, wenn auch noch ohne grossen Erfolg, da ihnen das richtige Verständnis der Erscheinung fehlte [c].

Zu 453: *a.* Die auf **Archimedes** bezügliche Notiz soll in Theons Kommentar zur Optik des Ptolemäus (Ed. Halma I 28) vorkommen; jedoch dürfte es mit dieser Kenntnis nach dem damaligen Zustande der Dioptrik nicht weit her gewesen sein, — erwähnte ja noch ein Jahrhundert später der grosse **Hipparch** die astronomische Strahlenbrechung nicht einmal, geschweige, dass er sie berücksichtigte. Dagegen warf **Kleomedes** um die Mitte des ersten Jahrhunderts in seiner „Cyclica consideratio meteorum" (vgl. 4)" bei Erwähnung einer sog. horizontalen Mondfinsternis die seine betreffende Einsicht erweisende Frage auf: „Ist es nicht möglich, dass der Strahl, der vom Auge ausgeht, indem er eine feuchte, nebelichte Luftschichte durchschneidet, sich krümmt, und die Sonne über dem Horizonte erscheinen lässt? Dann würde das Phänomen dasselbe sein als das, wodurch man einen Ring am Boden eines Gefässes, der direkt nicht gesehen werden kann, durch hineingegossenes Wasser sichtbar macht". — Etwas mehr als ein Jahrhundert später schloss sodann **Ptolemäus** aus dem Umstande, dass man die Poldistanz eines Gestirnes bei seinem Auf- und Untergange merklich kleiner als bei seiner Culmination finde, ganz richtig auf die Existenz einer merklichen **Refraktion** des Lichtes durch die Atmosphäre, und lehrte, dass dieselbe vom Zenite, wo sie verschwinde, nach dem Horizonte hin beständig zunehme, wie man durch Vergleichung gemessener und berechneter Zenitdistanzen eines Gestirnes leicht konstatieren könne; jedoch sprach er hievon nur in seiner Optik und nicht im Almagest, — erwähnte auch keine Versuche wirklicher Bestimmung. — *b.* Bernh. **Walther** bemerkte, wie aus fol. 56 der „Scripta Regiomontani (389)" hervorgeht, bei seinen Beobachtungen wiederholt, dass die Gestirne schon etwas früher über dem Horizonte erscheinen als sie nach der Rechnung aufgehen sollten, und als er sodann später mit der Schrift von Alhazen bekannt wurde, ersah er nicht nur den Grund dieses Faktums, sondern auch die Notwendigkeit, **entweder** bei den Beobachtungen die Nähe des Horizontes zu vermeiden, **oder**, wo dies nicht angehe, die Wirkung der Refraktion bestmöglich zu eliminieren. Für letzteres ging er am 7. März 1489, wo er eine fundamentale Bestimmung der Länge des Regulus zu machen wünschte und dafür (372) kurz vor Sonnenuntergang mit einem ptolemäischen Astrolabium (386) den Längenunterschied von Sonne und Venus bestimmen wollte, in folgender Weise vor: Nachdem er sein Diopter auf die durch die Refraktion nach O gehobene Sonne S ge-



richtet hatte, fing er mit einem Lotfaden den nach O' gelangenden Sonnenstrahl auf, — bestimmte dann den senkrecht über O' liegenden Punkt S' der Ekliptik, — drehte nunmehr den Breitenkreis von N' nach S', also auch nach S, — und verglich schliesslich diese neue Lage mit der durch die Venus V führenden, wodurch er in der That, wenigstens innerhalb der durch die Operationsfehler bedingten Grenzen, den Einfluss der Refraktion eliminiert hatte. — *c.* Landgraf **Wilhelm** und **Tycho** konferierten wiederholt miteinander über die Refraktion, und gelangten Beide auf empirischem Wege dazu, erste Refraktionstafeln zu erstellen, welche allerdings noch sehr unvollkommen waren, wie das nebenstehende Specimen zeigt, in welchem zur Vergleichung die jetzt acceptierten Werte beigefügt sind. — Über die Kasseler Bestimmungen sagte **Rothmann** (vgl. Mitth. 45): „Wir haben aus vielen Beobachtungen gefunden, die Refraktion reiche bei heller Witterung nur bis zum 30. Grad, bei nebliger und russiger Luft (Höhenrauch) aber darüber hinaus, und **sie ändere mit dem Zustande der Atmosphäre.** Um aber ihren Betrag in den einzelnen Höhengraden zu finden, beobachteten wir nicht nur Fixsterne, sondern auch die Sonne. Wir berechneten für bestimmte Azimute mit Berücksichtigung der Parallaxe (⊙ = 3' nach Hipparch setzend) und der Änderung der Deklination die Höhen der Sonne (wegen ⊙ zu klein), und verglichen diese mit den beobachteten, woraus sich die Refraktion (also zu gross) ergab. Hierauf prüften wir die Sache an den Fixsternen durch Distanzbeobachtungen mit dem Sextanten in verschiedenen Höhen, etc." Obschon aber somit in Kassel eine richtige Methode befolgt wurde, waren die erhaltenen Werte noch so mangelhaft, dass sie nicht einmal die falsche Annahme für ⊙ deutlich erkennen liessen. — **Tycho** war auf den Einfluss der Refraktion zunächst dadurch aufmerksam geworden, dass er aus den beiden Culminationen des Polarsternes immer eine bei 4' grössere Polhöhe als aus den beiden Solstitialhöhen der Sonne fand, wie dies wirklich ohne Berücksichtigung derselben erfolgen musste. Zur Bestimmung wandte er (vgl. seine Progymnasmata) teils ebenfalls die in Kassel befolgte Methode an, teils verfolgte er die Gestirne mit einem 10-füssigen, um die Weltaxe drehbaren Kreise, von der Culmination bis zum Untergange, und erhielt etwas bessere Resultate als seine Kollegen in Kassel, während dagegen auch bei ihm noch keine gesunden Ansichten über das Wesen der Refraktion zum Durchbruche gelangten und ihn die erhaltenen Differenzen auf Rechnung der verschiedenen Natur der Gestirne setzen liessen.

Höhe	Sonne		Mond	Sterne		Wirkliche Refraktion
	Wilhelm	Tycho	Tycho	Wilhelm	Tycho	
0°	—	34' 0"	33' 0"	—	30' 0"	34' 54"
5	9' 35"	14 30	14 20	9' 35"	10 0	9 46
10	4 5	10 0	10 45	3 50	5 30	5 16
15	2 0	7 30	8 0	1 35	3 0	3 32
20	1 0	4 30	5 30	0 45	0 0	2 37
25	0 35	2 30	3 20	0 20		2 3
30	0 10	1 25	1 40	0 0		1 40
45	0 0	0 5	0 0			0 58

454. Die Refraktionstafel Keplers. — Der erste Neuere, welcher für die Refraktion ein wirkliches Verständnis besass, war **Kepler**, und es gehört zu den ausgezeichnetsten Leistungen dieses genialen Mannes, dass er, obschon es ihm (135) nicht gelang, das hiefür absolut notwendig erscheinende Brechungsgesetz zu ermitteln,

dennoch Mittel und Wege fand, eine ganz brauchbare Refraktionstafel zu berechnen [a].

Zu 454: *a.* Als **Kepler** die Refraktion in Kap. 4 seiner Schrift „Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiæ pars optica traditur. Francofurti 1604 in 4." in Behandlung nahm, ging er von der Ansicht aus, dass dieselbe eine einfache Folge der Brechung des Lichtes in der Atmosphäre sei, behauptete so natürlich im Gegensatze zu Wilhelm und Tycho, dass weder Entfernung noch Glanz des Gestirnes Einfluss auf ihren Betrag haben werde, somit eine und dieselbe Tafel für alle Gestirne Geltung haben müsse, auch bis zum Zenit auszudehnen sei. Unter der vereinfachenden Annahme, dass die Atmosphäre überall gleich dicht und somit der Weg des Lichtes durch dieselbe eine Gerade sein werde, machte er zunächst verschiedene Versuche, ein einfaches Gesetz zu finden, welches die ihm bekannten Angaben über den Betrag der Refraktion in verschiedenen Höhen darstelle, — blieb endlich bei der Annahme stehen, dass, wenn e der Einfallswinkel, r die Refraktion und c eine Constante bezeichne,

$$r = c \cdot e \cdot \mathrm{Se}\,(e - r) \qquad \text{oder} \qquad c = r \cdot \mathrm{Co}\,(e - r) : e \qquad \mathbf{1}$$

sei, — und ging nun in folgender Weise vor: Ist FEB der Weg des Lichtes, a der Erdradius und h die Höhe der Atmosphäre, so folgt aus △ ABE

$$\mathrm{Si}\,(e - r) = a \cdot \mathrm{Si}\,z : (a + h) \qquad \mathbf{2}$$

wo $a = 859$ M. und (223) $h = 12$ M. $= 0{,}01397 \cdot a$ zu setzen ist. Hieraus ergiebt sich aber für $z = 90^\circ$ der nach allen Erfahrungen viel zu kleine Wert $e - r = 80^\circ\, 29'$, und es muss somit geschlossen werden, dass für die Refraktion nur eine viel niedrigere Schichte der Atmosphäre wirksam ist. In der That erhielt **Kepler** erst nachdem er versuchsweise deren Höhe auf $h = 0{,}00095 \cdot a$ herabsetzte, den etwas plausibeln Wert $e - r = 87^\circ\, 30'$. — Zur genauern Untersuchung benutzte **Kepler** folgende zwei von Tycho 1587 I 16 aus Sonnenbeobachtungen erhaltene Werte-Paare

$$z_1 = 86^\circ\, 10' \qquad r_1 = 14'\, 22'' \qquad \text{und} \qquad z_2 = 89^\circ\, 25' \qquad r_2 = 31'\, 10''$$

und zwar machte er, da $e - r = z - \varphi$ folglich ganz bestimmt $e - r < z$, die **Hypothese I**, es sei $e_2 - r_2 = 87^\circ\, 30'$ oder $e_2 = 88^\circ\, 1'\, 10''$, — fand damit nach 1 und 2 aus der zweiten Beobachtung $c = 0{,}00025743$ und $a + h = 1{,}000905 \cdot a$, — sodann mit Hilfe dieser Werte nach 2 und 1 aus der ersten Beobachtung successive $e_1 - r_1 = 85^\circ\, 27'\, 42''$, $e_1 = 85^\circ\, 42'\, 4''$, $c = 0{,}00022107$, — liess sich durch die geringe Übereinstimmung der beiden c veranlassen, als **Hypothese II** die neue Annahme $e_2 - r_2 = 89^\circ\, 0'$ oder $e_2 = 89^\circ\, 31'\, 10''$ zu machen, — und fand nun bei Wiederholung der frühern Rechnung der Reihe nach die Werte $c = 0{,}00010127$, $a + h = 1{,}000100 \cdot a$, $e_1 - r_1 = 86^\circ\, 5'\, 0''$, $e_1 = 86^\circ\, 19'\, 22''$, $c = 0{,}00018947$, — also wieder nicht die gewünschte Übereinstimmung der beiden c, aber nun doch eine Abweichung in entgegengesetztem Sinne, so dass der richtige Wert zwischen seinen beiden Hypothesen liegen musste. In der That nahm nun Kepler als **Hypothese III** den zwischenliegenden Wert $e_2 - r_2 = 88^\circ\, 0'$ an, — berechnete nach der zweiten Beobachtung in früherer Weise die neuen Werte $c = 0{,}00020370$ und $a + h = 1{,}000578 \cdot a$, sowie zur Probe mit denselben die der Zenitdistanz der ersten Beobachtung entsprechende Re-

fraktion r_1, wie dies z. B. nach den für $e - r = x$ in

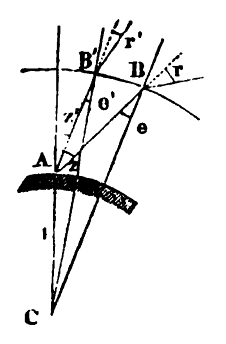
$$\mathrm{Si}\,x = \frac{a \cdot \mathrm{Si}\,z}{a + h} \quad \text{und} \quad r = \frac{c\,(r + x)}{\mathrm{Co}\,x} \quad \text{oder} \quad r = \frac{c \cdot x}{\mathrm{Co}\,x - c} \qquad 3$$

übergehenden Formeln 2 und 1 wirklich leicht geschehen kann, — fand so $r_1 = 14' 49''$, was ihm mit der beobachteten Refraktion $r_1 = 14' 22''$ hinlänglich übereinzustimmen schien, um jene Werte als brauchbar betrachten zu können, — und bestimmte schliesslich in derselben Weise (also z. B. wieder nach 3) für eine Folge von z die zugehörenden r, welche er sodann auf pag. 125 seiner Schrift in der mit „Composita“ überschriebenen Rubrik den als „in æthere liberorum inclinatio“ bezeichneten Zenitdistanzen gegenüberstellte. Das beistehende Specimen dieser Tafel, dem zur Vergleichung die wirklichen Werte der Refraktion beigegeben sind, zeigt uns, dass es **Kepler** wirklich gelungen ist, eine **erste**, für seine Zeit bis auf mehr als 75° Zenitdistanz ganz brauchbare und mit Recht einen seiner Ehrentitel bildende Refraktionstafel zu erstellen. — Neben den Keplerschen Arbeiten sind auch diejenigen, welche sein Zeitgenosse Chr. **Scheiner** in seinen drei Schriften „Sol ellipticus. Aug. Vind. 1615 in 4., — Refractiones coelestes. Ingolstadii 1617 in 4., — und: Oculus sive fundamentum opticum. Oeniponti 1619 in 4. (auch Friburgi 1621 und London 1652)“ niedergelegt hat, nicht zu übersehen; denn wenn sie auch die Lehre von der Refraktion nicht in ebenso hervorragender Weise gefördert haben, so enthalten sie doch manche feine Bemerkungen und wertvolle Beobachtungen und geben viele Anhaltspunkte für die Geschichte der Optik.

z	Refraktion Kepler	Refraktion wirkl.
0°	0″	0″
15	11	15
30	25	33
45	47	58
60	1′ 28	1′ 40
65	1 53	2 3
70	2 31	2 37
75	3 32	3 32
80	5 36	5 16
85	11 30	9 46
90	61 30	34 54

455. Cassini und die Pariser Akademie. — Als das Brechungsgesetz (136) nach dem ersten Drittel des 17. Jahrhunderts allgemein bekannt geworden war, lag offenbar die Aufgabe vor, dasselbe für Erstellung einer neuen Refraktionstafel nutzbar zu machen, und es ist nicht eines der mindesten Verdienste von Dom. **Cassini**, dass er dieselbe mit grossem Geschick an die Hand nahm und sodann wirklich eine wesentlich bessere und mit Recht sehr beifällig aufgenommene Tafel berechnete [a]. Als sich dann allerdings bald darauf im Schosse der Pariser Akademie die Ansicht Geltung verschaffte, dass die **Refraktion** nicht nur mit der Zenitdistanz, sondern auch mit der Dichte der Luft, d. h. **bei Abnahme der Temperatur und bei Zunahme des Luftdruckes**, grösser werde, sah auch **Cassini** ein, dass auf dem von ihm eingeschlagenen Wege nur eine, einem mittlern Luftzustande entsprechende, gewissermassen **astronomische** Tafel erhalten werden könne, und dieser noch eine den Variationen von Temperatur und Barometerstand Rechnung tragende oder **physikalische** Korrektionstafel beigefügt werden sollte, überliess es jedoch der Folgezeit, eine solche zu erstellen [b].

Zu 455: *a.* Es ist schwer zu begreifen, dass nachmals die Lansberg, Riccioli, Hevel, etc. versäumten, das Brechungsgesetz für die astronomische Refraktion zu verwerten, ja fast blindlings auf dem Tychonischen Standpunkte verblieben und sich kaum erlaubten, an der Refraktionstafel des berühmten Dänen, welche in Praxi von der Kepler'schen keineswegs verdrängt worden war, einige geringfügige Abänderungen vorzunehmen; aber es ist Thatsache, dass Dom. **Cassini** der Erste war, der dies unternahm. Er ging dabei noch wie Kepler, obschon er (vgl. die „Eléments" seines Sohnes) ganz wohl einsah, dass dies keineswegs strenge richtig sein werde, von der vereinfachenden Annahme aus, es besitze der für die Refraktion wirksame Teil der Atmosphäre eine konstante Dichte, so dass nur an seiner obern Grenze eine einmalige Brechung statt habe, — und führte sodann für zwei in B und B' nach A abgelenkte Strahlen folgende Rechnung durch: Bezeichnet x die in Teilen des Erdradius ausgedrückte Höhe des wirksamen Teiles der Atmosphäre und setzt man



$$1:(1+x) = \text{Co}\,u \qquad \text{oder} \qquad x = \text{Se}\,u - 1 \qquad \textbf{1}$$

so folgt aus den Dreiecken A B C und A B' C

$$\text{Si}\,e : \text{Si}\,z = \text{Co}\,u \quad \text{und auch} \quad \text{Si}\,e' : \text{Si}\,z' = \text{Co}\,u \qquad \textbf{2}$$

während dem Brechungsgesetze, wenn n den Brechungsexponenten beim Eintritte bezeichnet, die Beziehungen

$$n = \text{Si}\,(e+r) : \text{Si}\,e = \text{Co}\,r + \text{Si}\,r \cdot \text{Ct}\,e \qquad n = \text{Co}\,r' + \text{Si}\,r' \cdot \text{Ct}\,e' \qquad \textbf{3}$$

entsprechen. Nun erhält man aber aus 2

$$\text{Ct}\,e = \sqrt{1 - \text{Si}^2 e} : \text{Si}\,e = \sqrt{\text{Tg}^2 u + \text{Co}^2 z} : \text{Si}\,z \qquad \text{Ct}\,e' = \sqrt{\text{Tg}^2 u + \text{Co}^2 z'} : \text{Si}\,z' \qquad \textbf{4}$$

und mit Hilfe hievon aus 3 die Gleichung

$$\frac{\text{Co}\,r - \text{Co}\,r'}{\text{Si}\,r} = \frac{\text{Si}\,r'}{\text{Si}\,r \cdot \text{Si}\,z'} \cdot \sqrt{\text{Tg}^2 u + \text{Co}^2 z'} - \frac{1}{\text{Si}\,z} \cdot \sqrt{\text{Tg}^2 u + \text{Co}^2 z} \qquad \textbf{5}$$

welche bei bekannten Wertepaaren z, r und z', r' zur Bestimmung von u, folglich nach 1 auch zur Bestimmung von x hinreicht. Ist nämlich $z = 90^\circ$, also r die von **Cassini** aus eigenen Beobachtungen zu $\varrho = 32'\,20''$ bestimmte Horizontalrefraktion, und setzt man

$$A = (\text{Co}\,\varrho - \text{Co}\,r') \cdot \text{Si}\,z' : \text{Si}\,r' \qquad B = \text{Si}\,\varrho \cdot \text{Si}\,z' : \text{Si}\,r' \qquad \textbf{6}$$

so erhält man aus 5

$$A + B \cdot \text{Tg}\,u = \sqrt{\text{Tg}^2 u + \text{Co}^2 z'} \quad \text{oder} \quad \text{Tg}\,u = \frac{A \cdot B \pm \sqrt{A^2 - (1 - B^2)\,\text{Co}^2 z'}}{1 - B^2} \qquad \textbf{7}$$

wo vom Doppelzeichen jeweilen dasjenige gewählt werden muss, das für u einen positiven Wert liefert. Ist aber $z' = 80^\circ$, so hat man nach Cassinis Beobachtungen $r' = 5'\,28''$, und hiefür ergeben sich nach 6, 7 und 1 sofort $u = 2^\circ\,0'\,12''$ und $x = 0{,}000\,6115$ (oder, wenn man den Erdradius zu 3271600^t annimmt, $x = 2000^t$), so dass sich nach 2 die Werte $z = 90^\circ$ und $e = 87^\circ\,59'\,48''$ entsprechen, also nach 3 der Brechungsexponent $n = 1{,}000\,285$ sein muss. Da sich nun aus 3 und 2 strenge

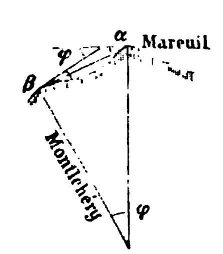
$$r = (e+r) - e = \text{Asi}\,\frac{n \cdot \text{Si}\,z}{1+x} - \text{Asi}\,\frac{\text{Si}\,z}{1+x} \qquad \textbf{8}$$

oder auch aus 3 und 4 angenähert

$$r = \frac{n-1}{\text{Si}\,1''} \cdot \text{Tg}\,e - \frac{(n-1)\cdot \text{Co}\,m}{\text{Si}\,1''} \cdot \text{Tg}\,z \qquad \text{wo} \qquad \text{Tg}\,m = \frac{\text{Tg}\,u}{\text{Co}\,z} \qquad \textbf{9}$$

z	Refraktion	
	Cassini	wirkl.
0°	0"	0"
15	16	15
30	34	33
45	59	58
60	1' 42	1' 40
65	2 6	2 3
70	2 39	2 37
75	3 38	3 32
80	5 28	5 16
85	10 32	9 46
90	32 20	34 54

ergiebt, so kann man leicht, wie dies **Cassini**, vgl. die „Ephemerides novissimæ motuum coelestium Marchionis Cornelii Malvasiæ ab A. 1661 ad A. 1666. Additis Ephemeridibus Solis et Tabulis refractionum ex nov. hypothesibus J. D. Cassini. Mutinæ 1662 in fol.", spätestens 1662 auch wirklich ausführte, eine ganze Refraktionstafel berechnen. Seine Tafel, von welcher das nebenstehende Specimen unter Beifügung der wirklichen Werte eine Probe giebt, wurde, wie sie es in der That verdiente, sehr beifällig aufgenommen, später in vielen Jahrgängen der „Connaissance des temps" abgedruckt und noch von Jacques **Cassini** als Nro. 74 den Tafeln beigegeben, mit welchen er 1740 seine „Elements" begleitete. — *b.* Die (vgl. 453 : c) schon von **Rothmann** erkannte sekundäre Abhängigkeit der Refraktion von dem Luftzustande wurde später von **Morin** in seiner „Longitudinum scientia" ebenfalls hervorgehoben, und es machte hierauf **Riccioli** den Vorschlag, derselben dadurch Rechnung zu tragen, dass man drei verschiedene Refraktionstafeln erstelle: Eine für den Sommer, — eine zweite für die beiden Zeiten der Equinoktien, — und eine dritte für den Winter. Dieser letztere Weg wurde dann anfänglich auch durch **Cassini** eingeschlagen, aber infolge der erwähnten Besprechungen, unter alleiniger Beibehaltung der frühern Sommertafel, bald wieder verlassen; jedoch standen damals der Konstruktion der verlangten Hilfstafel noch grosse Schwierigkeiten entgegen, weil die zu berücksichtigenden Variationen sich mit fast ebensogrossen anderweitigen Unsicherheiten bei Höhenbestimmungen vermischten, und die betreffenden Beobachtungen, welche **Richer** 1672/3 im Auftrage der Akademie in Cayenne machte, gaben ebenfalls nicht die gewünschten Aufschlüsse. Noch im Anfange des 18. Jahrhunderts bemühte sich (vgl. Hist. de l'Acad. 1710, p. 110) Antoine-François **Laval** (Lyon 1664 — Toulon 1728; Jesuit und Prof. Hydrogr. Marseille und Toulon) vergeblich, diese Sache zu einem gewissen Abschlusse zu bringen; dagegen bleibt nachzutragen, dass **Picard** bei einschlagenden Studien aus seinen trigonometrischen Messungen nachweisen konnte, dass es auch eine merkliche **terrestrische Refraktion** gebe: Als er nämlich aus den im Sommer 1669 an den zwei Stationen Montlehéry und Mareuil (vgl. 418) gemessenen Depressionswinkeln $\alpha = 13' \, 40''$ und $\beta = 8' \, 20''$ den Winkel am Erdmittelpunkte $\varphi' = \alpha + \beta = 22' \, 0''$, dagegen später aus der trigonometrisch bestimmten Distanz 25643ᵗ jener Punkte in Vergleichung mit seinem Grade von 57060ᵗ für denselben Winkel den Wert $\varphi'' = 26' \, 58''$ erhielt, erklärte er sich den 4' 58" betragenden Unterschied als eine Refraktionswirkung, — und in der That ergiebt sich aus seinen Zahlen ein Refraktionskoeffizient 4' 58" : 26' 58" = 0,18, welcher mit dem später von Tobias **Mayer** (vgl. dessen Abhandlung „De refractionibus objectorum terrestrium. Gott. 1751 in 4.") erhaltenen Werte 0,12, und dem jetzt gewöhnlich nach **Gauss** (vgl. Berl. Jahrb. 1826) angenommenen Mittelwerte 0,13 nahe, mit dem von **Sabler** (vgl. die „Beschreibung der zur Ermittlung des Höhenunterschiedes zwischen dem



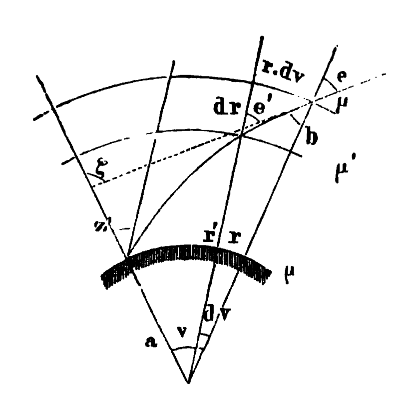
Schwarzen und Kaspischen Meere ausgeführten Messungen. St. Petersburg 1849 in 4.") gegebenen Werte 0,18 sogar ganz übereinstimmt. Ausserdem existiert eine seitliche oder sog. **Lateral-Refraktion**, welche nach „**Günther**, Historische Notizen (Erlanger Sitzungsb. 1874)" zuerst von **Eimmart** bemerkt worden zu sein scheint und wahrscheinlich damit zusammenhängt, dass die geometrischen Örter gleich dichter Luft nicht wirklich konzentrische Luft-Kugelschalen sind, und so der Weg des Lichtstrahles strenge genommen eine Kurve von doppelter Krümmung ist. — Vgl. „Georg **Sabler** (Halljall in Esthland 1810 — Wilna 1865; Obs. Pulkowa, dann Dir. Obs. Wilna), Betrachtungen über die irdische Strahlenbrechung und über die Gesetze der Veränderungen derselben. Dorpat 1839 in 4., — H. **Hartl**, Über den Zusammenhang zwischen der terrestrischen Strahlenbrechung mit den meteorologischen Elementen (Östr. met. Zeitschr. 1881), — „**Bauernfeind**, Neue Untersuchungen über terrestrische Refraktion (Anh. VII d. Verh. d. geod. Konf. Rom 1883)" und „Ferd. **Lingg**, Über die bei Kimmbeobachtungen am Starnberger See wahrgenommenen Refraktionserscheinungen (Nova Acta Leop. Car. 55)".

456. Die Arbeiten von Newton, Simpson und Bradley. — Es ist ganz sicher, dass schon **Newton** einen Weg auffand, um ohne die frühern, zwar die Rechnung vereinfachenden, aber dennoch etwas willkürlichen Annahmen zu benutzen, einen Ausdruck für das Element der Refraktion zu erhalten [a], — dann aber allerdings, um die Integration ausführen zu können, eine Voraussetzung über den damals vollständig und noch jetzt so ziemlich unbekannten Zusammenhang zwischen Höhe und Luftdichte zu machen hatte, sowie zur Konstantenbestimmung gewisse Beobachtungsdaten beiziehen musste; aber da sich nur seine Tafel, nicht auch der Detail seiner Rechnung erhalten hat [b], so bleibt man über manchen Punkt des von ihm eingeschlagenen Ganges etwas unsicher, und ich ziehe daher vor, auf die entsprechende und vollständig vorliegende Arbeit des wenig spätern **Simpson** etwas näher einzutreten und die durch **Bradley** darauf gestützte, auch bereits die Temperatur- und Druckverhältnisse berücksichtigende Formel

$$\zeta = \frac{b}{29{,}6} \cdot \frac{400}{350+t} \cdot 57'' \cdot \operatorname{Tg}(z'-3\zeta) = \frac{\beta}{760} \cdot \frac{222}{210+\tau} \cdot 57'',6 \cdot \operatorname{Tg}(z'-3\zeta) \qquad \mathbf{1}$$

zu geben, in welcher ζ die Refraktion in der scheinbaren Zenitdistanz z' bezeichnet, b und β aber die Barometerstände in englischen Zollen und Millimetern, t und τ die Lufttemperaturen nach Fahrenheit und Celsius sind [c]. Es ist diese aus dem Zusammenwirken von **Simpson** und **Bradley** entstandene und somit unrichtiger Weise nur nach letzterm benannte Formel mit Recht noch jetzt sehr beliebt, da sie mit allfälligen kleinen Modifikationen in den Konstanten für den praktischen Gebrauch vollständig genügt [d].

Zu 456: *a.* Einen solchen Ausdruck kann man z. B. auf folgende einfache Weise erhalten: Unter Annahme, dass die Atmosphäre aus Schichten



von ganz kleiner Höhe d r bestehe, hat man nämlich entsprechend 168

$$r\cdot\mu\cdot Si\,e=\gamma=a\cdot\mu_0\cdot Si\,z' \qquad \mathbf{2}$$

wo γ eine Konstante ist, und anderseits aus der beistehenden Figur sehr nahe

$$Tg\,e=\frac{r\cdot dv}{dr} \quad \text{oder} \quad dv=\frac{dr}{r}\cdot Tg\,e \qquad \mathbf{3}$$

$$\zeta=v+e \qquad d\zeta=dv+de$$

Aus 2 folgt nun durch Logarithmieren und Differentieren

$$\frac{dr}{r}+\frac{d\mu}{\mu}+Ct\,e\cdot de=0 \qquad \mathbf{4}$$

also, wenn aus 3 und 4 die Grösse de eliminiert, sowie 3 und 4 benutzt, ferner $a:r=\rho$ gesetzt wird, successive

$$d\zeta=dv-\left(\frac{dr}{r}+\frac{d\mu}{\mu}\right)Tg\,e=-\frac{d\mu}{\mu}\cdot\frac{Si\,e}{\sqrt{1-Si^2e}}=-\frac{\rho\cdot\mu_0\cdot Si\,z'\cdot d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2-\rho^2\cdot\mu_0^2\cdot Si^2z'}} \qquad \mathbf{5}$$

womit das Verlangte bereits geleistet ist, aber natürlich eine Integration nur möglich wird, wenn man für die Beziehung zwischen ρ und μ eine bestimmte Annahme macht. — Wählt man a als Einheit und nimmt (223) den Dämmerungsbogen gleich 18° an, so ist $r<Se\,9^0 \fallingdotseq 1\,{}^1/_{80}$ und man darf daher $r=1+m$ oder $\rho=1:(1+m)$ setzen, wo $m<{}^1/_{80}$ ist. Man erhält somit, wenn noch $u=\mu_0:\mu$ oder $d\mu=-(\mu_0:u^2)\cdot du$ eingeführt wird, nach 5

$$d\zeta=\frac{Si\,z'\cdot du}{\sqrt{(1+m)^2-u^2\cdot Si^2z'}} \qquad \mathbf{6}$$

Macht man nun die Annahme, es sei m konstant, so wird $d\zeta=dx:\sqrt{1-x^2}$, wo $x=u\cdot Si\,z':(1+m)$ ist, und man erhält somit durch Integration, wenn C eine Konstante ist,

$$\zeta+C=Asi\,x=Asi\,\frac{u\cdot Si\,z'}{1+m}$$

und hieraus, da sich $\zeta=0$ und $u=1$ entsprechen müssen,

$$C=Asi\,\frac{Si\,z'}{1+m} \qquad \text{also} \qquad \zeta=Asi\,\frac{u\cdot Si\,z'}{1+m}-Asi\,\frac{Si\,z'}{1+m} \qquad \mathbf{7}$$

d. h. eine Formel, welche, abgesehen von der Bezeichnung, genau mit 455 : 8 übereinstimmt, so dass man nun weiss, unter welcher Voraussetzung jene Cassini'sche Formel richtig ist. — *b.* Die durch **Newton** berechnete Tafel, von der unten ein Specimen folgen soll, wurde zuerst durch **Halley** in seiner Note „Some remarks of the allowances to be made in astronomical observations for the refraction of the air. With accurate table of refraction (Ph. Tr. 1721)" publiziert; denn wenn er auch den Urheber der Tafel nicht ausdrücklich nennt, so sagt er im Eingange seiner Note „our worthy President made the first accurate Table there of", und am Ende derselben, dass er die erwähnte Tafel beifüge „such as J long since received it from its Great Author", so dass dennoch niemand darüber im Zweifel sein konnte, wem die Tafel zu verdanken sei, während man dagegen allerdings über die Art ihrer Entstehung gar nichts erfuhr. Erst als 1835 Fr. **Baily** in seinem „Account of Flamsteed" auch dessen Briefwechsel mit Newton publizierte, und **Biot** im folgenden Jahre im Journal des Savants einer eingehenden Anzeige eine „Analyse des tables de réfraction construites par Newton, avec l'indication des procédés numériques par lesquels

il a pu les calculer" beifügte, ist man auch darüber so ziemlich aufgeklärt worden: Es hat nämlich **Newton** offenbar, in ähnlicher Weise wie es oben geschah, eine Differentialgleichung aufgestellt, — dieselbe unter Annahme, dass die Dichte in der Luftsäule überall dem Drucke proportional angenommen werden dürfe, nach einer in den Principien erläuterten Methode integriert, — und nach der erhaltenen Formel unter Beiziehung einiger von **Flamsteed** bezogenen Daten die erwähnte Tafel berechnet, — ja es wäre ihm wahrscheinlich gelungen, auch jene „physikalische" Hilfstafel zu erstellen, wenn ihm Flamsteed bereitwilliger und einsichtiger an die Hand gegangen wäre, speciell Newtons ausdrücklichen Wunsch erfüllt hätte, bei Höhenbestimmungen auch jeweilen den Stand von Barometer und Thermometer zu notieren. — *c.* Macht man die Annahme, es sei m nicht konstant, sondern es sei etwa

$$1 + m = u^{n+1} \qquad \mathbf{8}$$

wo n eine Konstante bezeichnet, so geht 6 in

$$d\zeta = \frac{\text{Si}\, z' \cdot du}{\sqrt{u^{2n+2} - u^2 \cdot \text{Si}^2 z'}} = -\frac{1}{n} \cdot \frac{d(u^{-n} \cdot \text{Si}\, z')}{\sqrt{1 - (u^{-n} \cdot \text{Si}\, z')^2}}$$

über, und man erhält somit durch Integration, wenn für Bestimmung der Integrationskonstante wie bei Ableitung von 7 vorgegangen wird,

$$\zeta = {}^1\!/_n \cdot [z' - \text{Asi}\,(u^{-n} \cdot \text{Si}\, z')] \qquad \text{oder} \qquad \text{Si}\,(z' - n \cdot \zeta) = u^{-n} \cdot \text{Si}\, z' \qquad \mathbf{9}$$

Bezeichnet somit Z die Horizontalrefraktion, so geht 9 für $z' = 90^0$ in $\text{Si}\,(90^0 - n \cdot Z) = u^{-n}$ über, so dass die 9 durch

$$\zeta = {}^1\!/_n \cdot [z' - \text{Asi}\,(\text{Si}\, z' \cdot \text{Co}\, n Z)] \qquad \text{oder} \qquad \text{Si}\,(z' - n \cdot \zeta) = \text{Si}\, z' \cdot \text{Co}\, n Z \qquad \mathbf{10}$$

ersetzt werden können, von welchen die erstere genau mit der von **Simpson** in seinen „Mathematical Dissertations. London 1743 in 4." gegebenen, wenn auch in etwas mühsamerer Weise abgeleiteten Refraktionsformel übereinstimmt. Derselbe hatte nun durch John **Bevis** (Oldsarum in Wiltshire 1695 — London 1771; Arzt in London und Freund von Halley) erfahren, dass $Z = 33'$ sei, sowie dass sich die Werte $z' = 60^0$ und $\zeta = 1'\ 30'',5$ entsprechen, — konnte also die 10' zweimal aufschreiben, — daraus durch Näherung $n = {}^{11}\!/_2$ und $nZ = 3^0\ 1',5$ finden, — somit 10' auf die Form

$$\zeta = {}^2\!/_{11} \cdot (z' - x) \qquad \text{wo} \qquad 1 : \text{Si}\, 86^0\ 58',5 = \text{Si}\, z' : \text{Si}\, x \qquad \mathbf{11}$$

bringen, — und so schliesslich nach damaliger Übung seinen Fund in die Analogie einkleiden: „Der Radius verhält sich zum Sinus von 86° 58',5 wie der Sinus der Zenitdistanz zum Sinus eines andern Bogens, dessen Differenz von der Zenitdistanz, wenn man sie mit $^2\!/_{11}$ multipliziert, dem Betrage der Refraktion gleichkömmt". — Aus 10" ergiebt sich

$$\text{Si}\,(z' - n\zeta) = c \cdot \text{Si}\, z' \qquad \text{wo} \qquad c = \text{Co}\, n Z$$

folglich

$$\frac{1 + c}{1 - c} = \frac{\text{Si}\, z' + \text{Si}\,(z' - n\zeta)}{\text{Si}\, z' - \text{Si}\,(z' - n\zeta)} = \frac{\text{Tg}\,(z' - {}^1\!/_2\, n\zeta)}{{}^1\!/_2\, n\zeta \cdot \text{Si}\, 1''}$$

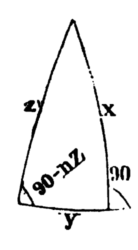
oder endlich

$$\zeta = \frac{2\,(1 - c)}{n\,(1 + c)\,\text{Si}\, 1''} \cdot \text{Tg}\,(z' - {}^1\!/_2\, n\zeta) = 53'',3 \cdot \text{Tg}\,(z' - 2{,}75 \cdot \zeta) \qquad \mathbf{12}$$

und es ist letztere, äusserst einfache und bequeme Formel, welche durch **Bradley** vielfach mit seinen Beobachtungen verglichen und von ihm nach kleinen Abänderungen der Konstanten, namentlich aber als er nach dem Vorgange von Tob. Mayer (vgl. 457 : b) zweckdienlich scheinende Faktoren zur Berück-

z'	Refraktion Newton	Bradley	wirkl.
0°	0''	0''	0''
15	14	15	15
30	30	33	33
45	53	57	58
60	1' 31	1' 38	1' 40
65	1 53	2 2	2 3
70	2 25	2 36	2 37
75	3 16	3 30	3 32
80	4 53	5 15	5 16
85	9 13	9 53	9 46
90	33 20	33 0	34 54

sichtigung der Variationen in Barometerstand und Lufttemperatur beifügte, sehr zutreffend gefunden wurde. Nach dieser oben als 1 gegebenen Formel berechnete sich sodann **Bradley** für die mittlern Werte $b = 29'',6$ und $t = 50^0$ zu eigenem Gebrauche eine Refraktionstafel, welche nachmals in die Einleitung zu Bd. 1 der „Astronomical observations at the R. Observatory at Greenwich. Oxford 1798 bis 1805, 2 Vol. in fol." aufgenommen wurde, und von der beistehend ein Specimen gegeben ist, dem zur Vergleichung die Newton'schen und wirklichen Werte beigegeben wurden. — *d.* Die Mehrzahl der spätern praktischen Astronomen hielt an Bradleys Formel fest, — ja noch in der lebhaften Diskussion, welche vor einigen Decennien in der Pariser Akademie über die für die Anwendung empfehlenswertesten Refraktionsformeln statt hatte, standen **Laugier** und **Faye** für dieselbe ein, nur wollte ersterer den Bradley'schen Faktor auf 3,77 erhöhen, letzterer dagegen nur auf 3,26 gehen, noch lieber ihn für jeden Abend direkt aus Beobachtungen abgeleitet wissen, wodurch die Korrektionsfaktoren überflüssig wurden. — Anhangsweise mag noch einer ganz hübschen Transformation der Bradley-Simpson'schen Hauptformel gedacht werden, welche zuerst **Delambre** „Astronomie I 303" andeutete, und sodann Christian **Bruhns** (Ploen in Holstein 1830 — Leipzig 1881; Dir. Obs. Leipzig; vgl. Förster in Astr. Viert. 18 von 1883) in seiner von mir überhaupt vielfach benutzten Preisschrift „Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung. Leipzig 1861 in 8." in folgender Weise durchführte: Trägt man auf den einen Schenkel des sphärischen Winkels $(90 - n \cdot Z)$ die Grösse z' ab, und fällt vom Endpunkte eine Senkrechte x auf den andern Schenkel, so schneidet sie von demselben ein Stück y ab, so dass mit Benutzung von 10



$$\mathrm{Si}\ x = \mathrm{Si}\ z' \cdot \mathrm{Co}\ n Z = \mathrm{Si}\,(z' - n\zeta) \quad \text{oder} \quad x = z' - n\zeta$$
$$\mathrm{Tg}\ y = \mathrm{Tg}\ z' \cdot \mathrm{Si}\ n Z, \quad \mathrm{Co}\ z' = \mathrm{Co}\ y \cdot \mathrm{Co}\ x = \mathrm{Co}\ y \cdot \mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) \qquad \mathbf{13}$$

folglich

$$\mathrm{Tg}\,(z' - {}^1/_2\, n\zeta) \cdot \mathrm{Tg}\ {}^1/_2\, n\zeta = \frac{\mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) - \mathrm{Co}\ z'}{\mathrm{Co}\,(z' - n\zeta) + \mathrm{Co}\ z'} = \frac{1 - \mathrm{Co}\ y}{1 + \mathrm{Co}\ y} = \mathrm{Tg}^2\ {}^1/_2\, y$$

während

$$\mathrm{Ct}\ (z' - {}^1/_2\, n\zeta) \cdot \mathrm{Tg}\ {}^1/_2\, n\zeta = \frac{1 - c}{1 + c} = \frac{1 - \mathrm{Co}\ n Z}{1 + \mathrm{Co}\ n Z} = \mathrm{Tg}^2\ {}^1/_2\, n Z$$

war. Hieraus erhält man aber durch Multiplikation

$$\mathrm{Tg}^2\ {}^1/_2\, n\zeta = \mathrm{Tg}^2\ {}^1/_2\, n Z \cdot \mathrm{Tg}^2\ {}^1/_2\, y \qquad \text{oder} \qquad \zeta = Z \cdot \mathrm{Tg}\ {}^1/_2\, y \qquad \mathbf{14}$$

und kann somit in bequemster Weise y nach 13 und sodann ζ nach 14 berechnen, anstatt bei Anwendung von 12 jeweilen das gefundene ζ noch einmal verbessern zu müssen.

457. Die Arbeiten von Mayer, Lacaille und Lambert. — Es würde zu weit führen, auch alle übrigen Arbeiten jener

ältern Zeit im Detail zu behandeln [a], und ich muss mich darauf beschränken, noch diejenigen der in der Überschrift genannten Männer hervorzuheben: Tob. **Mayer** erwarb sich das Verdienst, nicht nur eine der Simpson-Bradley'schen verwandte Formel aufzustellen und eine ihr entsprechende Tafel der mittlern Refraktionen zu berechnen, sondern dieser letztern auch die ausser ihr noch notwendige physikalische Tafel in einer mustergiltigen Form beizufügen [b]. — **Lacaille**, der in den bisherigen Refraktionsbestimmungen eine Art „cercle vicieux" zu erkennen glaubte, suchte nach einer höchst originellen Methode diesem durch Kombination von Beobachtungen am Kap und in Paris auszuweichen, und wenn auch schliesslich seine Tafel hinter den bereits vorhandenen zurückstand, so bleibt sein Verfahren dennoch von Interesse [c]. — Ebenso originell ist endlich der von **Lambert** eingeschlagene Weg, um ohne Zuhilfenahme hypothetischer Beziehungen zu einer Integralgleichung zu gelangen, und es liefert überdies seine Formel, sobald man deren Konstanten mit Hilfe etwas sicherer Daten ermittelt, eine bis zur Zenitdistanz von 75° ganz brauchbare Tafel [d].

Zu 457: *a.* Während die unter der vorhergehenden Nummer besprochenen Arbeiten in England ausgeführt wurden, blieb man auch auf dem Kontinente für die genauere Kenntnis der Refraktion nicht unthätig. So gab Ph. de **La Hire** in seinen „Tabulæ astronomicæ. Paris 1702 in 4." eine zur Zeit viel gebrauchte, sich mutmasslich zunächst auf Beobachtungen von Picard stützende Tafel, — so bemühten sich **Jakob Bernoulli** (Opera 1063), **Johannes Bernoulli** (Opera III 516) und Jak. **Hermann** (Acta erud. 1706), wenn auch allerdings mehr aus theoretischem Interesse, unter gewissen Voraussetzungen die Gestalt der Refraktionskurve zu bestimmen, — so entwickelte P. **Bouguer** in seiner Preisschrift „Méthode d'observer sur mer les hauteurs des astres. Paris 1729 in 4." die Reihe

$$\zeta = 64'',6 \cdot \mathrm{Tg}\, z' - 4'',8 \cdot \mathrm{Tg}^3 z' + \ldots \qquad 1$$

und schrieb noch später zwei Abhandlungen „Sur les réfractions astronomiques dans la zone torride (Mém. Par. 1739 et 1749)", — so berechnete **Daniel Bernoulli** (vgl. pag. 219—22 der Hydrodynamica) eine neue Tafel, welche allerdings auf der nicht sehr glücklichen Annahme beruhte, es sei in der Höhe von x Pariser Fussen die Dichte der Luft $d : 1 = 22000 : (22000 + x)$, — etc. — *b.* Tob. **Mayer** beschäftigte sich, wie die Tab. XIX seines Atlas erweist, schon vor 1745 mit der Refraktion, jedoch entstand seine posthum in den „Tabulæ motuum Solis et Lunæ. Londini 1770 in 4." publizierte Tafel der mittlern Refraktionen, von welcher beistehend ein zugleich die entsprechenden Werte von Lacaille, Lambert und

z'	Refraktion			
	Mayer	Lacaille	Lambert	wirkl.
0°	0″	0″	0″	0″
15	15	18	15	15
30	33	38	33	33
45	57	1′ 6	57	58
60	1′ 39	1 54	1′ 39	1′ 40
65	2 2	2 20	2 3	2 3
70	2 36	2 55	2 38	2 37
75	3 31	3 49	3 34	3 32
80	5 16	5 37	5 17	5 16
85	9 49	9 55	—	9 46
90	30 51	—	—	34 54

der Neuzeit enthaltendes Specimen folgt, erst etwa 1754, — jedenfalls, da sie auf seinen Göttinger Beobachtungen beruht, **nach 1751**, aber, da sie Lacaille bei Abfassung seiner demnächst zu besprechenden Abhandlung bereits bekannt war, **vor 1756**. Seine dem mittlern Barometerstande b = 28″ P. und der mittlern Lufttemperatur t = 10° R. entsprechende Tafel berechnete **Mayer** nach der Formel

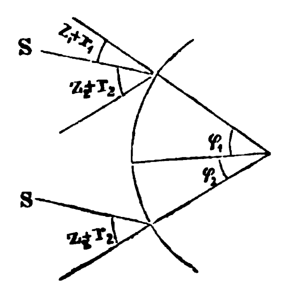
$$\zeta = 70'',71 \cdot b \cdot \mathrm{Si}\, z' \cdot \alpha^{-2} \cdot \mathrm{Tg}\, {}^1\!/_2\, w \qquad \mathbf{2}$$

wo $\alpha = \sqrt{1 + 0{,}0046 \cdot t} \qquad \beta = 16{,}5 \cdot \mathrm{Co}\, z' : \alpha \qquad \mathrm{Tg}\, w = 1 : \beta$

welche er einfach als „deduced by theory“ aufführt, so dass man nicht weiss, ob er dieselbe selbständig entwickelte oder bloss, unter Einführung etwas anderer Daten, durch Umgestaltung der Simpson'schen Formel (456: 10 oder 11) erhielt, aus der sie in der That leicht hervorgeht. Das Hauptverdienst von **Mayer** besteht jedenfalls darin, dass er **vor** Bradley, und zwar nach Lacailles Zeugnis überhaupt als der **Erste**, nicht nur beiläufig von dem Einflusse des Luftdruckes und der Temperatur auf den Betrag der Refraktion sprach, sondern denselben in seiner Formel zu berücksichtigen suchte, wobei er **einerseits** von der schon durch **Halley** ausgesprochenen Ansicht ausging, es verhalten sich, wenn sonst alles übrige gleich bleibe, die Refraktionen bei verschiedenen Barometerständen wie diese Stände, und **anderseits** dieselben seien bei verschiedenen Temperaturen umgekehrt den Volumina proportional, welche ein gewisses Luftquantum unter deren Einfluss einnehme, so dass er, den Ausdehnungskoeffizienten der Luft zu 0,0046 annehmend, durch α^2 zu dividieren habe, — einen Divisor, welchen er später in $\alpha^{5/2}$ umänderte, um die Refraktion bei geringen Höhen etwas besser darzustellen. Da (39:8) mit genügender Genauigkeit Ln (1 + 0,0046 · t) = 0,0046 · t gesetzt werden kann, so erhält man durch Logarithmieren und Differentieren der 2

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{db}{b} + (\mathrm{Co}\, w - 3) \cdot 0{,}0023 \cdot dt \qquad \mathbf{3}$$

und nach dieser Formel lässt sich in der That, wie dies **Mayer** ausgeführt hat, leicht eine sog. physikalische Hilfstafel mit den Argumenten b und t berechnen. — *c.* Da sich **Lacaille** mit dem bisdahin angewandten Verfahren, theoretisch eine Refraktionsformel aufzustellen und sodann zur Bestimmung ihrer Konstanten die wahre Polhöhe oder einige mit ihrer Hilfe aus Beobachtungen abgeleitete Refraktionen bereits als bekannt vorauszusetzen, nicht befreunden konnte, so ging er nach seinen „Recherches sur les réfractions astronomiques (Mém. Par. 1756, ausgeg. 1761)“ in folgender Weise vor: Er hatte **einerseits** im Mittel aus vielen, auf alle Jahreszeiten verteilten, von ihm in Paris (Collège Mazarin) und am Kap angestellten Beobachtungen von Circumpolarsternen, die scheinbaren, d. h. noch mit der mittlern Refraktion behafteten Polhöhen 48° 52′ 27″,5 und 33° 56′ 49″,1 erhalten, so dass die Summe 82° 49′ 16″,6 um die Summe der diesen Höhen entsprechenden mittlern Refraktionen **grösser** als die Distanz der Parallele von Paris und seiner Kap-Station war. **Anderseits** ergaben ihm jede zwei Messungen der scheinbaren Zenitdistanzen eines und desselben Sternes an beiden Punkten nach Reduktion auf die gewählte Epoche 1750 I 1 wegen



$$z_1 + z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - (r_1 + r_2) \qquad \mathbf{4}$$

in ihrer Summe einen um die Summe der Re-

fraktionen zu kleinen Wert für jene Distanz. **Lacaille** wählte nun 13 oft beobachtete Sterne aus, welche an beiden Stationen unter nahe gleichen (nur zwischen 38° 50′ und 44° 10′ variierenden) Zenitdistanzen culminierten, — fand, dass das Mittel aus den sämtlichen durch sie bestimmten scheinbaren Distanzen der beiden Parallele 82° 44′ 46″,0 betrage, — und durfte nun, da in dieser Höhe und für so geringe Höhendifferenzen die Refraktionen einer geringen und gleichmässigen Veränderung unterliegen, wirklich annehmen, dass diese mittlere Distanz nahe um die Summe der mittlern Refraktionen zu klein sei, welche in Paris und am Kap der scheinbaren Zenitdistanz 41° 22′ zukommen. Es musste also die Summe der vier mittlern Refraktionen in den Zenitdistanzen 90° — 33° 57′ (Kap), 90° — 48° 52′ (Paris) und 41° 22′ (sowohl Kap als Paris) der Differenz 82° 49′ 16″,6 — 82° 44′ 46″,0 = 270″,6 gleich sein, und es frug sich nur noch, wie letzterer Betrag unter die vier Kontrahenten zu verteilen sei. **Lacaille** besass nun unter seinen beidseitig beobachteten Sternen eine ziemliche Anzahl, von welchen die einen für Paris, die andern für das Kap Zenitalsterne waren, bei welchen daher $z_1 + z_2$ im ersten Falle fast ausschliesslich durch die Refraktion am Kap, im zweiten fast ausschliesslich durch diejenige in Paris influiert wurde. Da ihm nun die Vergleichung beinahe immer (41 auf 47 mal) ergab, dass die Summe im ersten Falle grösser als im zweiten sei, so war er durch 4 genötigt, anzunehmen, dass bei gleicher Höhe die Refraktion am Kap etwas weniger als in Paris betrage, und zwar etwa $^1/_{40}$. Da er ferner wusste, dass (entsprechend 1) die Refraktion in grössern Höhen sehr nahe der Tangente der scheinbaren Zenitdistanz proportional ist, so hatte er, die Refraktionskonstante für Paris gleich α setzend,

$$270,6 = (^{39}/_{40} \cdot \mathrm{Tg}\ 56^0\ 3' + \mathrm{Tg}\ 41^0\ 8' + {}^{79}/_{40} \cdot \mathrm{Tg}\ 41^0\ 22') \cdot \alpha$$

oder $\alpha = 66'',64$ und somit für die vier einzelnen Refraktionen der Reihe nach die Beträge 96″,5, 58″,2, 57″,2 und 58″,7, so dass sich

33° 55′ 12″,6 48° 51′ 29″,3 82° 46′ 41″,9

als wahre Werte der Polhöhen vom Kap und Paris und der Distanz ihrer Parallele ergaben, und somit das Problem, welches sich **Lacaille** vorgelegt hatte, seinem Hauptteile nach gelöst war. Für weitern Detail und seine hierauf folgende Bestimmung zahlreicher Refraktionen auf seine Abhandlung verweisend, füge ich noch bei, dass die von ihm aus letztern zusammengestellte empirische Tafel, von welcher oben vorgreiflich ein Specimen gegeben wurde, allerdings nicht sehr befriedigend ausfiel, ja kaum der Kepler'schen ebenbürtig war; aber der von ihm eingeschlagene Weg bleibt deswegen doch höchst interessant und lehrreich. — *d.* Aus 456 : 5 folgt, wenn

$$P = a \cdot \mu_0 : \mu \qquad \text{also} \qquad dP = -a \cdot \mu_0 \cdot d\mu : \mu^2 \qquad \mathbf{5}$$

gesetzt wird, sofort

$$d\zeta = \frac{\mathrm{Si}\, z'}{r}\left(1 - \frac{P^2}{r^2}\,\mathrm{Si}^2 z'\right)^{-1/2} \cdot dP = \left(\frac{\mathrm{Si}\, z'}{r} + \frac{P^2 \cdot \mathrm{Si}^3 z'}{2 \cdot r^3} + \frac{3\, P^4 \cdot \mathrm{Si}^5 z'}{8 \cdot r^5} + ..\right) dP \qquad \mathbf{6}$$

d. h. die von **Lambert** in seiner Schrift „Les propriétés remarquables de la lumière. La Haye 1759 in 8.", wenn auch in etwas anderer Weise, abgeleitete Reihe, welche durch Integration in

$$\zeta = A \cdot \mathrm{Si}\, z' + {}^1/_2 \cdot B \cdot \mathrm{Si}^3 z' + {}^3/_8\, C \cdot \mathrm{Si}^5 z' + \ldots$$

wo

$$A = \int \frac{dP}{r} \qquad B = \int \frac{P^2 \cdot dP}{r^3} \qquad C = \int \frac{P^4 \cdot dP}{r^5} \ldots \qquad \mathbf{7}$$

ist, übergeht, oder, wenn man die Si z' mit Hilfe von

$$\text{Si}\, z' = \text{Tg}\, z' \cdot (1 + \text{Tg}^2 z')^{-1/2} = \text{Tg}\, z' - 1/2\, \text{Tg}^3 z' + 3/8\, \text{Tg}^5 z' - \ldots \qquad 8$$

in Tg z' umsetzt, und nach diesen ordnet, in

$$\zeta = A \cdot \text{Tg}\, z' - 1/2\,(A - B) \cdot \text{Tg}^3 z' + 3/8\,(A - 2B + C) \cdot \text{Tg}^5 z' - \ldots \qquad 9$$

Anstatt nun zur Ermittlung der obigen Integrale irgend eine Annahme über die Beziehung zwischen r und μ (oder P) zu machen, zeigte **Lambert**, dass, da die Höhe der Atmosphäre etwa 0,014 Erdradien und μ_0 etwa 1,003 betrage, also (a : r) nur zwischen 1 und 0,986 und $(\mu_0 : \mu)$ nur zwischen 1 und 1,003 variieren könne, auch $P = (a : r) \cdot (\mu_0 : \mu) \cdot r$ immer nahe gleich r sein werde. Da nun für P = r nach 7 die sämtlichen A, B, C, ... einander genau gleich, also überhaupt nie stark von einander verschieden sein werden, so müssen auch die in 9 auftretenden Koeffizienten der dritten und höhern Potenzen von Tg z' klein sein; man dürfe daher zum mindesten für alle Zenitdistanzen unter 45° die Refraktion der Tangente der Zenitdistanz proportional setzen, und auch noch für wesentlich grössere Distanzen werde die Berücksichtigung des zweiten oder höchstens dritten Gliedes genügen, so dass man 9 durch

$$\zeta = \alpha \cdot \text{Tg}\, z' - \beta \cdot \text{Tg}^3 z' + \gamma \cdot \text{Tg}^5 z' \qquad 10$$

ersetzen, — diese Gleichung für drei Wertepaare von z' und ζ aufschreiben, — daraus die α, β und γ bestimmen, — und so schliesslich eine, von allen Hypothesen freie und brauchbare Refraktionsformel erstellen könne. Leider nahm nun allerdings **Lambert** nach Dan. Bernoulli an, dass den Zenitdistanzen 45, 60 und 80° die Refraktionen 63, 107 und 328" entsprechen, und erhielt so die nicht wohl brauchbare Formel

$$\zeta = 63'',000 \cdot \text{Tg}\, z' - 0'',408 \cdot \text{Tg}^3 z' + 0'',011 \cdot \text{Tg}^5 z' \qquad 11$$

während ihm die von Tob. Mayer für dieselben Zenitdistanzen bestimmten Refraktionen 57, 99 und 316" die Formel

$$\zeta = 56'',909 \cdot \text{Tg}\, z' + 0'',095 \cdot \text{Tg}^3 z' - 0'',004 \cdot \text{Tg}^5 z' \qquad 12$$

ergeben hätten, welche, wie die nach ihr berechneten und für das oben mitgeteilte Specimen benutzten Werte erweisen, bis über 75° hinaus vollständig genügt haben würde.

458. Die Arbeiten von Euler, Lagrange und Oriani. — Die neuere Behandlung der Theorie der astronomischen Refraktion beginnt mit **Eulers** Abhandlung vom Jahre 1754, und die von ihm aufgestellte, dann allerdings 1772 durch **Lagrange** nach Ableitung und Form noch bedeutend vereinfachte Differentialgleichung bildet noch jetzt den Ausgangspunkt derselben [a]. **Lagrange** zeigte dann überdies, in welchen Beziehungen die ältern und neuern Theorien zu einander stehen, und als **Oriani** 1788 dessen Rechnungen in scharfsinniger Weise fortführte, gelangte dieser schliesslich dazu, für die Refraktion eine so rasch konvergierende Reihe zu geben, dass bis auf 70° Zenitdistanz die zwei ersten, von dem Gesetze der Wärmeabnahme mit der Höhe unberührten Glieder genügen, und somit das auffallende Faktum erklärt wird, dass die unter den verschiedensten Annahmen für jenes Gesetz berechneten Tafeln bei

nicht allzugrossen Zenitdistanzen so nahe miteinander übereinstimmen [c].

Zu 458: *a.* Unsere Differentialgleichung 456:6 stimmt genau mit der von **Lagrange**, wenn auch auf etwas anderem Wege, in seiner Abhandlung „Sur les réfractions astronomiques (Mém. Berl. 1772)" abgeleiteten Grundgleichung überein, und wenn man in derselben $u = \alpha^{(q-k):c}$, also $c \cdot du = \text{Ln}\,\alpha \cdot \alpha^{(q-k):c} \cdot dq$, setzt, so erhält man die von **Euler** in der Abhandlung „De la réfraction de la lumière en passant par l'atmosphère selon les divers degrés tant de la chaleur que de l'élasticité de l'air (Mém. Berl. 1754)", unter der Annahme, es gehe der beim Übergange eines Lichtstrahles aus dem leeren Raume in Luft der Dichte c den Wert $1/\alpha$ besitzende Brechungsexponent bei einer spätern Schichte der Dichte q in $1/\alpha^{q:c}$ über und es sei k die Dichte der Luft an der Erdoberfläche, wenn auch in viel mühsamerer Weise aufgestellte Differentialgleichung, so dass man diese letztere in der That als die Mutter-Form unserer gegenwärtigen Gleichungen zu betrachten hat. Ich glaube aber der nötigen Raumersparnis wegen mich für **Euler** auf diesen Nachweis beschränken zu sollen, da er in seiner zur Ermöglichung der Integration nötigen hypothetischen Annahme über die Beziehung zwischen q und r, und überhaupt in der weitern Entwicklung, nicht sehr glücklich war, ja schliesslich zu einem weitläufigen, praktisch kaum brauchbaren und jedenfalls der Simpsonschen Formel lange nicht beikommenden Ausdrucke gelangte. — *b.* Nachdem **Lagrange**, wie bereits mitgeteilt, unsere 456:6 abgeleitet hatte, zeigte er, in entsprechender Weise wie es 456:a und c geschehen ist, dass aus ihr unter gewissen Annahmen sowohl die Cassini'sche als die Simpson'sche Formel leicht erhalten werden können, und da ihm die auf letztere gegründete Bradley'sche Refraktionstafel für allen wirklichen Bedarf zu genügen schien, so fühlte er sich nicht veranlasst, seine Entwicklung weiter zu führen. — *c.* Eine solche weitere Entwicklung unternahm dagegen Barnaba **Oriani** (Garegnano bei Mailand 1752 — Mailand 1832; Dir. Obs. Mailand; vgl. Korresp. mit Piazzi in Pubbl. VI del Osserv. di Brera) in seiner Abhandlung „De refractionibus astronomicis (Eph. Mediol. 1788)" in folgender Weise: Ersetzt man in 456:6 die $1+m$ durch $(a+x):a$, so ergiebt sich mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

$$d\zeta = \frac{\text{Si}\,z' \cdot du}{\sqrt{1-u^2 \cdot \text{Si}^2 z'}} \left[1 - \frac{x}{a} \cdot \frac{1}{1-u^2 \cdot \text{Si}^2 z'} + \frac{x^2}{a^2} \cdot \frac{2+u^2 \cdot \text{Si}^2 z'}{2(1-u^2\,\text{Si}^2 z')^2} - \frac{x^3}{a^3} \cdot \frac{2+3u^2 \cdot \text{Si}^2 z'}{2(1-u^2 \cdot \text{Si}^2 z')^3} + \ldots \right] \quad 1$$

oder, wenn man entsprechend dem obigen und mit Benutzung der Exponentialreihe $u = \alpha^{(q-k):c} = 1 + \text{Ln}\,\alpha \cdot (q-k):c$, also $c \cdot du = \text{Ln}\,\alpha \cdot dq$, ferner in den mit $x:a$ behafteten Gliedern $u = 1$ setzt, sodann gliedweise integriert und endlich beachtet, dass den Grenzwerten $q = k$ und $q = 0$ die Grenzwerte $u = 1$ und $u = \alpha^{-k:c}$, sowie $x = 0$ und $x = h$ entsprechen,

$$\zeta = \text{Asi}(\alpha^{-k:c} \cdot \text{Si}\,z') - z' - \frac{\text{Tg}\,z' \cdot \text{Ln}\,\alpha}{a \cdot c \cdot \text{Co}^2 z'} \left[I - \frac{2+\text{Si}^2 z'}{2a \cdot \text{Co}^2 z'} \cdot II + \frac{2+3 \cdot \text{Si}^2 z'}{2a^2\,\text{Co}^4 z'} \cdot III - \ldots \right] \quad 2$$

wo

$$I = \int_0^h x \cdot dq \qquad II = \int_0^h x^2 \cdot dq \qquad III = \int_0^h x^3 \cdot dq \quad 3$$

Das erste dieser Integrale gelang es ihm nun leicht unter der Annahme zu bestimmen, dass der von der Erdoberfläche bis an die Grenze der Atmosphäre

von b bis 0 abnehmende Barometerstand in der Höhe x einen Betrag y besitze, der sich um eine der Dichte q proportionale Grösse dy vermindere, wenn x um dx zunehme, so dass $dy = -q \cdot dx$ gesetzt werden dürfe; denn in diesem Falle erhält man mit Hilfe von 45 : 4'

$$I = \Big[x \cdot q - \int q \cdot dx\Big]_0^h = -\int_0^h q \cdot dx = \int_b^0 dy = -b \qquad 4$$

Dagegen beim zweiten Integrale ging es nicht so glatt ab, indem er zwar in entsprechender Weise

$$II = \Big[x^2 \cdot q - 2\int x \cdot q \cdot dx\Big]_0^h = -2\int_0^h x \cdot q \cdot dx =$$

$$= 2\int_0^h x \cdot dy = 2\Big[x \cdot y - \int y \cdot dx\Big]_{0,b}^{h,0} = -2\int_0^h y \cdot dx \qquad 5$$

erhielt, aber so nur auf ein neues Integral geführt wurde, zu dessen Erledigung es unumgänglich notwendig wurde, die Beziehung zwischen x und y zu kennen. Er machte nunmehr die plausibeln Annahmen, es verhalte sich, wenn t und τ die Luftwärmen an der Erdoberfläche und in der Höhe x bezeichnen

$$q : k = \frac{y}{\tau} : \frac{b}{t} \qquad \text{und es sei} \qquad \tau = \frac{t}{1 + \gamma \cdot x} \qquad 6$$

wo die Konstante γ durch Beobachtungen bestimmt werden müsse, — man habe daher

$$q = k \cdot y \cdot (1 + \gamma x) : b \qquad \text{oder} \qquad dy : y = -k(1 + \gamma x) \cdot dx : b$$

somit durch Integration zwischen den Grenzen 0 und x für x, b und y für y

$$\text{Ln}\, y - \text{Ln}\, b = -k(x + {}^1/_2\, \gamma x^2) : b \qquad \text{oder} \qquad y = b \cdot e^{-k(2x + \gamma x^2) : 2b} \qquad 7$$

Setzt man aber

$$v = (1 + \gamma x)\sqrt{k : 2b\gamma} \qquad \text{also} \qquad dv = \gamma\sqrt{k : 2b\gamma} \cdot dx \qquad 8$$

so erhält man mit Hilfe von 7

$$\int y \cdot dx = \int b \cdot e^{-v^2 + k : 2b\gamma} \cdot \sqrt{2b : k\gamma} \cdot dv = b\sqrt{2b : k\gamma} \cdot e^{k : 2b\gamma} \cdot \int e^{-v^2} \cdot dv \qquad 9$$

und dieses letztere Integral, an welchem sich schon Euler vergeblich versucht hatte, widerstand auch **Oriani**. Er unternahm nun, dasselbe durch Annäherung zu bestimmen, indem er nach 7 unter Annahme, es sei b = 28'', k = $^1/_{10478}$ des Quecksilbers und $\gamma = 0{,}000036$, successive für x = 0, 100, 200, ... 30500' je die Werte von y, sodann die von jeden zwei sich folgenden y bestimmten Trapeze der Höhe $\Delta x = 100$ berechnete, und schliesslich die Summe aller dieser Trapeze als Wert des Integrales betrachtete. Er erhielt so

$$\int_0^h y \cdot dx = f \cdot b^2 : k \qquad \text{wo} \qquad f = {}^{122}/_{137} \qquad 10$$

und sodann nach 5

$$II = -2f \cdot b^2 : k \qquad \text{ferner analog} \qquad III = -6b^2(1 - f) : k\gamma \quad \text{etc.} \qquad 11$$

Setzt man ferner Asi $(\alpha^{-k:c} \cdot \text{Si}\, z') = z' + \Delta z$, wo Δz eine kleine Grösse sein wird, so hat man mit Hilfe der Exponentialreihe $\text{Si}\, z' + \Delta z \cdot \text{Co}\, z' \fallingdotseq \alpha^{-k:c} \cdot \text{Si}\, z' \fallingdotseq [1 - (k : c) \cdot \text{Ln}\, \alpha] \cdot \text{Si}\, z'$, oder, wenn zugleich der Brechungs-

exponent $1/\alpha$ durch α' ersetzt wird, $\Delta z = (k : c) \operatorname{Ln} \alpha' \cdot \operatorname{Tg} z'$, und erhält daher schliesslich nach 2

$$\zeta = \frac{k}{c} \operatorname{Ln} \alpha' \cdot \operatorname{Tg} z' \left[1 - \frac{b}{k \cdot a} \cdot \frac{1}{\operatorname{Co}^2 z'} + \frac{2 f b^2}{k^2 a^2} \cdot \frac{2 + \operatorname{Si}^2 z'}{2 \operatorname{Co}^2 z'} - \frac{6 b^2 (1 - f)}{k^2 a^3 \cdot \zeta} \cdot \frac{2 + 3 \operatorname{Si}^2 z'}{2 \operatorname{Co}^4 z'} + \ldots \right] \qquad 12$$

und damit die schon oben besprochene Reihe, von der **Oriani** glaubte, dass bis 50° ihr erstes Glied genügen dürfte, bis 70° zwei Glieder und bis 85° drei bis vier Glieder, während es dann allerdings für noch grössere Zenitdistanzen besser sein möchte, die Refraktionen direkt aus Beobachtungen abzuleiten.

459. Die Arbeiten von Bessel und der neuesten Zeit. — Wie auf allen für die praktische Astronomie wichtigen Gebieten arbeitete **Bessel** auch auf demjenigen der Refraktion mit grossem Erfolge und die von ihm berechnete Tafel wird noch immer so ziemlich allgemein als die beste betrachtet und benutzt [a], obschon seither wieder viele betreffende Untersuchungen gemacht worden sind, für welche jedoch hier, um diesen Abschnitt nicht gar zu sehr auszudehnen, auf die bezügliche Speciallitteratur verwiesen werden muss [b].

Zu 459: *a.* Nachdem es sowohl Chr. **Kramp**, vgl. dessen „Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Strasbourg 1799 in 4.", als **Laplace**, der in seiner „Mécanique céleste (IV von 1805)" der Theorie der Refraktion ebenfalls einen eigenen Abschnitt widmete, gelungen war, das durch 458 : 9 geforderte Integral zu bewältigen (vgl. auch 47 : a), beschäftigte sich bald darauf **Bessel** unter Benutzung dieser Arbeiten mit demselben Gebiete und gab 1818 in seinen klassischen „Fundamenta astronomiæ" die oben erwähnte Tafel, welcher bereits die in 453—57 als „wirkliche Refraktionen" eingetragenen Werte entnommen wurden. Da jedoch das unter der vorhergehenden Nummer Gegebene mir genugsam zu zeigen scheint, wie man sich bei Behandlung solcher Probleme durchzuwinden versuchte, so verzichte ich darauf, im Detail nachzuweisen, wie Bessel, nachdem er, entsprechend wie es in 456 : a geschehen ist, die dortige 5 abgeleitet hatte, im weitern vorging, um zu der Schlussformel

$$\zeta = a' \cdot \operatorname{Tg} z' \cdot \left(\frac{b}{B} \cdot \frac{1}{1 + n t} \right)^{A} \cdot \left(\frac{1}{1 + m \tau} \right)^{\lambda} = a' \cdot \operatorname{Tg} z' \cdot (B' \cdot T')^{A} \cdot \gamma^{\lambda} \qquad 1$$

zu gelangen und in seine Tafel für jede scheinbare Zenitdistanz z' die passenden Werte für $a' \cdot \operatorname{Tg} z'$, $\operatorname{Lg} B'$, $\operatorname{Lg} T'$, A, $\operatorname{Lg} \gamma$ und λ eintragen zu können, und begnüge mich, das zum Verständnis dieser Formel notwendige beizufügen: Die Grösse $a' \cdot \operatorname{Tg} z'$ entspricht der sog. mittlern, d. h. dem von Bessel als normal angenommenen Barometerstande $B = 751{,}5^{mm}$ und der Lufttemperatur $T = 9^0{,}3$ C. zukommenden Refraktion, — der Faktor $(B' \cdot T')^{A}$ giebt in seinem ersten Teile den Einfluss des momentanen Barometerstandes b, in seinem zweiten Teile dessen der Quecksilbertemperatur t entsprechende Reduktion, — der Faktor γ^{λ} aber den Einfluss der Lufttemperatur $T + \tau$; die Grösse $n = 0{,}000162$ ist der um die Ausdehnung einer Messingscale verminderte Ausdehnungskoeffizient des Quecksilbers, während $m = 0{,}0035$ der Ausdehnung der

Luft für 1° C. entspricht; die Exponenten A und λ endlich sind empirisch bestimmte Grössen, von welchen A erst gegen den Horizont hin von Bedeutung wird, da es bei 75° noch gleich der Einheit ist, dann aber bis $89^1/_2$° nach und nach auf 1,0780 ansteigt, — λ dagegen allerdings sich schon nach 40° von der Einheit entfernt und in raschem Wachsen bei $89^1/_2$° den Wert 1,5789 erreicht, jedoch wegen der Schwierigkeit, die richtige Lufttemperatur einzuführen, praktisch kaum so viel leisten dürfte als manche glauben. — Ist der Barometerstand b bereits auf Null reduziert, wird $A = 1 = \lambda$ angenommen, ferner

$$a' \cdot \mathrm{Tg}\, z' = \alpha \qquad b : B = 1 - \beta \qquad 1 : (1 + m \cdot \tau) = 1 - \gamma \qquad \mathbf{2}$$

gesetzt, und die Refraktion mit r bezeichnet, so geht 1 in

$$r = \alpha \cdot (1 - \beta) \cdot (1 - \gamma) \qquad \text{oder} \qquad r = \alpha\, (1 - \beta - \gamma) \qquad \mathbf{3}$$

über, und nach dieser Näherungsformel habe ich mit Benutzung der Besselschen Tafel unsere Tab. VI angelegt. — Anhangsweise führe ich an, dass gegen Ende des vorigen Jahrhunderts (vgl. Journ. d. Sav. 1789 IX) die Akademie in Harlem über die Theorie der Refraktion eine Preisfrage ausschrieb, dabei unter anderm die Frage aufwerfend, ob die Feuchtigkeit der Luft einen merklichen Einfluss ausübe. Von eingegangenen Lösungen verlautet nichts; dagegen sprach später **Laplace** die Ansicht aus, dass die Refraktionskonstante mit der Feuchtigkeit etwas zunehmen werde, und in der That fand ich bei einer Studie, welche ich auf die von mir (vgl. 383 : b) von 1874—77 gemessenen zahlreichen Zenitdistanzen gründete, die Formel

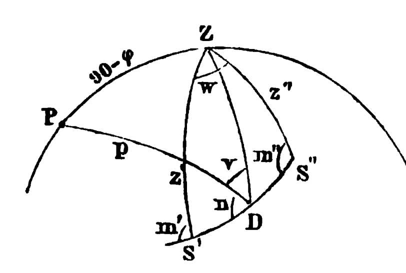
$$r = r' \,(1 - 0{,}00230 \cdot \triangle b - 0{,}00406 \cdot \triangle t + 0{,}00028 \cdot \triangle f) \qquad \mathbf{4}$$

wo r die wahre und r' die mittlere Refraktion bezeichnet, $\triangle b = 751{,}5^{mm} - b$, $\triangle t = t - 9^0{,}3$ C. und (unter f die relative Feuchtigkeit verstehend) $\triangle f = f - 73$ ist. — *b.* Zur Ergänzung der bereits angeführten Litteratur erwähne ich: „**Brandes**, Beobachtungen und empirische Untersuchungen über die Strahlenbrechung. Oldenburg 1807 in 4., — **Biot**, Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon. Paris 1810 in 4., — Giovanni Antonio Amedeo **Plana** (Voghera 1781 — Turin 1864; Neffe von Lagrange; Prof. astr. und Dir. Obs. Turin; vgl. E. de Beaumont in Mém. Par. 1873), Recherches analytiques sur la densité des couches de l'atmosphère et la théorie des réfractions astronomiques (Mém. Tur. 1822 et 1828; vgl. das offene Geständnis von 1822 XII 22 in Notiz 369), — James **Ivory** (Dundee 1765 — London 1842; folgeweise Lehrer, Industrieller, Prof. Militärkoll. und Privatgelehrter), On the astronomical refraction (Ph. Tr. 1823, 28), — Th. **Young**, A finite and exact expression for the refraction of an atmosphere nearly ressembling that of the earth (Ph. Tr. 1824), — Ed. **Schmidt**, Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Göttingen 1828 in 4. (vgl. Urteil Gauss von 1827 X I in Corresp. Schumacher), — Sir John William **Lubbock** (London 1803 — ebenda 1865; Vizekanzler Univ. London), On astronomical refraction (Mem. Astr. Soc. 1840, 1855), — J. J. **Baeyer**, Über die Strahlenbrechung in der Atmosphäre. Petersburg 1860 in 4., — C. M. **Bauernfeind**, Die atmosphärische Strahlenbrechung auf Grund einer neuen Aufstellung über die physikalische Constitution der Atmosphäre (A. N. 1478—80 von 1864), und: Die atmosphärische Strahlenbrechung. München 1864—65, 2. Th. in 4., — H. **Gyldèn**, Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. St. Petersburg 1866—68, 2 Th. in 4., — August **Weilenmann** (Knonau 1843 geb.; früher mein Assistent, jetzt Prof. phys. Zürich), Studien über die Refraction (Mitth. 24—25 von 1868), — Victor **Fuss** (Pulkowa 1839 geb.; Enkel von Nikolaus

in 55; Dir. Obs. Kronstadt), Beobachtungen und Untersuchungen über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizontes. St. Petersburg 1872 in 4., — Jul. **Maurer**, Die Extinction des Fixsternlichtes in ihrer Beziehung zur astronomischen Refraction. Zürich 1882 in 8., — R. **Radau**, Recherches sur la théorie des réfractions astronomiques (Ann. Obs. Par. Mém. 16 von 1882), und: Essai sur les réfractions astronomiques. Paris 1889 in 4., — Paul **Harzer** (Grossenhain in Sachsen 1857 geb.; Dir. Obs. Gotha), Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre (A. N. 2477 von 1882 und 2554—56 von 1883), — Arthur **Kerber**, Die astronomische Refraction als Function der meteorologischen Elemente (A. N. 2494—95 von 1883), — Th. v. **Oppolzer**, Über die astronomische Refraction. Wien 1886 in 4., — Pierre-Ossian **Bonnet** (1819 geb.; Akad. Paris), Théorie de la réfraction astronomique. Paris 1888 in 8., — etc."

460. Der Einfluss der Refraktion auf Distanz, Position und Coordinatendifferenzen. — Sobald zwei Gestirne miteinander verglichen werden, welche in verschiedenen Höhen stehen, so wird sich die ungleiche Einwirkung der Refraktion auf dieselben geltend machen, und man hat daher zwischen dem scheinbaren und wahren Unterschied ihrer Lage zu unterscheiden und die zur Reduktion des einen auf den andern nötigen Formeln zu entwickeln [a].

Zu 460: *a.* Es ist schon bereits in 177 und 397 einiges Betreffende beigebracht worden, aber immerhin wird es zweckmässig sein, hier noch einige allgemeinere Formeln zu entwickeln: Bezeichnen z' und z" die scheinbaren Zenitdistanzen zweier Gestirne S' und S", D ihre scheinbare Distanz, und w ihre Azimutaldifferenz, so ergeben die sog. Gauss'schen Formeln, wenn $m = \frac{1}{2}(m' + m'')$ und $z = \frac{1}{2}(z' + z'')$ ist,



$$\text{Co}\, m \cdot \text{Si}\, \tfrac{1}{2} D = \text{Co}\, \tfrac{1}{2} w \cdot \text{Si}\, \tfrac{1}{2}(z'' - z')$$
$$\text{Si}\, m \cdot \text{Si}\, \tfrac{1}{2} D = \text{Si}\, \tfrac{1}{2} w \cdot \text{Si}\, z$$

oder, da für mikrometrische Beobachtungen w, D und z" — z' immer klein sind, nahe

$$D \cdot \text{Co}\, m = z'' - z' \qquad D \cdot \text{Si}\, m = w \cdot \text{Si}\, z \qquad 1$$

und ebenso hat man, wenn die auf die wahren Örter bezüglichen Grössen mit den entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnet werden,

$$\Delta \cdot \text{Co}\, \mu = \zeta'' - \zeta' \qquad \Delta \cdot \text{Si}\, \mu = w \cdot \text{Si}\, \zeta \qquad 2$$

Bezeichnen aber r und ϱ die sog. Refraktionskonstanten, je nachdem die scheinbare oder wahre Zenitdistanz als Argument gewählt wird, so ist

$$\zeta = z + r \cdot \text{Tg}\, z \qquad z = \zeta - \varrho\, \text{Tg}\, \zeta \qquad \text{oder} \qquad r \cdot \text{Tg}\, z = \varrho\, \text{Tg}\, \zeta \qquad 3$$

und man kann daher leicht, wie dies **Bessel** in seiner hier zunächst zu Grunde gelegten Abhandlung „Einfluss der Strahlenbrechung auf Mikrometerbeobachtungen (Untersuchungen I 153—201)" auch wirklich ausgeführt hat, eine Tafel der r in eine der ϱ umsetzen, wobei sich z. B. $z = 45^\circ$, $r = 57'',682$ und $\varrho = 57'',650$ entsprechen. Bezeichnet man durch ϱ das Mittel der den beiden

Gestirnen entsprechenden Werte, so kann man nach 3

$$\frac{\text{Si}\,\zeta}{\text{Si}\,z} = \frac{\text{Si}\,\zeta}{\text{Si}\,\frac{1}{2}\,[\zeta' + \zeta'' - \varrho\,(\text{Tg}\,\zeta' + \text{Tg}\,\zeta'')]} \doteq \frac{1}{1 - \varrho \cdot \text{Si}\,1''} \doteq 1 + \varrho \cdot \text{Si}\,1''$$

setzen, und erhält somit durch Kombination der 1 und 2

$$\begin{aligned} \Delta \cdot \text{Si}\;\mu &= \text{D} \cdot \text{Si}\;\text{m} \cdot \text{Si}\,\zeta : \text{Si}\,z = \text{D} \cdot \text{Si}\,\text{m} \cdot (1 + \varrho \cdot \text{Si}\,1'') \\ \Delta \cdot \text{Co}\,\mu &= \text{D} \cdot \text{Co}\,\text{m} \cdot (\zeta'' - \zeta') : (z'' - z') = \text{D} \cdot \text{Co}\,\text{m} \cdot d\zeta : dz \end{aligned} \qquad 4$$

Bildet man aber $4' \cdot \text{Co}\,\text{m} - 4'' \cdot \text{Si}\,\text{m}$ und $4' \cdot \text{Si}\,\text{m} + 4'' \cdot \text{Co}\,\text{m}$, so ergeben sich sehr nahe

$$\begin{aligned} \mu &= \text{m} - \tfrac{1}{2} \cdot \left[\frac{d\zeta}{dz} - \varrho \cdot \text{Si}\,1'' - 1\right] \cdot \text{Si}\,2\,\text{m} \\ \Delta &= \text{D} + \text{D} \cdot \left[\varrho \cdot \text{Si}\,1'' + \left(\frac{d\zeta}{dz} - \varrho\,\text{Si}\,1'' - 1\right) \cdot \text{Co}^2\,\text{m}\right] \end{aligned} \qquad 5$$

oder endlich da, wenn

$$h = \text{Se}^2\,\zeta\left[\varrho \cdot \text{Si}\,1'' + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d\varrho}{d\zeta} \cdot \text{Si}\,2\,\zeta\right] \qquad k = \text{Ct}^2\,\zeta\left[\frac{h}{1 - h} - \varrho \cdot \text{Si}\,1''\right] \qquad 6$$

gesetzt wird, durch Differentiation von 3''

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - h \qquad \text{und somit} \qquad \frac{d\zeta}{dz} - \varrho \cdot \text{Si}\,1'' - 1 = k \cdot \text{Tg}^2\,\zeta$$

folgt,

$$\begin{aligned} \mu &= \text{m} - \tfrac{1}{2}\,k \cdot \text{Tg}^2\,\zeta \cdot \text{Si}\,2\,\text{m} \\ \Delta &= \text{D} + \text{D}\,[\varrho \cdot \text{Si}\,1'' + k \cdot \text{Tg}^2\,\zeta \cdot \text{Co}^2\,\text{m}] \end{aligned} \qquad 7$$

nach welchen Formeln sich die gemessenen Positionen und Distanzen verhältnismässig leicht für die Refraktion korrigieren lassen, besonders wenn man die von **Bessel** für k berechnete Hilfstafel benutzt. Da jedoch deren wirkliche Anwendung die Kenntnis von ζ voraussetzt, das allerdings mit hinlänglicher Annäherung aus der Sternzeit der Beobachtung und genäherten Werten für die Mittel der Rektascensionen und Deklinationen der beiden Gestirne berechnet werden kann, aber also immerhin berechnet werden muss, — da ferner in der Regel die Position nicht auf den Vertikal-, sondern auf den Deklinationskreis bezogen wird, in welchem Falle ν aus n, anstatt μ aus m, erhalten werden soll, wofür noch die ebenfalls von der Refraktion beeinflusste Variation v in Betracht fällt und daher 7' um ein neues Glied zu vermehren ist, — so will es mir scheinen, dass man schon in diesem Falle, und noch mehr in demjenigen, wo es sich um Korrektion von gemessenen Rektascensions- und Deklinations-Differenzen handelt, ebensogut wegkömmt, wenn man die obigen 7 und die aus ihnen noch abzuleitenden weitern Formeln ganz bei Seite lässt und statt dessen, unter Benutzung der 177 : 7—9, durch eine gewöhnliche Annäherungsrechnung nach und nach das Ziel zu erreichen sucht. Ich verzichte daher darauf, diese weitern Entwicklungen hier ebenfalls durchzuführen und verweise dafür auf die bereits erwähnte Abhandlung von **Bessel**, — auf die hierüber einlässlich eintretenden Lehrbücher von **Brünnow** und **Chauvenet**, — auf die ersteres berichtigende Note von W. H. **Finlay** in den Monthly Notices (1889 IV), — und auf die ebenfalls Hilfstafeln enthaltende Arbeit „Malcolm **Neill**, Logarithmic method of correcting for differential refractions in declination (A. N. 2735 von 1886)".

XVIII. Die Theorie der Finsternisse und Bedeckungen.

Sage nicht immer was du weisst, aber wisse immer was du sagst. *(Claudius.)*

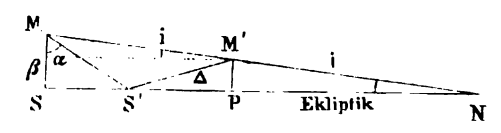
---

461. Die Bedingungen für eine Mondfinsternis. — Dass eine Mondfinsternis nur zur Zeit des Vollmondes und auch da nur in den Fällen eintreten kann, wo unser Begleiter gleichzeitig nahe an einem der Knoten steht, welche seine Bahn in der Ebene der Ekliptik bildet, ist bereits (243 u. f.) hervorgehoben worden. Wenn hier auf diese Verhältnisse nochmals zurückgekommen wird, so geschieht es, um diese Bedingungen genauer zu formulieren als es damals nach dem Plane dieser Schrift geschehen konnte [a].

Zu 461: *a.* Schneidet man den Schattenkegel der Erde durch eine in der Distanz des Mondes zur Kegelaxe senkrechte Ebene, so ist der Halbmesser des Schnittes nach 246 : 1, wenn wir nach dem Vorgange von **Mädler** den dort nach Tob. **Mayer** eingeführten Erfahrungsfaktor $^{61}/_{60}$ durch den, nahe in der Mitte zwischen ihm und den durch **Lambert** beliebten $^{41}/_{40}$, liegenden und ebenfalls bequemen Wert $^{51}/_{50}$ ersetzen,

$$\varphi = {}^{51}/_{50} \cdot (\odot + ☾ - r) \qquad 1$$

Bezeichnen ferner M und S die Lage von Mond und Sonne zur Zeit der Opposition, M' und S' deren Lage zu irgend einer andern der Opposition nahen Zeit, und ist β die Breite des Mondes bei der Opposition, i die Neigung der Mondbahn, λ aber



das Verhältnis der Bewegung des Mondes in Länge zu derjenigen der Sonne, so hat man successive $SS' = \beta \cdot Tg\,\alpha$, $SP = \lambda \cdot SS'$, $S'P = SP - SS' = \beta(\lambda - 1) \cdot Tg\,\alpha$, $M'P = \beta - SP \cdot Tg\,i = \beta(1 - \lambda \cdot Tg\,\alpha \cdot Tg\,i)$, und somit

$$\Delta^2 = \beta^2 \cdot [(\lambda - 1)^2 \cdot Tg^2\,\alpha + (1 - \lambda \cdot Tg\,\alpha \cdot Tg\,i)^2] \qquad 2$$

woraus, wenn man nach Δ und α differenziert,

$$\frac{d\Delta}{d\alpha} = \frac{\beta^2}{\Delta \cdot Co^2\,\alpha}[(\lambda - 1)^2 \cdot Tg\,\alpha - \lambda(1 - \lambda \cdot Tg\,\alpha \cdot Tg\,i)\,Tg\,i]$$

folgt. Es wird somit Δ ein Minimum, wenn

$$\frac{d\triangle}{d\alpha} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\,\alpha = \frac{\lambda \cdot \text{Tg}\,i}{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 \cdot \text{Tg}^2\,i} \qquad 3$$

ist, und zwar erhält man durch Substitution letztern Wertes in 2 diesen Minimalwert

$$\Delta' = \frac{\beta \cdot (\lambda - 1)}{\sqrt{(\lambda - 1)^2 + \lambda^2 \cdot \text{Tg}^2\,i}} = \beta \cdot \text{Co}\,i' \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\,i' = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \cdot \text{Tg}\,i \qquad 4$$

Damit aber eine partiale oder totale Finsternis entstehen kann, muss der Minimalwert kleiner als die der äussern oder innern Berührung entsprechende Summe oder Differenz von φ und dem scheinbaren Mondradius ϱ sein, d. h.

$$\beta \cdot \text{Co}\,i' < \varphi \pm \varrho \qquad \text{oder} \qquad \beta < \varphi \pm \varrho + (\varphi \pm \varrho)(\text{Se}\,i' - 1)$$

wo der zweite Teil eine kleine und nahe konstante Grösse ist. Man hat nämlich nach den Tafeln für die

Grössen	im Max.	im Min.	im Mittel
i	5° 20′ 6″	4° 57′ 22″	5° 8′ 44″
☾	61 32	52 50	57 11
☉	9,0	8,8	8,9
r	16 18	15 45	16 1,5
ϱ	16 46	14 24	15 35
λ	16,19	10,89	13,54

und somit unter Benutzung von 4 und 1

i′	5° 41′ 2″	5° 27′ 16″	5° 33′ 12″
$\varphi + \varrho$	3773″	3142″	3463″
$\varphi - \varrho$	1761	1414	1593
$(\varphi + \varrho)(\text{Se}\,i' - 1)$	18″,6	14″,3	16″,3
$(\varphi - \varrho)(\text{Se}\,i' - 1)$	8,7	6,4	7,5

und kann daher unbedenklich entsprechend den mittlern Werten annehmen, es sei das Entstehen einer partialen oder totalen Mondfinsternis sehr nahe an die Bedingung

$$\beta < \frac{51}{50}(\odot + ☾ - r) \pm \varrho + \begin{Bmatrix} 16'' \\ 7 \end{Bmatrix} \qquad 5$$

geknüpft. Setzt man in 5 die Maximal- oder Minimalwerte von ☉, ☾ und ϱ, sowie die Minimal- oder Maximalwerte von r ein, so findet man für die partiale Finsternis

$$\beta < 63'\,53'' \qquad \text{und} \qquad \beta < 52'\,5''$$

für die totale Finsternis dagegen

$$\beta < 32'\,34'' \qquad \text{und} \qquad \beta < 20'\,46''$$

als Grenzwerte für das mögliche und sichere Eintreffen. In den zwischenliegenden zweifelhaften Fällen hat man in 5 statt den Grenzwerten die bei der betreffenden Opposition statthabenden Werte selbst einzuführen. — Würde man statt φ den Halbmesser φ' des Halbschattens, der sich offenbar nach der 1 analogen Formel

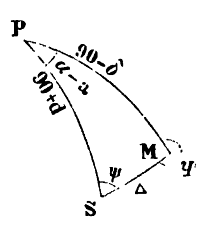
$$\varphi' = {}^{51}/_{50} \cdot (\odot + ☾ + r) \qquad 6$$

berechnen lässt, anwenden, so würden sich bei entsprechender Behandlung auch die Grenzen finden lassen, zwischen welche das mögliche und sichere Eintreten des Mondes in den Halbschatten fällt; ich abstrahiere jedoch, des geringen Interesses dieser Erscheinung wegen, davon dies weiter auszuführen.

— Anhangsweise mag noch beigefügt werden, dass für die obigen Mittelwerte von ☾, ☉ und r sich nach 1 der Zuschlag von $^1/_{50}$ auf 49″,57 beläuft, während J. **Hartmann**, vgl. seine Abhandlung „Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Leipzig 1891 in 8.", aus 2920 Beobachtungen für den Zuwachs des Schattenhalbmessers bei mittlerer Mondparallaxe den Mittelwert 48″,62 erhielt. Es dürfte somit für praktische Zwecke 1 auch fürderhin noch genügen.

462. Die Vorausberechnung. — Auch für die Vorausbestimmung der Mondfinsternisse und ihrer verschiedenen Phasen ist bereits (246) ein den gewöhnlichen Anforderungen genügendes Verfahren mitgeteilt worden. In manchen Fällen wird es jedoch wünschbar, genauere Daten zu erhalten als sie durch jene graphische Methode gewonnen werden, und es bleibt daher hier zu zeigen übrig, wie man auch zu solchen durch eine leichte Rechnung gelangen kann [a]. Anhangsweise mögen dann noch einige andere betreffende Verhältnisse kurz besprochen werden [b].

Zu 462: *a.* Um die Zeit zu bestimmen, zu welcher eine bestimmte Phase einer Mondfinsternis eintritt, bezeichne a die um 180° vermehrte Rektascension der Sonne und d ihre Deklination; es hat sodann der Mittelpunkt S des Schattens die Coordinaten a und — d, und es bestehen somit, wenn α und δ die Coordinaten des Mondes M sind und P den Pol bezeichnet, für die Polarcoordinaten $\triangle$ und ψ des Mondes in Beziehung auf den Schattenmittelpunkt und dessen Deklinationskreis die Beziehungen



$$\mathrm{Si}\,\triangle : \mathrm{Co}\,\delta = \mathrm{Si}\,(\alpha - a) : \mathrm{Si}\,\psi$$

$$\mathrm{Si}\,\triangle \cdot \mathrm{Co}\,\psi = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,d + \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - a) = \qquad 1$$
$$= \mathrm{Si}\,(\delta + d) - 2\,\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,d \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1\!/_2\,(\alpha - a)$$

oder, da $\triangle$ und $\alpha - a$ immer kleine Grössen sind und d immer nahe gleich dem Gegensatze von δ ist, mit einer der möglichen Genauigkeit der Beobachtung mehr als entsprechenden Annäherung

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,\psi = (\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \qquad \triangle \cdot \mathrm{Co}\,\psi = \delta + d + {}^1\!/_4\,\mathrm{Si}\,2\delta \cdot (\alpha - a)^2 \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 2$$

wo nach 461 : 1, 6 für die ersten und letzten Berührungen des Halbschattens und Kernschattens von aussen und innen für $\triangle$ successive die Werte

$$^{51}\!/_{50}\,(☉ + ☾ \pm r) + \varrho \qquad ^{51}\!/_{50}\,(☉ + ☾ \mp r) - \varrho \qquad 3$$

einzuführen sind. Setzt man entsprechend 2

$$x = (\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \qquad y = \delta + d + \varepsilon \qquad 4$$

wo
$$\varepsilon = {}^1\!/_4 \cdot \mathrm{Si}\,2\,\delta \cdot (\alpha - a)^2 \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 5$$

eine kleine, meist ohne Schaden zu vernachlässigende, noch für $\delta = 30°$ und $\alpha - a = 6000''$ nur auf 38″ ansteigende Grösse ist, — und bezeichnet mit x_0 und y_0 die Werte, welche x und y für eine der Opposition nahe Zeit T_0 annehmen, mit x′ und y′ aber ihre stündlichen Zunahmen, so hat man nach 2 für eine andere Zeit $T = T_0 + \tau$, wenn τ in Stunden ausgedrückt wird, offenbar

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,\psi = x_0 + x' \cdot \tau \qquad \triangle \cdot \mathrm{Co}\,\psi = y_0 + y' \cdot \tau \qquad 6$$

d. h. zwei Gleichungen, nach welchen für jedes gegebene τ die entsprechenden

Werte von ψ und $\triangle$, oder für jede durch $\triangle$ bestimmte Phase die entsprechenden Werte von ψ und τ berechnet werden können. Setzt man, um letztere Rechnung bequemer zu absolvieren,

$$m \cdot \mathrm{Si}\, M = x_0 \qquad m \cdot \mathrm{Co}\, M = y_0 \qquad n \cdot \mathrm{Si}\, N = x' \qquad n \cdot \mathrm{Co}\, N = y' \qquad 7$$

so dass M, m, N, n leicht bestimmbare Grössen sind, so gehen die 6 in

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\, \psi = m \cdot \mathrm{Si}\, M + n \cdot \tau \cdot \mathrm{Si}\, N \qquad \triangle\, \mathrm{Co}\, \psi = m \cdot \mathrm{Co}\, M + n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\, N \qquad 8$$

über. Multipliziert man 8' mit Co N oder Co ψ, 8'' mit Si N oder Si ψ, so ergeben sich aus den Differenzen die Gleichungen

$$\triangle \cdot \mathrm{Si}\,(\psi - N) = m \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \qquad n \cdot \tau \cdot \mathrm{Si}\,(\psi - N) = m\, \mathrm{Si}\,(M - \psi)$$

und hieraus folgen zur successiven Berechnung von ψ und τ aus $\triangle$

$$\mathrm{Si}\,(\psi - N) = {}^{m}/_{\triangle} \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \qquad \tau = {}^{\triangle}/_{n} \cdot \mathrm{Co}\,(\psi - N) - {}^{m}/_{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \qquad 9$$

so dass die gestellte Aufgabe gelöst ist, indem aus

$$T = T_0 + \tau \qquad \text{und} \qquad \Psi = 180^\circ + \psi \qquad 10$$

teils das Eintreten der Phase, teils, indem man vom Nordpunkte des Mondes seinem Rande um Ψ nach Osten folgt, der Punkt gefunden wird, über welchen hinaus das Schattencentrum liegt. — Durch Quadrieren und Addieren der beiden 8 erhält man

$$\triangle^2 = m^2 + n^2 \cdot \tau^2 + 2\, m \cdot n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \qquad 11$$

und hieraus durch Differenzieren nach $\triangle$ und τ, da die übrigen Grössen als konstant angesehen werden dürfen,

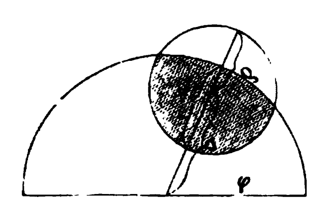
$$\frac{d\triangle}{d\tau} = \frac{n}{\triangle}\,[n \cdot \tau + m \cdot \mathrm{Co}\,(M - N)] \quad \text{so dass} \quad \tau' = -\frac{m}{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \qquad 12$$

ein Minimum von $\triangle$ entspricht. Bezeichnet daher T_1 die Zeit der grössten Finsternis, so hat man

$$T_1 = T_0 - \frac{m}{n} \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \qquad 13$$

und zugleich folgt aus Vergleichung von 12 und 9, dass für diesen Fall $\psi - N = 90^\circ$ sein muss. Bezeichnet man den τ' entsprechenden Wert von $\triangle$ mit $\triangle'$, so erhält man nach 11 durch Substitution aus 12

$$\triangle' = \pm\, m \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) \qquad 14$$



wo das Doppelzeichen offenbar so zu verstehen ist, dass man $\triangle'$ immer einen positiven Wert beizulegen hat. Bezeichnet endlich x das $\triangle$ entsprechende Eintauchen des Mondes in den Schatten, so ist offenbar

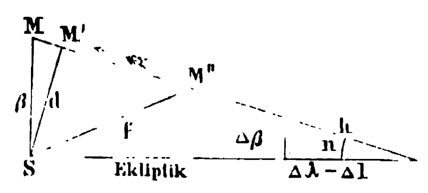
$$\triangle + (x - \varrho) = \varphi \qquad \text{oder} \qquad x = \varphi + \varrho - \triangle$$

und man hat daher, da das Verhältnis des grössten Wertes von x zum Monddurchmesser **Grösse** der Finsternis genannt wird, diese Grösse

$$m' = (\varphi + \varrho - \triangle') : 2\,\varrho = 12 \cdot (\varphi + \varrho - \triangle') : 2\,\varrho \text{ Zolle} \qquad 15$$

wo sich letzterer Ausdruck auf die aus alter Zeit stammende Übung bezieht, den scheinbaren Monddurchmesser in 12 sog. **Mondzolle** abzuteilen. — Um schliesslich noch zu ermitteln, auf welchem Teile der Erde eine gewisse Phase der Finsternis, die zur Pariserzeit T eintritt, sichtbar wird, hat man sich nur zu erinnern, dass ein Ort, dessen Pariserlänge $12^h - T$ ist, und dessen Polhöhe mit der betreffenden Deklination δ des Mondes übereinstimmt, zu dieser

Zeit Mitternacht und den in Opposition stehenden Mond im Zenite haben muss: Stellt man daher einen Globus so, dass jener Ort im Zenite steht, so haben alle über dem Horizonte stehenden Punkte der Erde zu jener Zeit den Mond und mit ihm natürlich auch die Phase in Sicht. — *b.* Hält man die Sonne, und damit auch das ihr gegenüberliegende Centrum S des Erdschattens, in dem der Opposition entsprechenden Punkte fest, und bezeichnen M, M' und M'' die relativen Lagen des Mondes zur Zeit T der Opposition, zur Zeit T' seines kürzesten Abstandes d von S, und zur Zeit T'' seines Abstandes f, so ist offenbar



$$T' = T - {}^1/_h\, MM' = T - {}^1/_h\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, n, \quad T'' = T - {}^1/_h\, MM'' = T' - {}^1/_h \sqrt{f^2 - d^2} \qquad \mathbf{16}$$

wo n und h, falls $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$, Δl die stündlichen Bewegungen des Mondes in Breite, des Mondes und der Sonne in Länge bezeichnen, durch

$$\mathrm{Tg}\, n = \Delta\beta : (\Delta\lambda - \Delta l) \qquad h = \sqrt{\Delta\beta^2 + (\Delta\lambda - \Delta l)^2} = \Delta\beta \cdot \mathrm{Cs}\, n \qquad \mathbf{17}$$

bestimmt sind, und es ist daher, da für den Beginn der partialen oder totalen Finsternis $f = \varphi \pm \varrho$ ist, die Dauer dieser Finsternisse durch

$$2\,(T' - T'') = {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varphi \pm \varrho)^2 - d^2} \qquad \mathbf{18}$$

gegeben. Es wird also die Dauer eine grösste werden, wenn die Opposition im Knoten ($d = 0$) statt hat, — wenn zugleich (soweit diese Bedingungen einander nicht widersprechen) die Grössen $(\varphi \pm \varrho)$ grösste, $\Delta\beta$ und $(\Delta\lambda - \Delta l)$ aber kleinste Werte annehmen. Nun haben (461) $\varphi + \varrho$ und $\varphi - \varrho$ die Maximalwerte 3773 und 1761''; ferner nimmt $\Delta\lambda$ in der Nähe des Knotens einen Minimalwert von circa 1767'' an, während dann allerdings $\Delta\beta$ auf etwa 200'' ansteigt; endlich nimmt Δl in der Nähe des Perigeums ein Maximum von etwa 153'' an. Man hat also nach 17 den Minimalwert $h = \sqrt{200^2 + (1767 - 153)^2} = 1628$, und sodann nach 18 für die Dauer die Maximalwerte $2 \cdot 3773 : 1628 = 4^h{,}63$ und $2 \cdot 1761 : 1628 = 2^h{,}16$, welche jedoch kaum je erreicht werden. Mondfinsternisse, welche über 4^h dauern, sind äusserst selten: Die längst andauernde der neuern Zeit war diejenige von 1794 II 14 mit $3^h{,}96$, da die im Berliner Jahrbuche für 1830 III 9 mit $4^h{,}45$ angegebene auf einem Rechnungsfehler beruhte und sich durch Neurechnung auf $3^h{,}90$ reduzierte.

463. Die Verwertung erhaltener Rechnungsresultate und Beobachtungen. — Die während des Verlaufes einer Mondfinsternis zu beachtenden Erscheinungen und namentlich die je beim Eintritte der verschiedenen Phasen zu erhebenden Daten besitzen allerdings für die neuere Zeit keine hervorragende Wichtigkeit mehr, und überdies ist von erstern bereits (247) gesprochen, sowie auch ([illegible]) die frühere Hauptverwendung der zweiten erwähnt worden. Immerhin giebt eine Vergleichung der durch Beobachtung und Berechnung für eine und dieselbe Phase erhaltenen Zeiten einige nicht zu unterschätzende Anhaltspunkte für die Kritik der letzteren zu Grunde liegenden Tafeln und Annahmen [a].

Zu 463: *a.* Namentlich wurden solche Vergleichungen auch zur Bestimmung des [illegible] benutzt, wofür noch auf „Legentil, Re-

marques sur la grandeur du demi-diamètre de l'ombre de la terre dans les éclipses de lune (Mém. Par. 1755), — **Lalande**, Table de ce qu'il faut ajouter, à raison de l'atmosphère, pour avoir le demi diamètre de l'ombre de la terre dans les éclipses de lune (Conn. d. t. 1763), — Th. **Schubert**, Über den Halbmesser des Erdschattens (Berl. Jahrb. 1791), — **Mädler**, Untersuchungen über die Grösse des Erdschattens (A. N. 256, 286 und 338 von 1834—37), — etc." verwiesen werden kann. — Ferner sind solche Vergleichungen beim Eintreten sog. **horizontaler** Finsternisse, wo (vgl. 453) durch Wirkung der Refraktion der verfinsterte Mond vor Untergang der Sonne aufzugehen scheint, wie dies z. B. 1750 VII 19 in Paris und 1862 XII 6 in Greifswalde beobachtet wurde, für das Studium der Refraktion in der Nähe des Horizontes nicht ohne Interesse, — und in früherer Zeit konnten sie auch zur Kritik der Mondtafeln dienen, was jetzt allerdings wegen der jede genaue Beobachtung vereitelnden Vermischung von Kernschatten und Halbschatten kaum mehr der Fall sein dürfte.

464. Die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. — Es ist selbstverständlich, dass die Bedingungen für das Zustandekommen der Verfinsterung eines Jupitersmondes und die Regeln zur Vorausberechnung einer solchen Erscheinung ganz in analoger Weise entwickelt werden können, wie es soeben für den Erdmond geschehen ist, und es kann daher hier genügen, für den eigentlichen Detail auf die betreffenden Specialschriften und Hilfstafeln zu verweisen [a]. — Über die Beobachtung und Ausnutzung solcher Verfinsterungen ist bereits früher (406) Einiges mitgeteilt worden, dem ich hier nur noch beifügen will, dass in der neuesten Zeit für erstere die Photometrie beigezogen worden ist [b], während die wichtigen Ergebnisse der zweiten für die Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes unter den folgenden Nummern besprochen werden sollen.

Zu 464: *a.* Wie in 406 erwähnt wurde, fielen die ersten Versuche, auch für die Jupitersmonde Tafeln zu erstellen, nicht sehr befriedigend aus, und es gelang erst Dom. **Cassini**, der sich seit 1652 intensiv mit diesen Monden befasst, sich durch Konstruktion eines, nachmals noch in „Fr. **Weidler**, Explicatio Jovilabii Cassiniani. Wittemb. 1727 in 4." beschriebenen Hilfsapparates die Übersicht erleichtert, und in seinen „Opera astronomica. Romæ 1666 in fol." bereits eine Tafel gegeben hatte, in seinen „Ephemerides Bononienses Mediceorum Siderum. Bononiæ 1668 in fol." eine wirklich brauchbare Tafel zu veröffentlichen und darauf gegründet die eintretenden Konfigurationen in der Form darzustellen, wie sie noch heute gebräuchlich ist. Ein wesentlicher Fortschritt wurde dann namentlich durch **Wargentin** 1741 in seinen Publikationen „De satellitibus Jovis, und: Tabulæ pro eclipsibus satellitum Jovis (Acta Upsal. 1741)" erreicht, welche sodann auch für die neuen Ausgaben der Halley'schen und anderer Tafelwerke benutzt wurden und so ziemlich massgebend blieben, bis die von Marie-Charles Théodor **Damoiseau** (Besançon 1768 — Issy bei Paris 1846; Artillerie-Oberst, Dir. Obs. de l'école milit. und Akad. Paris) berechneten „Tables écliptiques des Satellites de Jupiter. Paris 1836 in 4. (mit Fortsetzung von Todd: Washington 1876)" erschienen, welchen jetzt gewöhnlich, auf die z. B. in „Abel **Souchon**, Traité d'astronomie pratique. Paris 1883 in 8." detailliert auseinander gesetzte Weise, unsere Ephemeriden ihre betreffenden Angaben

entnehmen. — *b.* Mit den für Bestimmungen auf der See unentbehrlichen, dagegen allerdings auf dem Lande wo immer möglich durch wirkliche korrespondierende Beobachtungen ihrem Haupteinflusse nach zu eliminierenden Tafeln, vervollkommneten sich auch die Beobachtungsmethoden: Schon **Cassini** hatte vorgeschrieben, dass man bei Immersionen eines Satelliten in den Schatten Jupiters den letzten, bei Emersionen desselben den ersten Moment zu beobachten habe, — später **Hell** (vgl. Eph. Vind. 1764) diese Vorschrift noch dahin ergänzt, dass man die Mittel der sich aus Immersionen oder Emersionen ergebenden Resultate getrennt berechnen, und dann aus diesen Mitteln, um den Einfluss der Fernröhren zu eliminieren, wieder das Mittel nehmen solle, — und noch Adr. **Scherer** (vgl. seinen Brief an Gautier von 1820 IV 14 in Notiz 369) ernstlich davor gewarnt, schwache (jede Immersion zu frühe und jede Emersion zu spät zeigende) und namentlich bei korrespondierenden Beobachtungen zu ungleiche Fernröhren anzuwenden. In der neuern Zeit (1883) suchte sodann **Cornu** die photometrische Beobachtung zu belieben, aus der sich z. B. bei rasch aufeinander folgenden Einstellungen der Moment mit grosser Sicherheit bestimmen lasse, wo der Satellit gerade noch die Hälfte seiner Helligkeit zu besitzen scheine; sein Vorschlag kam bald darauf auf der Pariser Sternwarte zur Ausführung und gab A. **Obrecht** den Stoff für seine These „Etude sur les éclipses des satellites de Jupiter. Paris 1884 in 4.", welche sodann H. **Seeliger** zu einem betreffenden Exkurse (Astr. Viert. 1885) und Ernst **Anding** zu seinen „Photometrischen Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. München 1889 in 4." veranlasste. Ganz unabhängig davon beschäftigte sich, und zwar schon vom Juni 1878 hinweg, E. C. **Pickering** auf dem Harvard Observatorium mit entsprechenden photometrischen Aufnahmen.

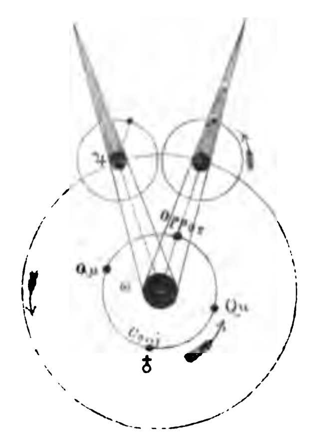
465. Die ältern Ansichten über die Geschwindigkeit des Lichtes. — Schon im Altertum wurde mehrfach die Ansicht ausgesprochen, dass die Geschwindigkeit des Lichtes zwar sehr gross, aber dennoch endlich sei [a], und auch **Galilei** pflichtete derselben bei, obschon ihm seine Versuche, diese Geschwindigkeit zu messen, kein positives Resultat ergaben [b].

Zu 465: *a.* Während **Plinius** in seiner „Historia naturalis (vgl. 4)" nur aussprach, dass die Geschwindigkeit des Lichtes grösser als diejenige des Schalles sei, lehrte dagegen schon im 2. Jahrhundert n. Chr. **Maximus Tyrius** in seinen „Dissertationes (z. B. Cantabrigiæ 1703 in 8. ausgegeben)" ausdrücklich, dass die Geschwindigkeit des Lichtes zwar sehr gross, aber dennoch endlich sei. Mit dieser letztern Ansicht stimmten sodann auch **Alhazen** laut seiner „Optica (vgl. 135)" und Francis **Baco** (Yorkhouse bei London 1561 — Highate bei London 1626; Rechtsanwalt, dann Lord-Grosskanzler) laut seinem „Novum organum. London 1620 in 4." überein, obschon sie dieselbe ebenfalls nur durch Raisonnement zu belegen wussten. — *b.* Einen ersten Versuch, die Geschwindigkeit des Lichtes wirklich zu messen, unternahm **Galilei**, wie wir aus dessen „Discorsi e dimostrazioni. Leidæ 1638 in 4. (p. 43 u. f.)" wissen, in folgender Weise: Zwei Beobachter, deren Jeder ein Licht hält, stellen sich zuerst in geringer Entfernung voneinander auf und üben sich darauf ein, dass, wenn der Eine sieht, dass der Andere sein Licht abdeckt, er dies ebenfalls ausführt; dann entfernen sie sich um einige Meilen voneinander und führen

dieselbe Operation (bei grössern Entfernungen Fernröhren zu Hilfe nehmend) genau in derselben Weise aus. Der Zeitunterschied zwischen dem Abdecken des eigenen und dem Sehen des fremden Lichtes giebt sodann die Zeit, in welcher das Licht die doppelte Distanz zurücklegt, und damit dessen Geschwindigkeit. — Dass **Galilei** bei der benutzten Distanz von einigen Meilen, und etwas später die Accademia del Cimento, auch bei Verdopplung derselben und Einführung eines Schiebers zum Ab- und Zudecken des Lichtes, kein positives Resultat erhalten konnte, ist selbstverständlich; aber die Methode, in welcher man einen Vorläufer der spätern physikalischen Bestimmung (467) erkennt, ist von grossem Interesse, und zugleich ehrt es ihren Erfinder, dass er aus dem Nichterfolge nur den Schluss zog, es sei die Geschwindigkeit des Lichtes zu gross, um auf diesem Wege ermittelt zu werden, nicht aber sich verleiten liess, wie es bald darauf **Descartes** bei ähnlichen Misserfolgen nach andern Methoden sich beikommen liess, daraus auf eine augenblickliche Fortpflanzung (propagation instantanée) zu schliessen, um sodann diesen Unsinn noch philosophisch zu begründen.

466. Die Bestimmungen durch und seit Römer. — Als Olaus **Römer** auf Veranlassung von Picard 1671 nach Paris übergesiedelt war, bethätigte er sich unter anderm an den (464) durch Dom. Cassini seit Jahren regelmässig fortgeführten Beobachtungen der Jupiterstrabanten, — fand alsbald, dass sich durchschnittlich zwei Immersionen des ersten Jupitersmondes rascher folgen als zwei Emersionen, — und schloss nun 1675 aus dem Umstande, dass die Immersionen nur in der Nähe derjenigen Quadratur sichtbar werden, wo sich die Erde Jupiter nähert, die Emersionen aber nur in der Nähe der entgegengesetzten Quadratur, es möchte jene Ungleichheit eine Folge davon sein, dass das Licht eine merkliche Zeit gebrauche, um die dabei in Frage kommenden Distanzenunterschiede zu durchlaufen, — ja konnte schliesslich den Nachweis leisten, dass das Licht etwa $11^m = 660^s$ gebrauche, um den Halbmesser der Erdbahn zu durchlaufen, — somit, unter Annahme einer Sonnenparallaxe von 9″,3, dessen Geschwindigkeit etwas mehr als 48000 französische Meilen betrage [a]. Nach längern Erörterungen siegte seine Anschauung, und es bleibt so **Römer**, wenn auch seine Zahlwerte später auf $493^s,2$ und circa 40000 deutsche Meilen abgeändert werden mussten, das grosse Verdienst, zuerst die endliche Geschwindigkeit des Lichtes bewiesen und für dieselbe eine bestimmte Zahlangabe ermittelt zu haben [b].

Zu 466: *a.* Die umstehende Figur giebt wohl genügenden Aufschluss über die den verschiedenen Stellungen der Erde zu Sonne-Jupiter entsprechenden Verhältnisse, — und ebenso ist es klar, dass bei endlicher Geschwindigkeit des Lichtes sich kleine positive oder negative Differenzen zwischen den aus einer beobachteten Immersion oder Emersion mit Hilfe der Umlaufszeit des Trabanten berechneten und den aus Beobachtung erhaltenen Zeiten der folgenden Immersionen oder Emersionen ergeben müssen, welche

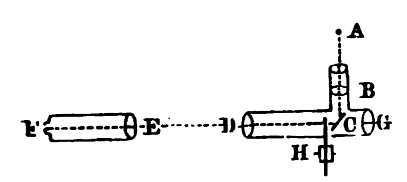


gegen die Opposition oder Konjunktion hin zu ganz erheblichen Beträgen anwachsen können, — ja dass es möglich sein muss, aus letztern annähernd die Werte zu bestimmen, welche jene Differenzen annehmen würden, wenn man von der Konjunktion oder Opposition selbst ausgehen und sowohl Rechnung als Beobachtung bis zur folgenden Opposition oder Konjunktion ausdehnen könnte. — Hält man an den von **Römer** benutzten 660ˢ und 9″,3 fest, und berücksichtigt, dass derselbe offenbar nicht die geographische ($1^0 = 15$), sondern die alte französische Meile ($1^0 = 25$) im Auge hatte, so erhält man für die Geschwindigkeit des Lichtes den Wert $180 \cdot 25 : (660 \cdot \pi \cdot \text{Si}\ 9'',3) = 48135$, welchen Römer auf 48000 franz. = circa 29000 geogr. Meilen abrundete. — *b.* Auch **Cassini** pflichtete anfänglich Römers Erwägungen bei und sprach vor der Akademie im Herbst 1675 aus, dass jene Differenz davon herzurühren scheine „que la lumière emploie quelque temps à venir du satellite jusqu'à nous"; später glaubte er dagegen, durch den Widerspruch der Cartesianer und durch den Umstand stutzig gemacht, dass die Beobachtungen der übrigen Satelliten keine entsprechende Ungleichheit zu ergeben schienen, in derselben „une inégalité particulière du mouvement synodique du premier satellite" sehen zu sollen, und vermerkte es übel, dass **Römer** ihm hierin nicht beipflichtete, sondern an seiner Ansicht festhielt, — ja im September 1676 der Akademie anzeigte, es werden die im November zu erwartenden Emersionen des ersten Mondes um volle 10^m später eintreten, als man es nach den im August beobachteten Immersionen erwarten sollte. Eine am 9. November gelungene Beobachtung ergab nun wirklich diesen Unterschied, und hierauf legte **Römer** 1676 XI 22 der Akademie seine berühmte „Démonstration touchant le mouvement de la lumière (Anc. Mém. Par. I und X)" vor, in welcher er den Nachweis leistete, dass die oben mitgeteilten Verhältnisse wirklich bestehen. — Trotz dem so durch **Römer** errungenen Siege setzte sich jedoch der Streit, in welchem die **Huygens** und **Newton** für, die **Cassini** und **Maraldi** gegen ihn kämpften, noch lange fort und erlosch eigentlich erst, als durch **Bradleys** Entdeckung der Aberration des Lichtes (264) die Gegner total aus dem Felde geschlagen wurden. — Dass **Römer** selbst später von seinen 11^m abgegangen sei, scheint unrichtig zu sein, so oft es auch behauptet wurde, — ja sein Schüler **Horrebow** soll dessen 660ˢ sogar auf 847ˢ erhöht haben; dagegen wies allerdings später **Delambre**, der seinen Rechnungen ein volles Tausend beobachteter Verfinsterungen des ersten Mondes zu Grunde legen konnte, in der Conn. d. t. für 1788 nach, dass die 660ˢ Römers auf 493ˢ,2 reduziert werden müssen, womit nun auch in den Zahlenwerten eine befriedigende Übereinstimmung mit der Bradley'schen Aberrationskonstante hergestellt war.

467. Die Kontrolarbeiten auf physikalischem Wege. — Trotz der dem Principe nach unanfechtbaren Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes auf astronomischem Wege war es von höchstem Interesse, dass es 1849 **Fizeau** gelang, auch auf

physikalischem Wege zu derselben zu gelangen [a]. Seine Arbeit ist überdies seitdem mehrfach unter verschiedenen Modifikationen wiederholt und eine sozusagen vollkommene Übereinstimmung zwischen den auf so total voneinander abweichenden Wegen erhaltenen Resultaten erzielt worden [b].

Zu 467: *a.* Die der Galilei'schen verwandte Methode, welche Hippolyte-Louis **Fizeau** (Paris 1819 geb.; Akad. Paris) benutzte, bestand, vgl. seine Abhandlung „Sur une expérience relative à la vitesse de propagation de la lumière (Compt. rend. 1849; auch Aragos Astronomie IV, wo der Apparat vollständig abgebildet ist)" wesentlich in folgendem: Er liess bei Nacht das Licht einer starken Lampe A, das durch zwei Linsen B konzentriert wurde, auf die Glasplatte C fallen, welche im Brennpunkte der Linse D stand, so dass die Strahlen letztere parallel verliessen, dann auf eine in der Distanz d befindliche zweite Linse E fielen und von dieser in ihrem Brennpunkte konzentriert wurden, wo ein kleiner Hohlspiegel F des Radius FE stand, der veranlasste, dass die Strahlen auf dem gleichen Wege, auf welchem sie gekommen waren, nach C zurückkehrten und dort einen leuchtenden Punkt bildeten, der mit dem Okulare G betrachtet werden konnte. Bei H befand sich ein Rad mit n Zähnen, welches in das Rohr D G eingriff und durch ein mit Zählapparat versehenes Räderwerk beliebig rasch gedreht werden konnte, z. B. so, dass es m Umdrehungen in der Sekunde machte. In diesem Falle wird, wenn in einem gewissen Momente eine Zahnlücke von H in die Axe fällt, nach der Zeit $\tau = 1:(2n \cdot m)$ der folgende Zahn an ihrer Stelle stehen, dagegen bei doppelter Geschwindigkeit die folgende Lücke, bei dreifacher der zweitfolgende Zahn, u. s. f. Ist nun die Geschwindigkeit x des Lichtes so gross, dass es den Weg 2 d gerade in dieser Zeit τ durchläuft, d. h. ist



$$x = 2d : \tau = 4n \cdot m \cdot d \qquad 1$$

so wird jeder durch die Lücke abgehende Strahl im 1., 3., ... Fall nach seiner Rückkehr auf einen Zahn treffen, also bei G kein Bild von A gesehen werden, während man im 2., 4., ... Fall einen hell leuchtenden Punkt wahrnimmt, — und umgekehrt wird, wenn man anfänglich das Rad sich langsam drehen lässt dann aber nach und nach die Geschwindigkeit vermehrt bis ein erstes Verschwinden eintritt, und nun das entsprechende m in 1 einführt, x gefunden werden können. **Fizeau** erhielt nun für $d = 8633^m$ und $n = 720$ ein solches erstes Verschwinden bei $m = 12{,}6$ und hiefür giebt 1

$$x = 4 \times 720 \times 12{,}6 \times 8633^m = 313275^{km} = 42200 \text{ g. M.}$$

was allerdings, wie sich später zeigte, ein etwas zu grosser Wert ist, aber immerhin der Wahrheit bereits so nahe kömmt, dass man die Freude begreifen kann, welche **Arago** über das Gelingen des von ihm patronisierten Versuches empfand, und welcher er in seiner Astronomie (IV 418) in den, im Hinblicke auf 452 verständlichen Worten „En répétant ces observations on pourra un jour, sans sortir de Paris et de sa banlieue, trouver cette parallaxe du Soleil, qui, vers le milieu du siècle dernier, donna lieu à des voyages si longs, si

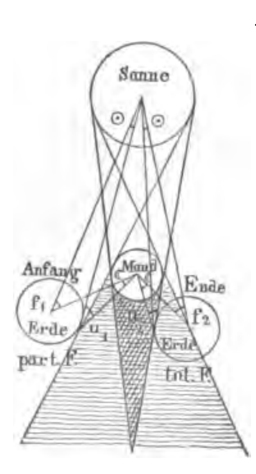
lointains, si pénibles et à tant de dépenses" Ausdruck gab. — *b.* Die von Arago gewünschte Wiederholung wurde 1874 durch A. **Cornu** mit (zum Teil unter Mitwirkung von Fizeau) noch etwas verfeinerten Apparaten und unter Berücksichtigung aller möglichen Einflüsse vorgenommen, wofür auf sein „Mémoire sur la détermination de la vitesse de la lumière entre l'Observatoire et Montlhéry (Ann. Obs. Par.: Mém. 13 von 1876)" zu verweisen ist, und ergab wirklich den wesentlich kleinern Wert $x = 300400^{km} \risingdotseq 40500$ g. M., welchen **Helmert** durch Neuberechnung sogar auf 299990^{km} reduziert haben soll. Überdies unternahm Léon **Foucault** 1850 (vgl. Compt. rend. 1850 und das 262 : b erwähnte Recueil), den von **Wheatstone** (Ph. Tr. 1834) zur Bestimmung der Dauer des elektrischen Funkens benutzten rotierenden Spiegel zur Konstruktion eines neuen Apparates verwendend, betreffende Messungen, welche ihm $x = 298000^{km}$ ergaben, und zu ähnlichen Resultaten gelangten noch seither, ebenfalls unter Anwendung des „revolving mirror" (vgl. Astr. papers 1880—83), die Amerikaner Alb. **Michelson** in Annapolis und Sim. **Newcomb** in Washington, indem ersterer $x = 299940$ und letzterer $x = 299860^{km}$ erhielt. Man darf also wohl schliesslich im Mittel aus den neuern Bestimmungen

$$x \risingdotseq 300000^{km} \risingdotseq 40000 \text{ g. M.}$$

annehmen. — Vgl. auch die historische Arbeit „Albert **Kuckuck**, Die Geschwindigkeit des Lichtes. Berlin 1867 in 4."

468. Die Bedingungen für eine Sonnenfinsternis. — Dass eine sog. Sonnenfinsternis unter ähnlichen Bedingungen wie eine Mondfinsternis entsteht, jedoch zur Zeit des Neumondes statt hat und der Mond dabei die Rolle eines Lichtschirmes übernimmt, ist bereits früher (248) auseinandergesetzt worden, so dass hier nur die genauere Formulierung der Bedingungen nachzutragen ist [a].

Zu 468: *a.* Die Distanz f, welche die Centren von Sonne und Mond vom Erdmittelpunkte aus zu haben scheinen, nimmt für einen Punkt an der Erdoberfläche infolge der Parallaxe einen andern Wert u an, und zwar hat man für die sämtlichen Berührungen an den beiden Schattenkegeln sehr nahe $f + \odot = u + ☾$, so dass man überhaupt mit genügender Annäherung



$$u = f - (☾ - \odot) \qquad 1$$

setzen kann. Da nun für die kleinste **wahre** Distanz nach 461 : 4

$$f = \beta \cdot \operatorname{Co} i' \quad \text{und} \quad \operatorname{Tg} i' = [\lambda : (\lambda - 1)] \cdot \operatorname{Tg} i \qquad 2$$

sein muss, wo β die Breite des Mondes bei der Konjunktion, i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik und λ das Verhältnis der Bewegungen von Mond und Sonne in Länge bezeichnet, so ist somit die kleinste **scheinbare** Distanz

$$u = \beta \cdot \operatorname{Co} i' - (☾ - \odot) \qquad 3$$

und es wird daher eine partiale $(d = \varrho + r)$, totale $(d = \varrho - r)$ oder centrale $(d = 0)$ Bedeckung statt haben, wenn

$$\beta \cdot \mathrm{Co}\, i' < ☾ - ⊙ + d \quad \text{oder} \quad \beta < ☾ - ⊙ + d + (☾ - ⊙ + d)(\mathrm{Se}\, i' - 1)$$

ist, wo sich das zweite Glied unter Anwendung der in 461 gegebenen mittlern Werte für die drei Fälle auf $\Delta = 25''$, $16''$ und $16''$ reduziert, so dass mit genügender Annäherung die Bedingung des Zustandekommens durch

$$\beta < ☾ - ⊙ + d + \Delta \qquad 4$$

ausgedrückt werden kann. Setzt man hier entsprechend 461 die extremen Werte ein, so findet man, dass für

		oder			
$\beta <$ 94′	52″	oder	$\beta <$ 83′	15″	eine partiale,
60	40		51	3	totale,
61	39		52	7	centrale

Finsternis statt haben **kann** oder statt haben **muss**, wobei die centrale Finsternis die totale und annulare umfasst. Es sind also die Grenzen für die Sonnenfinsternisse bedeutend weiter als für die Mondfinsternisse, und in der That kommen nach **Delambre** auf eine Saros (245) nur etwa 29 Mondfinsternisse, dagegen bei 40 Sonnenfinsternisse, — wobei sich jedoch letztere Zahl auf die ganze Erde bezieht: Für einen bestimmten Ort trifft durchschnittlich, während fast jedes Jahr eine sichtbare Mondfinsternis liefert, kaum jedes zweite Jahr eine sichtbare Sonnenfinsternis ein, und durchschnittlich nur alle 200 Jahre eine totale Bedeckung, die dann erst noch im Maximum nur etwa 8^m andauert. So wird z. B. Zürich, das 1706 eine totale Finsternis hatte, noch lange auf eine solche warten müssen, zumal dieser Ort die Finsternisse von 1820 (wo ich als kleiner Knabe, vgl. Notiz 360, zum erstenmal eine solche Erscheinung mit ansah) und 1847, bei welchen für diesen Ort zu den Bedingungen einer totalen Finsternis nur eine etwas kleinere Distanz des Mondes fehlte und so statt einer totalen bloss eine annulare Finsternis entstand, als Abschlagszahlungen annehmen musste.

469. Die ältern Methoden der Vorausbestimmung. — Schon im Altertume wurden zur Vorausbestimmung von sog. Sonnenfinsternissen neben der Saros (245) zuweilen auch Methoden angewandt, welche sich auf die Theorien von Sonne und Mond und geometrische Betrachtungen stützten [a], jedoch gelang es erst **Kepler**, in seiner „Projectionsmethode" ein befriedigendes Verfahren aufzufinden, welches sodann allerdings später, namentlich durch **Flamsteed** in konstruktiver und durch **Lacaille** in analytischer Behandlung, noch wesentlich vervollkommnet wurde [b].

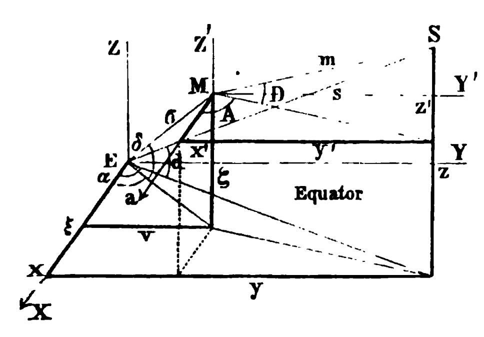
Zu 469: *a.* Schon **Hipparch** und **Ptolemäus** suchten nach von der Saros unabhängigen Methoden zur Vorausbestimmung der Finsternisse, und letzterer widmete (256) dieser Aufgabe speciell Buch VI seines Almagests (Ed. Halma I 373—453), — suchte (wie es oben in etwas anderer Weise geschehen ist) die Bedingungen auf, unter welchen Finsternisse und Bedeckungen eintreten können, — konstruierte Tafeln zur Bestimmung der Syzygien überhaupt und (einigermassen unserer VIII^b entsprechende) der sog. ekliptischen Syzygien insbesondere, — und wandte zur Bestimmung von Moment und Betrag der kleinsten Distanz der Mittelpunkte von Mond und Sonne (resp. Erdschatten), sowie namentlich der mit letzterm zusammenhängenden Grösse der Finsternis

geometrische Methoden an. Ich muss jedoch für weitern Detail auf den Almagest selbst oder auf Delambre (II 223—239) verweisen, — und ebenso für andere mutmasslich früher im Orient benutzte Vorschriften auf **Legentil** (Voyage in 449), **Delambre** (Conn. d. t. 1808), **Spottiswoode** (Asiat. Soc. Journ. 1863), etc. — *b.* Die sog. **Projektionsmethode**, welche zuerst bei **Kepler** (vgl. Astronomiæ pars optica, Tabulæ Rudolphinæ, etc.) und dann wieder ein halbes Jahrhundert später bei **Wren** und **Cassini** unabhängig von ihm aufzutreten scheint, beruht wesentlich darauf, dass man sich in Gedanken auf die Sonne versetzt, — dann einerseits den sich von da als Ellipse präsentierenden Parallel verzeichnet, welchen ein beliebiger Punkt auf der Erde infolge der täglichen Bewegung zu beschreiben scheint, sowie anderseits die scheinbare Bahn des Mondes, — und nun gleichzeitig eingenommene Punkte beider Wege aufsucht, welche um die Summe oder Differenz der scheinbaren Halbmesser von Mond und Sonne (Anfang und Ende der partialen oder totalen Finsternis für jenen Punkt) voneinander abstehen, oder eine kleinste Distanz (Mitte der Finsternis) zeigen, etc. Diese ihrer Natur nach zunächst graphische Methode, welche später (475) an einem Beispiele näher erläutert werden soll, wurde in diesem Sinne namentlich durch **Flamsteed** weiter ausgebildet und von ihm, nachdem schon 1668 Moore eine betreffende Zeichnung desselben der Roy. Society vorgelegt hatte, in seiner Schrift „The Doctrine of the Sphere. London 1680 in 4. (auch als Anhang zum ersten Bande von „Moore, A new Systeme of the Mathematicks. London 1681, 2 Vol. in 4.“ ausgegeben)“ in ihrem ganzen Detail auseinandergesetzt, — dann aber auch von **Lacaille** in seiner Abhandlung „Sur le calcul des projections en général et en particulier sur le calcul des projections propres aux éclipses de soleil et aux occultations des étoiles fixes par la lune (Mém. Par. 1744)“ in ein analytisches Verfahren übergeleitet, wobei er sagt: „Les astronomes qui substituent à ces calculs ennuyeux des opérations graphiques sur une projection de la sphère ne peuvent disconvenir que, quelque adresse que l'on emploie à faire ces opérations, et de quelque grandeur que soit le rayon de la figure projetée, il n'est guère possible de s'assurer d'une précision d'une demi-minute de temps. Tout l'avantage est donc du côté du calcul“. Es sind denn auch in der That in der neuern Zeit die konstruktiven Methoden nur noch ausnahmsweise behandelt und in Fällen angewandt worden, wo es sich um rasche Übersicht und nicht um zuverlässige Daten handelt; dagegen wurden die analytischen Methoden, von welchen die folgenden Nummern ebenfalls mehrere Proben enthalten, immer mehr vervollkommnet und auf verschiedenen Principien aufgebaut. — Für weitern Detail als mir hier zu geben erlaubt ist, verweise ich auf die zahlreichen Specialschriften, wie z. B. auf „Nicaise **Grammatico** (Trient 1680? — Regensburg 1736; Jesuit; Lehrer der Astronomie in Freiburg i./Br., Ingolstadt, Madrid, Trient und Regensburg), Methodus nova Solis et Lunæ eclipsium in plano organice delineandarum. Friburgi 1720 in 4., — **Lalande,** Nouvelle méthode pour calculer rigoureusement les éclipses du Soleil (Mém. Par. 1763), — **Duséjour,** Nouvelles méthodes analytiques pour calculer les éclipses de Soleil (Mém. Par. 1764—77; auch in Traité von 1786; deutsch durch Scheibel, Breslau 1793, — durch Rüdiger, Leipzig 1794), — **Lambert,** Neue Art Sonnenfinsternisse zu entwerfen (Berl. Jahrb. 1778), — **Euler,** De eclipsibus solaribus in superficie terræ per projectionem repræsentandis (Comm. Petrop. 1780), — **Lagrange,** Anmerkungen über die Entwerfung der Sonnenfinsternisse etc. (Berl. Jahrb. 1781/2 in Übers. von J. K. Schulze), — **Littrow,** Beiträge zur Berechnung der Finsternisse (Berl.

Jahrb. 1821), — **Hansen,** Über die Verfinsterungen auf der Erde überhaupt (A. N. 339—42 von 1837), — **Bessel,** Analyse der Finsternisse (Astr. Unters. II von 1842), — **Grunert,** Theorie der Sonnenfinsternisse, etc. (Wiener Denkschr. 1854), — Arthur **Cayley** (Richmond in Surrey 1821 geb.; Prof. math. Cambridge), On the graphical construction of a solar eclipse (Mem. Astr. Soc. 39 von 1871), — Calixte **Berry,** Théorie des occultations. Paris 1880 in 4., — etc."

470. Die Bestimmung der Schattenaxe. — Da in jedem Momente die Phase einer Finsternis zunächst von der Lage des Beobachters gegen die gemeinschaftliche Axe der beiden Schattenkegel abhängt, so kann man offenbar für die Vorausberechnung auch den Weg einschlagen, die jeweilige Lage dieser Axe zu bestimmen und den Ort des Beobachters auf dieselbe zu beziehen [a]. Es ergeben sich sodann relativ leicht, wie zum Teil hier und zum Teil unter einer spätern Nummer (472) gezeigt werden soll, sichere Regeln, um alle bei Erwartung einer Finsternis auftauchenden Fragen zu beantworten [b].

Zu 470: *a.* Bezeichnen S und M die Lagen, welche Sonne und Mond zu einer gewissen Zeit gegen die Erde E haben, so bestehen in Beziehung auf ein durch letztere gelegtes Coordinatensystem, dessen Axe der X nach dem Frühlingspunkte gerichtet ist, während die Ebene der XY im Equator liegt, und ein durch den Mond gelegtes Parallelsystem offenbar die Gleichungen



$$\begin{aligned} m \cdot \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Co}\,A &= s \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Co}\,a - \sigma \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \\ m \cdot \mathrm{Co}\,D \cdot \mathrm{Si}\,A &= s \cdot \mathrm{Co}\,d \cdot \mathrm{Si}\,a - \sigma \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \\ m \cdot \mathrm{Si}\,D &= s \cdot \mathrm{Si}\,d - \sigma \cdot \mathrm{Si}\,\delta \end{aligned} \qquad 1$$

Setzt man nun

$$m : s = g \qquad \sigma : s = \mathrm{Si}\,\odot : \mathrm{Si}\,☾ = b \qquad 2$$

und vertauscht 1' und 1'' mit $1'' \cdot \mathrm{Co}\,a - 1' \cdot \mathrm{Si}\,a$ und $1'' \cdot \mathrm{Si}\,a + 1' \cdot \mathrm{Co}\,a$, so erhält man

$$\begin{aligned} g \cdot \mathrm{Si}\,(A - a) \cdot \mathrm{Co}\,D &= \quad - b \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \\ g \cdot \mathrm{Co}\,(A - a) \cdot \mathrm{Co}\,D &= \mathrm{Co}\,d - b \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - a) \cdot \mathrm{Co}\,\delta \\ g \cdot \mathrm{Si}\,D &= \mathrm{Si}\,d - b \cdot \mathrm{Si}\,\delta \end{aligned} \qquad 3$$

und aus den zwei ersten derselben folgt

$$\mathrm{Tg}\,(A - a) = - \frac{b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - a)}{1 - b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - a)} \qquad 4$$

oder, da b immer klein ist, δ und d zur Zeit einer Sonnenfinsternis nahe gleich sind, und zu dieser Zeit auch $\alpha - a$ (folglich nach 3' ebenso $A - a$) als klein anzusehen ist,

$$A - a \approx - b \cdot \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Se}\,d \cdot (\alpha - a) \qquad 5$$

Ferner hat man mit entsprechender Annäherung nach 3'' und 3'''

$$g \cdot \mathrm{Co}\, D = \mathrm{Co}\, d - b \cdot \mathrm{Co}\, \delta \qquad g \cdot \mathrm{Si}\, D = \mathrm{Si}\, d - b \cdot \mathrm{Si}\, \delta \qquad \mathbf{6}$$

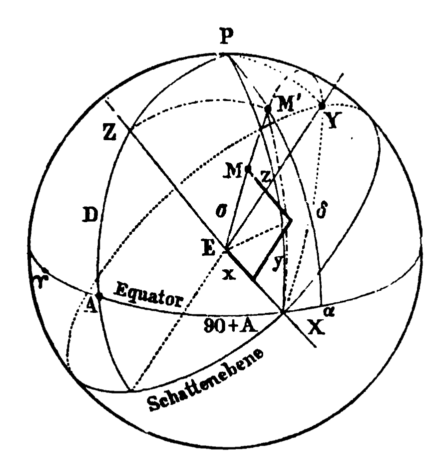
oder, wenn man 6'' · Co d — 6' · Si d und 6'' · Si d + 6' · Co d bildet,

$$g \cdot \mathrm{Si}\,(D - d) = - b \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d) \qquad g \cdot \mathrm{Co}\,(D - d) = 1 - b \cdot \mathrm{Co}\,(\delta - d) \qquad \mathbf{7}$$

woraus

$$\mathrm{Tg}\,(D - d) = - \frac{b \cdot \mathrm{Si}\,(\delta - d)}{1 - b \cdot \mathrm{Co}\,(\delta - d)} \qquad D - d \risingdotseq - b \cdot (\delta - d) \qquad g \risingdotseq 1 - b \qquad \mathbf{8}$$

erhalten werden, so dass man A, D, g nach 5, 8 und sodann m nach 2 berechnen, folglich die Lage der **Schattenaxe** M S leicht ermitteln kann. — Um sodann die Lage, welche ein gegebener Ort zu dieser Zeit gegen die Schattenaxe hat, zu bestimmen, wollen wir mit **Chauvenet,** dessen schon früher (14) erwähntem „Manual" diese Ableitung überhaupt in allem wesentlichen entnommen ist, eine durch E zu dieser Schattenaxe gezogene Parallele als Axe der Z, — eine zu dieser durch E senkrecht gelegte Ebene, welche als **Schattenebene** bezeichnet werden mag, als Ebene der X Y, und die den Deklinationskreis von Z enthaltende Ebene als diejenige der Y Z wählen; als positive Axe der Y soll die in 180° + A, als positive Axe der X die in 90° + A liegende Richtung benutzt werden. Bezeichnen nun x, y, z die Coordinaten des Mondes M in diesem neuen Systeme, so hat man offenbar mit Hilfe der Dreiecke M'PX, M'PY und M'PZ, da PX = 90°, PY = D und PZ = 90° — D ist, sofort



$$\begin{aligned} x &= \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'X = \sigma \cdot \mathrm{Co}\, \delta \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - A) \\ y &= \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'Y = \sigma\,[\mathrm{Si}\,(\delta - D) \cdot \mathrm{Co}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A) + \mathrm{Si}\,(\delta + D) \cdot \mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A)] \qquad \mathbf{9} \\ z &= \sigma \cdot \mathrm{Co}\, M'Z = \sigma\,[\mathrm{Co}\,(\delta - D) \cdot \mathrm{Co}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A) - \mathrm{Co}\,(\delta + D) \cdot \mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\,(\alpha - A)] \end{aligned}$$

während, wenn der Radius des Erdequators als Einheit gewählt wird,

$$\mathrm{Si}\, ☾ = 1 : \sigma \qquad \text{oder} \qquad \sigma = 1 : \mathrm{Si}\, ☾ \qquad \mathbf{10}$$

ist. Bezeichnen ferner ξ, v, ζ die Coordinaten eines Punktes auf der Erde in Beziehung auf dasselbe System, φ und φ' seine geographische und geocentrische Breite, ϱ seinen Abstand vom Erdcentrum in der soeben eingeführten Einheit und μ die einem gegebenen Momente an diesem Orte entsprechende, also mit der Æ seines Meridianes in diesem Augenblicke übereinstimmende Sternzeit, so erhält man, indem man in 9 die σ, δ, α durch ϱ, φ', μ ersetzt, und zugleich

$$n \cdot \mathrm{Si}\, N = \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' \qquad n \cdot \mathrm{Co}\, N = \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A) \qquad \mathbf{11}$$

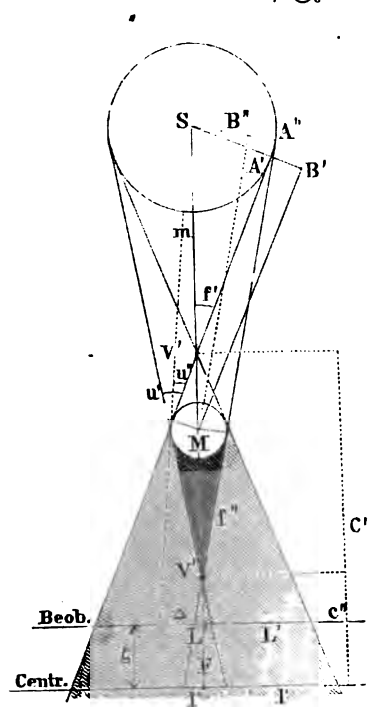
einführt,

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\mu - A) \\ v &= \varrho\,[\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D - \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A)] = n \cdot \mathrm{Si}\,(N - D) \qquad \mathbf{12} \\ \zeta &= \varrho\,[\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D + \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(\mu - A)] = n \cdot \mathrm{Co}\,(N - D) \end{aligned}$$

Hat man aber nach 9 und 12 die zwei Systeme von Coordinaten berechnet, so kann man nunmehr die Distanz Δ des Ortes von der Schattenaxe finden; denn, da diese letztere laut Konstruktion mit der Applikate z des Mondes zusammenfällt, so ist Δ offenbar der Distanz der Projektionen von Ort und Mond auf die Schattenebene gleich, und kann daher nach

$$\Delta^2 = (x - \xi)^2 + (y - \upsilon)^2 \qquad \mathbf{13}$$

berechnet werden. — *b.* Bezeichnet r_0 den scheinbaren Halbmesser der Sonne in ihrer mittlern Distanz, $\odot_0$ ihre entsprechende Parallaxe, und k das Verhältnis des Mondradius zum Radius des Erdequators, so hat man in Beziehung auf jene mittlere Distanz als Einheit und mit Benutzung von 2



$$\begin{aligned} \text{Erdradius} &= \mathrm{Si}\,\odot_0 \\ \text{Mondradius} &= k \cdot \mathrm{Si}\,\odot_0 \\ \text{Sonnenradius} &= \mathrm{Si}\, r_0 \end{aligned} \qquad \mathbf{14}$$

$$m = g \cdot s$$

während

$$\mathrm{Si}\, f = \frac{SA \pm AB}{SM} = \frac{\mathrm{Si}\, r_0 \pm k \cdot \mathrm{Si}\,\odot_0}{g \cdot s} \qquad \mathbf{15}$$

wird, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem man den Halbschatten oder Kernschatten ins Auge fasst, — und wo nach **Bessel** $r_0 = 959'',788$, nach **Encke** $\odot_0 = 8'',5776$ und nach **Burckhardt** $k = 0,27227$, also

$$\mathrm{Lg}\,[\mathrm{Si}\, r_0 + k \cdot \mathrm{Si}\,\odot_0] = 7,6688033$$
$$\mathrm{Lg}\,[\mathrm{Si}\, r_0 - k \cdot \mathrm{Si}\,\odot_0] = 7,6666913$$

zu setzen, aber für jede Zehntelsekunde, um welche $\odot_0$ nach den neuern Bestimmungen zunimmt, um 123 Einheiten der 7. Stelle zu vermehren oder zu vermindern ist. In Beziehung auf den Equatorradius als Einheit haben wir ferner

$$c = MF \pm MV = z \pm k : \mathrm{Si}\, f \qquad \mathbf{16}$$

wo das Doppelzeichen mit dem in 15 korrespondiert, und somit

$$l = i \cdot c = z \cdot \mathrm{Tg}\, f \pm k \cdot \mathrm{Se}\, f \qquad L = (c - \zeta) \cdot i = l - i \cdot \zeta \quad \text{wo} \quad i = \mathrm{Tg}\, f \qquad \mathbf{17}$$

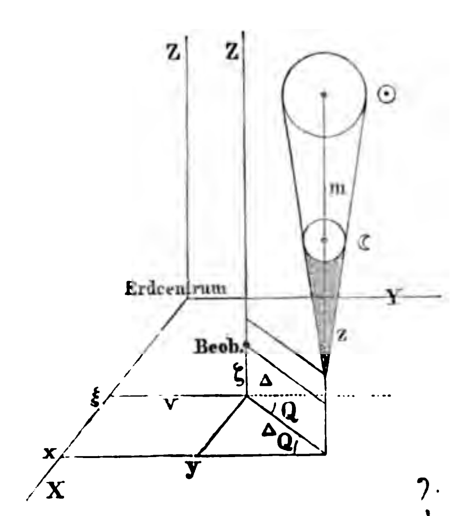
Für den Halbschattenkegel ist $c - \zeta$ beständig positiv, also auch L, — für den Kernschatten kann dagegen, wenn der Scheitel des Kegels unter die Schattenebene des Beobachters fällt, $c - \zeta$ und damit auch L negativ werden, und es tritt sodann eine totale Finsternis ein, während ein positives L einer annularen Finsternis entspricht. — Für Anfang oder Ende der Finsternis stimmt offenbar die Distanz Δ des Ortes von der Schattenaxe mit L überein, also hat man mit Hilfe von 13 und 17

$$(x - \xi)^2 + (y - \upsilon)^2 = (l - i \cdot \zeta)^2$$

$$(l - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Si}\, Q = x - \xi \qquad (l - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Co}\, Q = y - \upsilon \qquad \mathbf{18}$$

wo $\qquad \mathrm{Tg}\, Q = (x - \xi) : (y - \upsilon)$

Dieser Hilfswinkel Q hat zugleich noch eine geometrische Bedeutung, indem er offenbar mit dem Winkel identisch ist, welchen die vom Beobachter



auf die Schattenaxe gefällte Senkrechte Δ mit der Axe der Y macht, oder also auch mit dem Winkel, welchen die von ihm aus durch Sonne und Mond gelegte Ebene mit der Ebene der Y Z bildet, so dass durch denselben die Position ersterer Ebene gegen das gewählte Coordinatensystem bestimmt ist. — Die weitere Entwicklung für 472 aufsparend, wollen wir das Vorhergehende auf die 1860 VII 18, $2^h\,8^m\,56^s$ m. Z. Greenwich eingetretene Konjunktion in AR anwenden, für welche wir dem Nautical Alm. die Daten

M. Z. Gr.	α	δ	☾	a	d	Lg s
	° ′ ″	° ′ ″	′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
0^h	116 44 24,30	21 52 20,30	59 45,80	117 59 41,85	20 57 56,20	0,006 9675
1	117 21 59,10	42 32,80	47,13	118 2 12,50	29,42	61
2	59 30,45	32 36,40	48,44	4 43,14	2,60	47
3	118 36 58,35	22 31,20	49,72	7 13,77	56 35,75	33
4	119 14 22,65	12 17,20	50,98	9 44,39	8,86	19
5	51 43,35	1 54,60	52,22	12 15,00	55 41,94	05

entnehmen. Wendet man auf dieselben successive unsere 2, 8, 5, 10, 9, 15, 16 und 17 an, so erhält man die korrespondierenden Werte:

M. Z. Gr.	A	D	x	y	l Halbsch.	l Kernsch.
	° ′ ″	° ′ ″				
0^h	117 59 52,44	20 57 48,50	— 1,171856	0,917040	0,536867	— 0,008960
1	118 2 18,16	23,04	— 0,626559	756742	819	9010
2	4 43,87	56 57,57	— 0,081244	596075	747	9082
3	7 9,58	32,08	0,464044	435056	652	9176
4	9 35,27	6,58	1,009245	273704	533	9293
5	12 0,95	55 41,06	1,554284	112039	391	9434

und sodann, wenn man bei den x, y und l die Differenzreihen bildet und die Interpolationsformeln in 36 anwendet,

$$\Delta x_n = 545302 - 28{,}25 \cdot n - 26{,}25 \cdot n^2 - 2{,}5 \cdot n^3$$
$$\Delta y_n = -160843 - 351{,}83 \cdot n + 9 \cdot n^2 + 0{,}33 \cdot n^3$$
$$\Delta l_n = -83{,}5 - 22{,}5 \cdot n$$

wo die letztere Formel sowohl für Halb- als Kernschatten gebraucht werden kann. Setzt man in diesen letztern Formeln für n successive die Werte — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 ein und berechnet überdies aus der Angabe, dass 1860 VII 18 die Sternzeit im mittlern Greenwicher Mittage $7^h\ 46^m\ 4^s,03$ bei einer stündlichen Zunahme von $1^h\ 0^m\ 9^s,86$ gewesen sei, die den einzelnen Stunden entsprechenden Sternzeiten t, sowie die auf den Greenwicher Meridian bezüglichen Stundenwinkel $\mu_1 = t - A$ der Axe Z, so erhält man:

M. Z. Gr.	Δx	Δy	Δl	μ_1
0^h	0,545273	— 0,160106	— 0,000038	358° 31′ 8″,0
1	5306	0483	061	13 31 10,2
2	5301	0843	083	28 31 12,3
3	5244	1186	106	43 31 14,4
4	5120	1508	128	58 31 16,6
5	4913	1808	151	73 31 18,7

woraus unter andern die mittlere stündliche Veränderung $\Delta\mu_1$ von μ_1 gleich $54002'',15 = \overline{4},732411$ folgt. Dass für jeden andern Ort die μ_1 erhalten werden, wenn man die obigen Werte um seine westliche Länge w vermindert, ist selbstverständlich, und für die weitere Verfolgung dieses Beispiels wird ebenfalls auf 472 verwiesen.

471. Die ältern Methoden für Bestimmung des Verlaufes auf der Erde. — Während bei den eigentlichen Finsternissen neben der allgemeinen Kenntnis ihres Verlaufes nur noch die Frage auftritt, ob ein bestimmter Beobachter das verfinsterte Gestirn auch wirklich sehen werde, so wünscht man dagegen bei einer Bedeckung, wo gewissermassen ein Schirm vor einem Gestirne vorübergeführt wird, auch zu wissen, was die Gesamtheit der Beobachter in einem gewissen Momente sehen kann, — an welchen Orten eine gewisse Phase überhaupt sichtbar werden wird, — wer eine bestimmte Phase zuerst oder zuletzt beobachten kann, — und dergleichen mehr. Es ist nun auch wirklich schon in älterer Zeit mehrfach mit Erfolg nach Methoden gesucht worden, um Fragen solcher Art ebenfalls beantworten zu können [a].

Zu 471: *a.* Im allgemeinen für diese ältern Methoden auf die in 469 gegebene Litteratur verweisend, beschränke ich mich hier darauf, beispielsweise zu zeigen, wie man berechnen kann, wann die partiale, totale oder centrale Finsternis auf der Erde überhaupt beginnt oder aufhört. — Im vorstehenden Falle bestehen nämlich offenbar die in 462 : b abgeleiteten Näherungsgleichungen

$$d = \beta \cdot \mathrm{Co}\, n \qquad h = \Delta\beta \cdot \mathrm{Cs}\, n \qquad \mathrm{Tg}\, n = \Delta\beta : (\Delta\lambda - \Delta l) \qquad 1$$

$$T' = T - {}^1/_h \cdot \beta \cdot \mathrm{Si}\, n = T - \beta \cdot \mathrm{Si}^2 n : \Delta\beta \qquad \tau = {}^1/_h \cdot \sqrt{(f+d)\,(f-d)} \qquad 2$$

wo T′ die Zeit der Mitte der Finsternis für das Erdcentrum und τ die Zeit bezeichnet, um welche die der Distanz f von Sonne und Mond entsprechende

Phase vor oder nach dieser Mitte eintrifft. Da nun für einen Punkt an der Erdoberfläche die partielle, totale oder centrale Finsternis beginnt oder aufhört, wenn für ihn die scheinbare Distanz u von Sonne und Mond die Werte $(\varrho + r)$, $(\varrho - r)$ oder 0 annimmt, und diesen Distanzen (nach 468) für den zuerst an den Schattenkegel tretenden oder ihn zuletzt verlassenden Punkt die geocentrischen Distanzen $f = (\varrho + r + ☾ - ☉)$, $(\varrho - r + ☾ - ☉)$ und $(☾ - ☉)$ entsprechen, so erlauben die nach 2'' gebildeten Formeln

$$\tau_1 = {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varrho + r + ☾ - ☉ + d) \cdot (\varrho + r + ☾ - ☉ - d)}$$
$$\tau_2 = {}^1/_h \cdot \sqrt{(\varrho - r + ☾ - ☉ + d) \cdot (\varrho - r + ☾ - ☉ - d)} \qquad 3$$
$$\tau_3 = {}^1/_h \cdot \sqrt{(☾ - ☉ + d) \cdot (☾ - ☉ - d)}$$

die halbe Dauer der partialen, totalen und centralen Finsternis auf der Erde überhaupt zu berechnen, womit unter Hilfe von 2' unsere Aufgabe in der That vollständig gelöst ist. — Für die bis jetzt als Beispiel gewählte Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 ergeben sich aber nach diesen Formeln die Werte

$$T' = T + 0^h{,}09497 \qquad \tau_1 = 2^h{,}52667 \qquad \tau_2 = 1^h{,}49073 \qquad \tau_3 = 1^h{,}47085$$

wo die hiebei in Anwendung kommende Zeit der Konjunktion in Länge $T = 2^h\,20^m\,33^s$ m. Z. Gr. ist.

472. Weitere Verfolgung der Schattenaxe. — Die unter der vorhergehenden Nummer aufgezählten neuen Aufgaben lassen sich auch durch weitere Fortführung der (470) an die Lage der Schattenaxe angeknüpften Untersuchungen in hübscher Weise lösen, und es scheint daher am Platze, diese letztern auch hier noch etwas weiter fortzuführen [a].

Zu 472: *a.* Wenn ein Punkt der Erde in einem gegebenen Momente in der Schattenaxe liegen, oder von ihm aus die Finsternis **central** gesehen werden soll, so muss offenbar $\xi = x$, $\upsilon = y$ und $\Delta = 0$ sein, folglich (470 : 12), wenn man $\mu - A$ mit $\mu_1 - w$ vertauscht,

$$x = \mathrm{Si}\,V \qquad y = \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Si}\,(W - D)$$
wo
$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(\mu_1 - w) = \mathrm{Si}\,V \qquad \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(\mu_1 - w) = \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Co}\,W \qquad 1$$
$$\varrho \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' = \mathrm{Co}\,V \cdot \mathrm{Si}\,W$$

und man kann somit für die einer gewissen Zeit (nach 470) korrespondierenden Werte von x, y, D und μ_1 successive V, W, w, φ' und aus φ' (z. B. mit Hilfe von Tab. VII [d]) auch φ berechnen, womit der Punkt, welcher zu jener Zeit in der Schattenaxe liegt, seiner geographischen Lage nach vollständig bestimmt ist. Man hat dabei offenbar mit Rücksicht auf 1' nur für Zeiten zu rechnen, für welche $x < 1$ ist, somit z. B. in dem früher (470) behandelten Falle für 1, 2 und 3^h, für welche Zeiten sich die korrespondierenden Werte

M. Z. Gr.	1^h	2^h	3^h
V	$-38^0\,48'$	$-4^0\,40'$	$27^0\,39'$
W	97 7	57 41	50 22
w	$112^0\,17' = 7^h\,29^m$	$37^0\,11' = 2^h\,29^m$	$4^0\,7' = 0^h\,16^m$
φ'	$50^0\,39'$	$57^0\,23'$	$43^0\,1'$
φ	50 50	57 33	43 12

ergeben, so dass unter letztern Breiten in der westlichen Länge w von Greenwich die centrale Finsternis um $1^h - w = 17^h\ 31^m$, $2^h - w = 23^h\ 31^m$ und $3^h - w = 2^h\ 44^m$ eintreffen musste. — Die Schattengrenze wird offenbar durch alle Punkte bestimmt, in welchen die Finsternis zu einer gewissen Zeit eben anfängt oder eben aufhört, für welche also nach 470:18

$$(l - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Si}\, Q = x - \xi \qquad (l - i \cdot \zeta) \cdot \mathrm{Co}\, Q = y - v \qquad 2$$

ferner der Ortsstundenwinkel

$$\theta = \mu - A = (t - w) - (t - \mu_1) = \mu_1 - w \qquad 3$$

und endlich nach 470:12

$$\xi = \varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, \theta \qquad v = \varrho \cdot (\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D - \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D \cdot \mathrm{Co}\, \theta)$$
$$\zeta = \varrho \cdot (\mathrm{Si}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\, D + \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\, \theta) \qquad 4$$

ist, wo (74) ϱ in Teilen des Equatorradius und φ' durch

$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' = \mathrm{Co}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi} \qquad \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' = (1 - e^2) \cdot \mathrm{Si}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi} \qquad 5$$

gegeben werden. Die Grössen l, i, x, y, μ, A, D sind nun (470) bereits für jede Zeit t bekannt, — dagegen kennt man ξ, v, ζ, θ (wegen w), φ, φ', ϱ, Q noch nicht, — also kommen auf die 7 Gleichungen 2, 4, 5 scheinbar 8 Unbekannte, von welchen jedoch Eine, z. B. Q, als arbiträr angesehen werden kann, da jedem Werte von t im allgemeinen ein System von Werten entsprechen muss, weil es sich um das Aufsuchen einer Kurve, nicht eines einzelnen Punktes handelt. Setzt man, um die Rechnung zu erleichtern,

$$\mathrm{Co}\, \varphi_1 = \mathrm{Co}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2\, \mathrm{Si}^2 \varphi} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Si}\, \varphi_1 = \sqrt{1 - e^2} \cdot \mathrm{Si}\, \varphi : \sqrt{1 - e^2 \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi}$$
$$\varrho_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 = \mathrm{Si}\, D \qquad \varrho_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 = \mathrm{Co}\, D \cdot \sqrt{1 - e^2} \qquad v_1 = v : \varrho_1 \qquad 6$$
$$\varrho_2 \cdot \mathrm{Si}\, d_2 = \mathrm{Si}\, D \cdot \sqrt{1 - e^2} \qquad \varrho_2 \cdot \mathrm{Co} d_2 = \mathrm{Co}\, D \qquad \zeta_1 = \sqrt{1 - v_1^2 - \xi^2}$$

so gehen, weil hieraus

$$\varrho_1^2 = \mathrm{Si}^2 D + \mathrm{Co}^2 D \cdot (1 - e^2) = 1 - e^2 \cdot \mathrm{Co}^2 D$$

folgt, also ϱ_1 wenig von der Einheit, folglich auch v_1 wenig von v, und ζ_1 wenig von $\zeta = \sqrt{1 - v^2 - \xi^2}$ verschieden sein wird, — also wegen des kleinen Faktors i noch um so mehr $i \cdot \zeta$ durch $i \cdot \zeta_1$ ersetzt werden darf, unsere 2 in

$$(l - i \cdot \zeta_1) \cdot \mathrm{Si}\, Q = x - \xi \qquad (l - i \zeta_1)\, \mathrm{Co}\, Q = y - \varrho_1 \cdot v_1 \qquad 7$$

über, während nach 6

$$\xi^2 + v_1^2 + \zeta_1^2 = 1 \qquad 8$$

ist. Setzt man ferner

$$\mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, \gamma = x - l \cdot \mathrm{Si}\, Q \qquad \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, \gamma = (y - l \cdot \mathrm{Co}\, Q) : \varrho_1 \qquad 9$$

so gehen die 7, wenn man in der zweiten $i : \varrho_1$ durch i ersetzt, in

$$\xi = \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Si}\, \gamma + i \cdot \zeta_1 \cdot \mathrm{Si}\, Q \qquad v_1 = \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, \gamma + i \cdot \zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, Q \qquad 10$$

über, und man erhält somit nach 8, wenn man i^2 vernachlässigt und nach ζ_1 auflöst,

$$\zeta_1 = \mathrm{Co}\, \beta - i \cdot \mathrm{Si}\, \beta \cdot \mathrm{Co}\, (Q - \gamma) = \mathrm{Co}\, (\beta + \varepsilon) \quad \text{wo} \quad \varepsilon = i \cdot \mathrm{Co}\, (Q - \gamma) : \mathrm{Si}\, 1'' \qquad 11$$

Ferner findet man mit Hilfe von 4, 5, 6

$$\xi = \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, \theta \qquad v_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 - \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta$$
$$\zeta_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 + \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta \qquad 12$$

woraus

$$\zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 - v_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 = \mathrm{Co}\, \varphi_1 \cdot \mathrm{Co}\, \theta \qquad \zeta_1 \cdot \mathrm{Si}\, d_1 + v_1 \cdot \mathrm{Co}\, d_1 = \mathrm{Si}\, \varphi_1 \qquad 13$$

folgt. Endlich giebt 4''' mit Hilfe von 6 und 13

$$\zeta = \varrho_2 \cdot [\zeta_1 \cdot \mathrm{Co}\, (d_1 - d_2) - v_1 \cdot \mathrm{Si}\, (d_1 - d_2)] \qquad 14$$

Der Gang der Rechnung ist nun folgender: Man berechnet nach 6'' für alle bei der frühern Rechnung berücksichtigten Stunden $\varrho_1\ \varrho_2\ d_1\ d_2$, — sodann unter verschiedenen Annahmen für Q je successive nach 9, 11, 12', 13, 6' die β, γ, ε, ζ_1, ξ, υ_1, θ, φ_1, φ und endlich nach 3 noch w. Die durch φ und w bestimmten Punkte der Erde liegen nunmehr in der Grenzlinie des Schattens (des partialen oder totalen, je nach den für l eingeführten Werten), haben also Anfang oder Ende der Finsternis, — und zwar **Anfang**, wenn der dem Zeitelemente entsprechende Zuwachs des Abstandes von der Schattenaxe oder also wenn (470) der Zuwachs von $\triangle$ **kleiner** als derjenige des Schattenhalbmessers L ist, — dagegen **Ende**, falls er **grösser** ist, — also **Anfang oder Ende**, je nachdem das Differential von $\triangle^2$ nach der Zeit **kleiner oder grösser** als dasjenige von L^2 wird, d. h. je nachdem

$$2(x-\xi)\left(\frac{dx}{dt}-\frac{d\xi}{dt}\right)+2(y-\upsilon)\left(\frac{dy}{dt}-\frac{d\upsilon}{dt}\right)\lesseqgtr 2(l-i\zeta)\left(\frac{dl}{dt}-i\cdot\frac{d\zeta}{dt}\right)$$

oder, wenn die Differentialquotienten von x, ξ, ... nach der Zeit durch $\triangle x$, $\triangle\xi$, ... ersetzt werden, je nachdem die Differenz

$$P=(x-\xi)(\triangle x-\triangle\xi)+(y-\upsilon)(\triangle y-\triangle\upsilon)-(l-i\zeta)(\triangle l-i\cdot\triangle\zeta)$$

negativ oder positiv ausfällt. Diese letztere geht aber nach 2 und 470 : 17'' in

$$P=L\,.\triangle P \quad \text{wo} \quad \triangle P=(\triangle x-\triangle\xi)\,\mathrm{Si}\,Q+(\triangle y-\triangle\upsilon)\cdot\mathrm{Co}\,Q-(\triangle l-i\cdot\triangle\zeta) \qquad \mathbf{15}$$

über, und es ist daher P negativ oder positiv, je nachdem L und $\triangle P$ **verschiedenes oder gleiches Vorzeichen** haben. Nimmt man die Stunde als Zeiteinheit, so bezeichnen $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle l$, $\triangle\xi$, $\triangle\upsilon$ und $\triangle\zeta$ offenbar stündliche Veränderungen, von welchen uns die drei ersten bereits bekannt sind. Um auch noch die drei letzten zu finden, differentieren wir die 4, wo ϱ und φ' als Ortscoordinaten konstant sind, nach der Zeit, und erhalten so, wenn

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d(\mu_1-w)}{dt}=\frac{d\mu_1}{dt}=\triangle\mu \qquad \frac{dD}{dt}=\triangle D \qquad \mathbf{16}$$

gesetzt und alle diese Grössen in Sekunden ausgedrückt werden, mit Benutzung von 2

$$\begin{aligned}\triangle\xi&=\triangle\mu\cdot[-y\cdot\mathrm{Si}\,D+\zeta\cdot\mathrm{Co}\,D+(l-i\zeta)\cdot\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Co}\,Q]\\ \triangle\upsilon&=\triangle\mu\cdot[\ \ x\cdot\mathrm{Si}\,D-(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Si}\,D\cdot\mathrm{Si}\,Q]-\triangle D\cdot\zeta \qquad \mathbf{17}\\ \triangle\zeta&=\triangle\mu\cdot[-x\cdot\mathrm{Co}\,D+(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Co}\,D\cdot\mathrm{Si}\,Q]+\triangle D\,[y-(l-i\cdot\zeta)\,\mathrm{Co}\,Q]\end{aligned}$$

Substituiert man aber diese Werte in 15, vernachlässigt die Glieder mit i^2 und $i\cdot\triangle D$, und setzt

$$\begin{aligned}&\triangle a=-\triangle l-\triangle\mu\cdot i\cdot x\cdot\mathrm{Co}\,D \qquad \triangle b=-\triangle y+\triangle\mu\cdot x\cdot\mathrm{Si}\,D\\ &\triangle c=\triangle x+\triangle\mu\cdot y\cdot\mathrm{Si}\,D+\triangle\mu\cdot i\cdot l\cdot\mathrm{Co}\,D \qquad e\cdot\mathrm{Si}\,E=\triangle b \qquad \mathbf{18}\\ &e\cdot\mathrm{Co}\,E=\triangle c \qquad f\cdot\mathrm{Si}\,F=\triangle D \qquad f\cdot\mathrm{Co}\,F=\triangle\mu\cdot\mathrm{Co}\,D\end{aligned}$$

so erhält man

$$\triangle P=\triangle a+e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)-f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \qquad \mathbf{19}$$

Da nun $\triangle a$ offenbar eine kleine Grösse ist, so wird somit $\triangle P$ zunächst **negativ oder positiv**, je nachdem

$$e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)<f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \quad \text{oder} \quad e\cdot\mathrm{Si}\,(Q-E)>f\cdot\zeta\cdot\mathrm{Si}\,(Q-F) \qquad \mathbf{20}$$

ist. Da aber nach 470 für die **partiale oder annulare** Finsternis L positiv ist, so folgt hieraus, dass P in diesen Fällen nach 15 **negativ** (Finsternis-Anfang) oder **positiv** (Ende) ist, je nachdem 20' oder 20'' statt hat, — dass dagegen für die **totale** Finsternis, wo L negativ wird, P **negativ** (Anfang) oder **positiv**

(Ende) ist, je nachdem 20″ oder 20′ eintrifft. — Für die Finsternis von 1860 VII 18 erhalten wir, mit Bessel $\text{Lg}\sqrt{1-e^2} = 9{,}99855$ einführend, nach 6 und 18 successive

M. Z. Gr.	d_1	Lg ϱ_1	d_2	Lg ϱ_2	△a	△b
0^h	21° 1′ 39″,5	9,998 7324	20° 53′ 58″,0	9,999 8143	— 0,001356	0,050342
1	1 14,0	23	53 32,6	45	0766	101816
2	0 48,5	22	53 7,3	46	0175	153241
3	0 22,9	21	52 41,8	47	— 0415	204612
4	20 59 57,4	20	52 16,4	48	— 1005	255925
5	59 31,8	19	51 50,9	50	— 1595	307171

M. Z. Gr.	△c		Halbschatten und nahe Kernschatten		Für Beide	
	Halbsch.	Kernsch.	E	Lg e	F	Lg f
0^h	0,631779	0,631165	4° 33′ 21″	9,801939	— 0° 1′ 44″	9,388244
1	616776	616162	9 22 25	795965	44	264
2	601711	601097	14 17 17	793034	44	285
3	586571	585987	19 13 48	793255	44	305
4	571342	570728	24 7 46	796604	44	326
5	556010	555395	28 55 7	802923	44	347

und sodann, um z. B. die Halbschattengrenze zur Zeit $T = 2^h\ 8^m\ 12^s$ zu bestimmen, für welche durch Interpolation

$x = -0{,}00672 \quad y = 57409 \quad l = 53673 \quad \text{Lg}\ i = 7{,}66287 \quad \text{Lg}\ \varrho_1 = 9{,}99873$

$\mu_1 = 30^\circ 34' 13'' \quad d_1 = 21^\circ 0' 45'' \quad E = 14^\circ 58' \quad \text{Lg}\ e = 9{,}7931 \quad \text{Lg}\ f = 9{,}3883$

folgen, für die Arbiträre Q die Werte 50° und 300° einführend und die oben angegebene Formelnfolge benutzend,

Q	γ	β	ε	Lg ζ_1	ξ	v_1
50	— 61° 11′ 53″	28° 28′ 52″	— 5′ 43″	9,94437	— 0,41478	0,23235
300	56 12 27	33 27 20	— 6 59	9,92191	0,45482	0,30854

Q	Ltg θ	θ	Ltg φ_1	Ltg φ	φ	w
50	9,74979 · n	— 29° 20′ 20″	9,79856	9,80001	32° 15′ 33″	59° 54′ 33″
300	9,83232	34 12 15	9,86101	9,86246	36 4 30	356 21 58

womit also die den beiden Annahmen für Q entsprechenden Punkte der Schattenkurve wirklich bestimmt sind, und zwar gehört, da für sie

$$\text{Lg}\,[e \cdot \text{Si}\,(Q - E)] = \left\{\begin{matrix} 9{,}5521 & > 9{,}2170 \\ 9{,}7780 \cdot n & < 9{,}2477 \cdot n \end{matrix}\right\} = \text{Lg}\,[\zeta_1 \cdot f \cdot \text{Si}\,\theta]$$

wird, und F kaum berücksichtigt zu werden verdient, nach 20 der erstere

der dem Ende der Finsternis entsprechenden Teile der Kurve an, der zweite der ihrem Anfange entsprechenden Teile.

473. Darstellung der erhaltenen Resultate durch Zeichnung. — Sind einmal nach dem vorhergehenden die nötigen Rechnungen ausgeführt, so hat es offenbar keine Schwierigkeit, die erhaltenen Resultate in eine Karte einzutragen, die einzelnen Punkte zu verbinden und so den ganzen Gang der Erscheinung übersichtlich darzustellen [a].

Zu 473: *a.* Dehnt man z. B. die in 472 durchgeführten Rechnungen auf eine grössere Anzahl von Zeiten und von Annahmen für die Arbiträre aus, so erhält man offenbar die nötigen Grundlagen für solche Darstellungen, wie sie schon aus früherer Zeit für einzelne bemerkenswerte Finsternisse vorliegen, und in neuerer Zeit von den grössern Ephemeriden, wie namentlich vom Nautical Almanac, regelmässig publiziert werden. Für weitern Detail muss jedoch auf die in 469 gegebene Speciallitteratur verwiesen werden.

474. Vorausbestimmung der Erscheinungen an einem bestimmten Orte durch Rechnung. — Die sich an einem bestimmten Orte folgenden Phasen einer Finsternis lassen sich, wenn einmal nach dem vorhergehenden die sich auf die Erscheinung im allgemeinen beziehenden Rechnungen ausgeführt sind, verhältnismässig leicht abstrahieren [a]. Man kann jedoch dieselben auch, ohne zuvor jenen immerhin etwas weiten Weg zu verfolgen, mit meist genügender Annäherung durch verschiedene einfachere Methoden direkt ermitteln [b].

Zu 474: *a.* Für Zürich ist $\varphi = 47^0\ 22'\ 39'',8$, $\varphi' = 47^0\ 11'\ 11'',3$, $\text{Lg}\ \varrho = 9{,}999\,4499$, $w = -8^0\ 33'\ 15'' = -34^m\ 13^s$; man erhält daher für diesen Ort und die früher benutzten Greenwicher Stunden 0 bis 5 nach 470 : 11, 12 (wo wieder $\mu - A$ durch $\mu_1 - w$ zu ersetzen ist), — nach den mit 470 : 13 übereinstimmenden Formeln

$$x - \xi = \Delta \cdot \text{Si}\, q \qquad y - v = \Delta \cdot \text{Co}\, q \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, q = (x - \xi) : (y - v) \qquad 1$$

und nach den 470 : 17, unter Benutzung der frühern Rechnungsresultate, successive:

M. Z. Gr.	ξ	v	Lg ζ	Δ	L'	L''
0^h	0,08357	0,44316	9,949935	1,340930	0,532767	— 0,013040
1	25507	45921	929128	0,930480	2911	— 2899
2	40918	49171	885193	0,501401	3215	— 2597
3	53541	53513	813908	0,122914	3654	— 2159
4	62514	58981	706473	0,497453	4192	— 1622
5	67224	65081	543169	1,033570	4784	— 1033

und somit als Hauptresultat, dass Zürich beständig zu weit von der Schatten-

axe abstand, um in den Kernschatten eintauchen zu können, — dass sich dagegen für den Halbschatten die Werte

M. Z. Gr.	$\triangle - L'$	Differenz	Mittel
0^h	0,808863		
		— 0,410594	
1	0,397569		
		— 0,429383	
2	— 0,031814		— 0,404155
		— 0,378926	
3	— 0,410740		
		0,374001	
4	— 0,036739		0,454763
		0,535525	
5	0,498786		

ergeben, aus welchen sofort folgt, dass die partiale Finsternis in Zürich nahe um $2^h - 0{,}031814 : 0{,}404155 = 1^h\ 55^m{,}3$ Gr. $= 2^h\ 29^m{,}5$ Z. begann, und um $4^h + 0{,}036739 : 0{,}454763 = 4^h\ 4^m{,}9$ Gr. $= 4^h\ 39^m{,}1$ Z. endigte. Die Mitte der Finsternis traf somit etwa auf $3^h\ 0^m{,}1$ Gr. $= 3^h\ 34^m{,}3$ Z., so dass die für 3^h Gr. erhaltenen Werte von $\triangle$, L' und L'' auch für die Mitte der Finsternis passen, woraus sich (vgl. Fig. 3 in 470) sehr nahe die Grösse der Finsternis

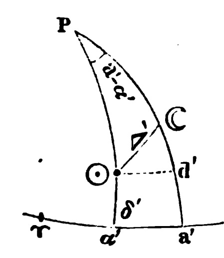
$$M = 12 \cdot \frac{u''}{u'} = 12 \cdot \frac{L' - \triangle}{L' + L''} = 9{,}3 \text{ Zolle} \qquad 2$$

ergiebt. — Anhangsweise füge ich bei, dass von mir in Zürich der Anfang der partiellen Finsternis um $2^h\ 29^m{,}7$ m. Z. Zürich notiert, also eine gute Übereinstimmung mit der Vorausberechnung konstatiert, das Ende dagegen wegen einem eintretenden Gewitter nicht beobachtet werden konnte. — *b.* Ein solches Rechnungsverfahren erhält man z. B. durch folgende Entwicklung: Ist T eine dem Anfange der Finsternis nahe Ortszeit, und bezeichnen a, d, α, δ die geocentrischen oder **wahren** AR und D von Mond und Sonne für diese Zeit, — a', d', α', δ' ihre durch die Parallaxe veränderten oder **scheinbaren** Coordinaten, so hat man nach 435 : 13, 14

$$a' = a - \varrho \cdot \pi \cdot \text{Co}\,\varphi' \cdot \text{Si}\,(t - a) \cdot \text{Se}\,d \qquad d' = d + \varrho \cdot \pi \cdot \text{Si}\,\varphi' \cdot \text{Si}\,(d - n) \cdot \text{Cs}\,n$$
$$\text{wo} \qquad \text{Ct}\,n = \text{Ct}\,\varphi' \cdot \text{Co}\,[t - {}^1\!/_2\,(a + a')] \cdot \text{Se}\,{}^1\!/_2\,(a - a') \qquad 3$$

ist, π die Parallaxe bezeichnet und ϱ, φ', t die geocentrischen Coordinaten des betreffenden Ortes sind. Schreibt man diese Gleichungen für Mond und Sonne auf und nimmt je die Differenz, so erhält man, indem man die Korrektionsglieder für die Sonne ganz vernachlässigt, und in denjenigen für den Mond $\varrho = 1$ setzt, ferner $t - a$ und $t - {}^1\!/_2\,(a + a')$ mit dem Stundenwinkel $s = t - \alpha$ der Sonne, sowie d mit δ vertauscht und $\text{Se}\,{}^1\!/_2\,(a - a') = 1$ annimmt,

$$a' - \alpha' = a - \alpha - ☾ \cdot \text{Co}\,\varphi' \cdot \text{Si}\,s \cdot \text{Se}\,\delta$$
$$d' - \delta' = d - \delta - ☾ \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,(\varphi' - w) \cdot \text{Se}\,w \qquad 4$$
$$\text{wo} \qquad \text{Tg}\,w = \text{Tg}\,\delta \cdot \text{Co}\,s$$



ist. Bezeichnet sodann $\triangle'$ die scheinbare Distanz von Sonne und Mond zur Zeit T, so hat man

$$\text{Co}\,\triangle' = \text{Si}\,\delta' \cdot \text{Si}\,d' + \text{Co}\,\delta' \cdot \text{Co}\,d' \cdot \text{Co}\,(a' - \alpha')$$

oder $\text{Si}^2\,{}^1\!/_2\,\triangle' = \text{Si}^2\,{}^1\!/_2\,(d' - \delta') + \text{Co}\,\delta' \cdot \text{Co}\,d' \cdot \text{Si}^2\,{}^1\!/_2\,(a' - \alpha')$

oder also, da bei der Konjunktion die Coordinaten von Sonne und Mond nahe gleich sind,

$$\triangle'^2 = (d' - \delta')^2 + (a' - \alpha')^2 \cdot \text{Co}^2\,\delta \qquad 5$$

Setzt man daher für die Zeit T

$$A = (a' - \alpha') \cdot Co\, \delta' \qquad D = d' - \delta' \qquad 6$$

und versteht unter A' und D' die entsprechenden Grössen für die Zeit $T' = T + \theta^h$, so dass

$$f = (A' - A) : \theta \qquad g = (D' - D) : \theta \qquad 7$$

die stündlichen Veränderungen dieser Grössen bezeichnen, so hat man nach 5 für die Zeit T + t des Anfanges und Endes der partialen oder totalen Finsternis

$$(\varrho \pm r)^2 = (A + f \cdot t)^2 + (D + g \cdot t)^2 \qquad 8$$

woraus sich, wenn

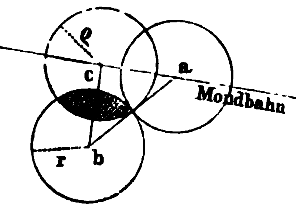
$$\tau' = -\frac{A \cdot f + D \cdot g}{f^2 + g^2} \quad \text{und} \quad Tg^2 \alpha = \frac{A^2 + D^2 - (\varrho \pm r)^2}{(f^2 + g^2) \cdot \tau'^2} \qquad 9$$

gesetzt wird, durch Auflösung nach t sofort

$$t = \tau' \left(1 \pm Se\, \alpha \cdot \sqrt{Co\, 2\alpha}\right) \qquad 10$$

ergiebt, wo offenbar das obere Zeichen dem Ende, das untere dem Anfange entspricht, so dass

$$t' = T + \tau' \quad \text{und} \quad t'' = \tau' \cdot Se\, \alpha \cdot \sqrt{Co\, 2\alpha} \qquad 11$$

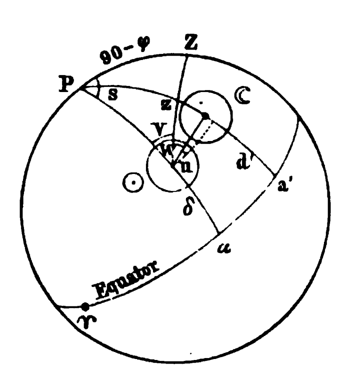


die Zeit der Mitte der Finsternis und die halbe Dauer derselben bestimmen. — Da $\sqrt{f^2 + g^2}$ selbstverständlich die stündliche Bewegung in der scheinbaren Mondbahn darstellt, so hat man $ac = t'' \cdot \sqrt{f^2 + g^2}$, während $ab = \varrho + r$ ist. Es stellt also

$$bc = \sqrt{(\varrho + r)^2 - t''^2 \cdot (f^2 + g^2)} \qquad 12$$

den kleinsten Abstand von Mond und Sonne vor, und mit dessen Hilfe kann man nach

$$m = \varrho - (bc - r) = 12(\varrho + r - bc) : 2r \text{ Sonnenzolle} \qquad 13$$



die sog. Grösse der Finsternis berechnen. — Um endlich noch den Winkel W zu erhalten, welchen der Ein- oder Austrittspunkt des Mondes mit dem Vertikal der Sonne bestimmt, so hat man offenbar

$$W = 90^0 - (v + u) \qquad 14$$

wo zur Bestimmung von u

$$Si\, u = \frac{d' - \delta}{\varrho \pm r} \qquad Co\, u = \frac{a' - \alpha}{\varrho \pm r} \cdot Co\, \delta \qquad 15$$

verwendet werden können, während v nach 177 aus

$$Tg\, v = Tg\, s \cdot Se\,(\delta + n) \cdot Si\, n \qquad \text{wo} \qquad Tg\, n = Co\, s \cdot Ct\, \varphi \qquad 16$$

erhalten wird. — Für andere Verfahren vgl. die in 469 gegebene Speciallitteratur.

475. Vorausbestimmung für eine Zwischenstation durch Interpolation. — Sind die Hauptmomente einer Sonnenfinsternis für drei nicht gar zu weit voneinander entfernte Orte berechnet,

so kann man dieselben auch für andere benachbarte Orte durch Aufstellung einer Art Interpolationsformel leicht ermitteln.

Zu 475: *a.* So entnahm z. B. **Littrow** (Astr. II 280), von der Annahme ausgehend, dass die Zeit t des Eintrittes einer gewissen Phase eine Funktion der Länge λ und Breite φ des betreffenden Ortes sei, dem Taylor'schen Lehrsatze die Näherungsformel

$$t + \Delta t = t + A \cdot \Delta\lambda + B \cdot \Delta\varphi \qquad 1$$

wo A und B die Differentialquotienten von t nach λ und φ bezeichnen, woraus sich für zwei benachbarte Orte die Beziehung

$$t'' - t' = A \cdot (\lambda'' - \lambda') + B \cdot (\varphi'' - \varphi') \qquad 2$$

ergiebt. Sind also für drei der Lage nach nicht gar zu verschiedene Orte die Ortszeiten einer Phase bereits berechnet, so kann man die 2 zweimal aufschreiben, aus diesen beiden Gleichungen A und B berechnen, und sodann nach 2 für jeden benachbarten Ort aus seiner Länge λ und Breite φ höchst einfach die angenäherte Ortszeit t derselben Phase ermitteln. — So z. B. gab das Berliner Jahrbuch für die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 für München, Padua und Paris an, dass dieselbe zu den mittlern Ortszeiten $t' = 2^h,72$, $t'' = 2^h,81$ und $t''' = 1^h,89$ beginnen werde, während nach Tab. VII[a] diesen Orten die Längen $\lambda' = 0^h,77$, $\lambda'' = 0^h,79$, $\lambda''' = 0^h,15$ und die Breiten $\varphi' = 48^0,15$, $\varphi'' = 45^0,40$, $\varphi''' = 48^0,83$ entsprechen. Hiefür erhält man aber in angegebener Weise statt 2 die Gleichung

$$2^h,72 - t = 1,31\,(0^h,77 - \lambda) - 0,02\,(48,15 - \varphi) \qquad 3$$

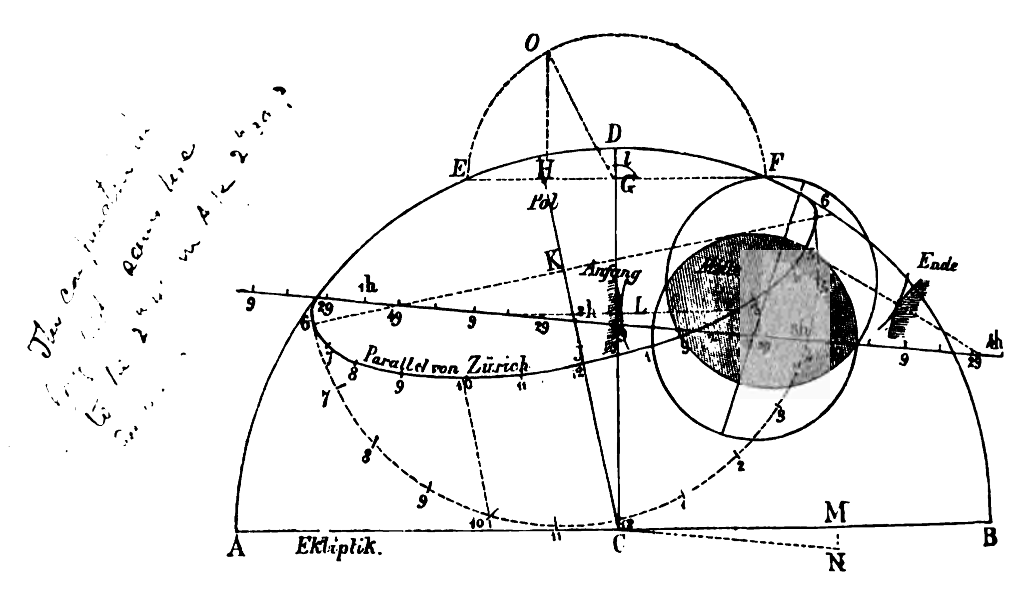
und wenn man in dieselbe für Zürich $\lambda = 0^h,57$ und $\varphi = 47^0,38$ einführt, so erhält man $t = 2^h,48 = 2^h\,28^m,8$, während wir oben (474 : a) durch strenge Rechnung $2^h\,29^m,5$ gefunden haben.

476. Vorausbestimmung auf graphischem Wege. —

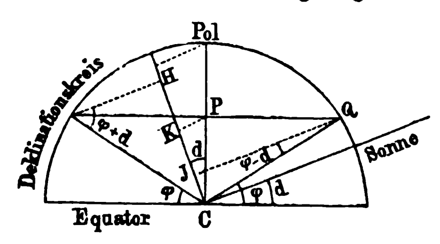
Wenn es sich nur darum handelt, für einen Ort eine angenäherte Darstellung einer Sonnenfinsternis zu erhalten, so kann man in der Weise vorgehen, dass man aus den geocentrischen Coordinaten des Mondes zur Zeit seiner Opposition (entsprechend wie in 474 : b) die diesem Orte zukommenden scheinbaren Coordinaten berechnet, und sodann in ganz entsprechender Weise operiert, wie es (246) für die Mondsfinsternisse geschehen ist [a]. Etwas genauere Resultate geben allerdings andere, aber dafür auch viel umständlichere Verfahren, von welchen namentlich das von Tob. **Mayer** benutzte lange sehr beliebt war [b].

Zu 476: *a.* In Anwendung dieses höchst einfachen Verfahrens auf die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 erhielt ich (vgl. Verz. 230) für Zürich $2^h\,32^m$ und $4^h\,45^m$ m. Z. als Anfang und Ende der Finsternis, — also (vgl. 474 und 475) bis auf einige Minuten richtige Werte und dabei zugleich eine graphische Darstellung der Erscheinung. — *b.* Das von Tob. **Mayer** 1745 in seinem „Mathematischen Atlas" auseinandergesetzte Verfahren entspricht ganz den von **Kepler** (vgl. 469 : b) ausgesprochenen Principien, indem es wesentlich in folgendem besteht: Zuerst verzeichnet man, für die Minute eine beliebige Einheit wählend, einen die Erde im richtigen Verhältnisse zum Monde darstellenden

Kreis, wofür, da die Radien der beiden Gestirne sich bei gleicher Distanz wie die Mondparallaxe ☾ zum Mondradius ϱ verhalten würden, aber hier der



Radius der Erde wegen ihrer etwas grössern Entfernung von der Sonne im Verhältnisse von (☾ — ☉) : ☾ zu vermindern ist, als Radius AC = ☾ — ☉ gewählt werden muss. Stellt AB die Ekliptik vor, so giebt die Senkrechte CD ihren Pol, von welchem der Pol des Equators um e absteht, also für DE = e = DF irgendwo in der Geraden EF liegen muss, und zwar, sofern F die dem Frühlingsequinoktium entsprechende Lage und die gemeinschaftliche Länge von Sonne und Mond zur Zeit unserer Konjunktion gleich l ist, wenn ∠ FGO = l aufgetragen wird, in der Projektion von O auf EF.



Die Distanz Pol-C muss dabei, wie beistehende Hilfsfigur zeigt, gleich AC·Co d werden, und wenn man CJ = AC·Si(φ — d), CH = AC·Si(φ + d), CK = AC·Si φ·Co d und K6 = PQ = AC·Co φ aufträgt, so sind dadurch die Axen der Projektion des Parallels bestimmt: Es kann also diese in gewohnter Weise mit Hilfe eines über der grossen Axe konstruierten Halbkreises nicht nur wirklich verzeichnet, sondern auch mit einer Zeitteilung versehen werden, wie dies in der Zürich und der Finsternis von 1860 entsprechenden Hauptfigur angedeutet ist. Um sodann auch noch die Mondbahn mit ihrer Zeitteilung zu verzeichnen, hat man offenbar nur nötig, CL gleich der Breite des Mondes zur Zeit der Konjunktion in Länge, CM gleich der Differenz der stündlichen Bewegungen von Mond und Sonne in Länge, und MN gleich der stündlichen Bewegung des Mondes in Breite zu machen, — sodann durch L eine Parallele zu CN zu ziehen, — auf dieser von L aus die relative stündliche Bewegung CN des Mondes nach beiden Seiten wiederholt abzutragen, — und schliesslich jede solche einer

Stunde entsprechende Distanz noch weiter abzuteilen. Hierauf werden (entsprechend 469 : b) mit Hilfe eines um $r + \varrho$ geöffneten Zirkels die gleich bezifferten Punkte des Parallels und der Mondbahn aufgesucht, welche einer äussern Berührung oder dem Anfang und Ende der Finsternis entsprechen, — und ebenso die den kleinsten Abstand zeigenden und daher der Mitte der Finsternis entsprechenden Punkte mit Hilfe des Zirkels durch Versuch ermittelt. Verzeichnet man endlich aus letztern Punkten mit r und ϱ Sonne und Mond, so ergiebt sich auch noch die Grösse der Finsternis. — Aus einer unserer Hauptfigur entsprechenden, aber in etwa dreifachem Mass-Stabe ausgeführten Zeichnung (vgl. Verz. 32) erhielt ich seinerzeit die Resultate, dass die Sonnenfinsternis von 1860 VII 18 in Zürich um $2^h\ 24^m$ w. Z. = $2^h\ 30^m$ m. Z. beginnen, um $3^h\ 28^m$ w. Z. = $3^h\ 34^m$ m. Z. die Grösse von etwa $9\frac{1}{4}$ Sonnenzollen erreichen, und um $4^h\ 32^m$ w. Z. = $4^h\ 38^m$ m. Z. beendigt sein werde, — also ein gegenüber 474 gar nicht übles Resultat, welches wohl bei noch etwas grösserm Mass-Stabe und sorgfältigerer Zeichnung ganz mit dem Rechnungsergebnisse übereingestimmt hätte.

477. Die Ausnutzung der erhaltenen Rechnungsresultate und Beobachtungen. — Hat man für einen Ort die Zeiten berechnet, zu welchen unter gewissen Annahmen für die geographische Lage desselben und für die Coordinaten der in Frage kommenden Gestirne die verschiedenen Phasen der Erscheinung einzutreten haben, und sodann diese Zeiten auch durch Beobachtung bestimmt, so kann man die sich allfällig ergebenden Differenzen zur Prüfung oder Verbesserung einzelner der zur Vorausbestimmung verwendeten Elemente benutzen. So zeigt sich namentlich [a], dass sehr angenähert ein Fehler in der geographischen Länge auf die vorausberechnete Zeit der Mitte der Finsternis, und damit auch nahe in gleicher Weise auf die sämtlichen Phasenzeiten übergeht, und es kann somit, wie dies bereits **Kepler** für seine kritische Untersuchung der Ortstafeln mehrfach in Anwendung brachte [b], jene Vergleichung, wenn im übrigen die Fehler in den Tafeln und Rechnungsmethoden als verschwindend betrachtet werden dürfen, an Stelle einer Längenbestimmung Verwendung finden [c].

Zu 477: *a.* Beträgt die Länge des Ortes nicht l, wie für die Rechnung in 474 angenommen wurde, sondern $l + dl$, so entsprechen die für die Ephemeridenzeit $T - l$ berechneten Werte von A und D der Ortszeit $T + dl$, und müssen daher um $f \cdot dl$ und $g \cdot dl$ vermindert werden, wenn sie dennoch der Ortszeit T entsprechen sollen. Nun folgt aber aus 474 : 9'

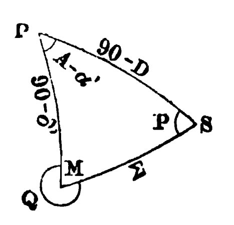
$$d\tau' = -(f \cdot dA + g \cdot dD) : (f^2 + g^2) \qquad 1$$

und hieraus ergiebt sich für $dA = -f \cdot dl$ und $dD = -g \cdot dl$ in der That $d\tau' = dl$, d. h. das oben ausgesprochene. — *b.* Obschon bereits einige Astronomen des Altertums einsahen, dass auch die Beobachtung von Sonnenfinsternissen für die Längenbestimmung nutzbar gemacht werden könnte, ja sogar genauere Resultate als diejenige der Mondfinsternisse ergeben dürfte, und später wieder **Mercator** (vgl. 320) hierauf zurückkam, so fehlten eben bis auf **Kepler** die hiefür nötigen Rechnungsmethoden, und so bleibt der von diesem

letztern (vgl. Ad Vitell. paral. pag. 392—95) gemachte Versuch, aus einer von ihm in Graz 1598 III 7 beobachteten Sonnenfinsternis und einer auf der Uranienburg durch einen Schüler Tychos gemachten korrespondierenden Beobachtung den Längenunterschied dieser beiden Punkte zu bestimmen, dennoch der Ausgangspunkt für diese Methode; dass Kepler dabei, zum Teil infolge einiger bei der numerischen Rechnung begangener Fehler, für diesen Unterschied 18^m, anstatt etwa 11^m, fand, thut nichts zur Sache, da sein Verfahren korrekt war. — *c.* Nachdem sodann Dom. **Cassini** sich etwa von 1661 hinweg ebenfalls mit dieser Methode befasst und namentlich (Mém. Par. 1700) aus der Sonnenfinsternis von 1699 IX 23, für welche er unter anderm von dem geschickten Beobachter Samuel **Reyher** (Schleusingen in Grafschaft Henneberg 1635 — Kiel 1714; Prof. math. et jur. Kiel; vgl. Weyer in A. N. 2527) korrespondierende Angaben erhielt, die Länge von Kiel und einigen andern Orten bestimmt hatte, und dann wieder durch die Abhandlung „**Grischow**, Détermination de la différence des Méridiens entre l'Observatoire de Paris et celui de Berlin (Mém. prés. 1750)" auf deren praktischen Wert aufmerksam gemacht worden war, wurde sie noch nebst der verwandten Längenbestimmung aus Sternbedeckungen (480) von der Akademie in Kopenhagen zum Gegenstande der Preisaufgabe für 1788 gewählt, und von den eingegangenen Arbeiten die von **Cagnoli** verfasste Abhandlung „Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil ou d'occultations d'étoiles. Vérone 1789 in 8." preisgekrönt. Seither hat sie nun allerdings an Wichtigkeit bedeutend verloren, da für Bestimmung der Meereslänge die Sonnenfinsternisse viel zu selten sind, und für Bestimmungen auf dem Lande weit bessere Mittel aufgefunden wurden.

478. Vorausberechnung der Sternbedeckungen. — Die Vorausberechnung der Sternbedeckungen durch den Mond kann natürlich ganz nach den gleichen Principien durchgeführt werden wie diejenige der Sonnenbedeckungen, — ja es treten sogar dafür noch wesentliche Vereinfachungen ein, da der scheinbare Radius des bedeckten Gestirnes nunmehr verschwindend klein ist und es sich nur um die Bestimmung der beiden Zeiten handeln kann, wo der Stern zu- und abgedeckt wird [a].

Zu 478: *a.* Bezeichnen A und D Rektascension und Deklination des Sternes zur Sternzeit t, ferner α, δ und α', δ' die gleichzeitigen geocentrischen und scheinbaren Coordinaten des Mondes, φ und φ' geographische und geocentrische Breite des Beobachters, ϱ dessen in Equatorradien ausgedrückte Entfernung vom Erdcentrum, r und r' endlich die scheinbaren Halbmesser des Mondes in Beziehung auf Erdcentrum und Beobachter, so folgen einerseits aus der Figur die Beziehungen



$$\text{Si}\,\Sigma : \text{Co}\,\delta' = \text{Si}\,(A - \alpha') : \text{Si}\,P \qquad 1$$

$$\text{Si}\,\Sigma \cdot \text{Co}\,P = \text{Si}\,\delta' \cdot \text{Co}\,D - \text{Co}\,\delta' \cdot \text{Si}\,D \cdot \text{Co}\,(A - \alpha') \qquad 2$$

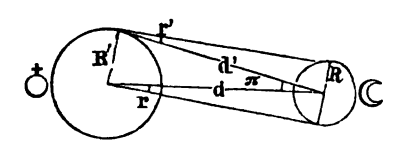
und macht man anderseits in den Transformationsformeln 93 die (nach 435) dem Equator entsprechenden Substitutionen mit der einzigen Abänderung, dass man (um sich auf den Deklinationskreis des Sternes, anstatt auf den

Colur der Nachtgleichen zu beziehen) die Grössen w, w' und W durch $A-\alpha$, $A-\alpha'$ und $A-t$ ersetzt, so erhält man

$$\Delta \cdot \mathrm{Si}\,\delta' = \mathrm{Si}\,\delta - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Si}\,\varphi' \qquad 3$$

$$\Delta \cdot \mathrm{Co}\,\delta' \cdot \mathrm{Si}\,(A-\alpha') = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(A-\alpha) - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A-t) \qquad 4$$

$$\Delta \cdot \mathrm{Co}\,\delta' \cdot \mathrm{Co}\,(A-\alpha') = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,(A-\alpha) - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(A-t) \qquad 5$$



wo Δ das Verhältnis der Entfernungen des Mondes von Beobachter und Erdcentrum, π aber die Equatorealhorizontalparallaxe des Mondes bezeichnet. Ferner ist

$$R = d' \cdot \mathrm{Si}\,r' = d \cdot \mathrm{Si}\,r$$

also $\quad \Delta = d' : d = \mathrm{Si}\,r : \mathrm{Si}\,r' \qquad 6$

Substituiert man nun aus 3—5 in 1 und 2, so erhält man

$$\Delta \cdot \mathrm{Si}\,\Sigma \cdot \mathrm{Si}\,P = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(A-\alpha) - \varrho\,\mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A-t) \qquad 7$$

$$\Delta \cdot \mathrm{Si}\,\Sigma \cdot \mathrm{Co}\,P = \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(A-\alpha) - \\ - \varrho \cdot \mathrm{Si}\,\pi\,[\mathrm{Si}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(A-t)] \qquad 8$$

Für den Anfang oder das Ende einer Sternbedeckung ist aber $\Sigma = r'$, also, wenn (232) $k = 0{,}2725$ das Verhältnis von Mond- und Erdradius bezeichnet, mit Hilfe von 6

$$\Delta \cdot \mathrm{Si}\,\Sigma = \Delta \cdot \mathrm{Si}\,r' = \mathrm{Si}\,r = R : d = R \cdot \mathrm{Si}\,\pi : R' = k \cdot \mathrm{Si}\,\pi \qquad 9$$

und hiefür gehen 7 und 8 in

$$k \cdot \mathrm{Si}\,P = \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,(A-\alpha) : \mathrm{Si}\,\pi - \varrho \cdot \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A-t) = I - \varrho \cdot II$$

$$k \cdot \mathrm{Co}\,P = [\mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(A-\alpha)] : \mathrm{Si}\,\pi - \\ - \varrho\,[\mathrm{Si}\,\varphi' \cdot \mathrm{Co}\,D - \mathrm{Co}\,\varphi' \cdot \mathrm{Si}\,D \cdot \mathrm{Co}\,(A-t)] = III - \varrho \cdot IV \qquad 10$$

über, woraus durch Quadrieren und Addieren

$$k^2 = [I - \varrho \cdot II]^2 + [III - \varrho \cdot IV]^2 \qquad 11$$

folgt. — Für eine Zeit T, welche der gesuchten Zeit $T + \tau$ des Eintrittes oder Austrittes des Sternes nahe liegt, sei

$$I = p \qquad III = q \qquad \varrho \cdot II = u \qquad \varrho \cdot IV = v \qquad 12$$

während die Werte derselben Grössen für die Zeit $T + \tau$ durch $p + p' \cdot \tau$, $q + q' \cdot \tau$, $u + u' \cdot \tau$ und $v + v' \cdot \tau$ ausgedrückt werden mögen. Für diese Annahmen geht 11 in

$$k^2 = [p - u + (p' - u') \cdot \tau]^2 + [q - v + (q' - v') \cdot \tau]^2$$

über, oder, wenn man noch

$$p - u = m \cdot \mathrm{Si}\,M \qquad q - v = m \cdot \mathrm{Co}\,M \qquad p' - u' = n \cdot \mathrm{Si}\,N$$
$$q' - v' = n \cdot \mathrm{Co}\,N \qquad m \cdot \mathrm{Si}\,(M - N) = k \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad 13$$

setzt, in

$$k^2 = m^2 + n^2 \cdot \tau^2 + 2\,m \cdot n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \qquad 14$$

woraus

$$n \cdot \tau = -m \cdot \mathrm{Co}\,(M - N) \pm k \cdot \mathrm{Si}\,\psi \qquad 15$$

folgt, wo das obere Zeichen offenbar für den später eintreffenden Austritt, das untere für den Eintritt zu wählen ist. Führt man die Werte 12 und 13 auch in 10 ein, so erhält man endlich mit Benutzung von 15

$$k \cdot \mathrm{Si}\,P = p - u + (p' - u') \cdot \tau = m \cdot \mathrm{Si}\,M + n\tau \cdot \mathrm{Si}\,N = k \cdot \mathrm{Co}\,(N \mp \psi)$$

$$k \cdot \mathrm{Co}\,P = q - v + (q' - v') \cdot \tau = m \cdot \mathrm{Co}\,M + n \cdot \tau \cdot \mathrm{Co}\,N = -k \cdot \mathrm{Si}\,(N \mp \psi)$$

so dass $\quad P = 90^0 + N \mp \psi \quad$ und somit $\quad Q = 270^0 + N \mp \psi \qquad 16$

folgt, wo wieder das obere Zeichen für den Austritt, das untere für den Eintritt gilt. — Für andere Methoden zur Vorausberechnung auf die früher (namentlich 469) aufgeführte Litteratur verweisend, erwähne ich hier noch speciell die beiden Abhandlungen „**Bessel**, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen (A. N. 145 von 1828 und Berl. Jahrb. 1831), — und: **Encke**, Über die Vorausberechnung der Sternbedeckungen (Berl. Jahrb. 1830—31)", von welchen die letztere noch um so wichtiger ist, als das Berliner Jahrbuch nachher lange Jahre die darauf gestützt für Berlin vorausberechneten Sternbedeckungen und überdies Hilfstafeln enthielt, um die für andere Orte eintretenden Modifikationen leicht zu ermitteln.

479. Graphische Methoden. — Auch die graphischen Methoden für Vorausbestimmung der sog. Sonnenfinsternisse lassen sich auf die Sternbedeckungen in entsprechend vereinfachter Gestalt übertragen [a].

Zu 479: *a.* Es dürfte kaum nötig sein, dies hier eingehend nachzuweisen und auszuführen; dagegen erwähne ich noch zur etwelchen Vervollständigung der Speciallitteratur: „J. J. **Waterston**, On a graphical method of predicting occultations (Monthly Not. 1845), — F. C. **Penrose**, On a method of predicting by graphical construction occultations of stars by the moon, and solar eclipses. London 1869 in fol., — A. **Tissot**, Sur l'emploi des méthodes graphiques dans la prédiction des occultations (Compt. rend. 1877), — etc."

480. Ausnutzung der Beobachtungen. — Die Sternbedeckungen können natürlich in ähnlicher Weise wie die Sonnenfinsternisse zur Längenbestimmung benutzt werden, und da sich zudem viel häufiger solche ereignen, so war sogar ihre Beobachtung in früherer Zeit eines der allerbeliebtesten Mittel zu diesem Zwecke [a], — zumal es mehrere Astronomen gab, welche es sich zu einer Hauptaufgabe machten, alle bei ihnen einlaufenden Beobachtungen sofort zur Ortsbestimmung zu verwerten [b].

Zu 480: *a.* Schon **Menelaus** beobachtete (vgl. Almagest Halma II 27) zu Rom im Jahre 845 von Nabonnassar (oder 98 n. Chr.) die Bedeckung eines Sternes im Skorpion durch den Mond; dagegen ist die Angabe von Peschel (Gesch. 44), es habe **Ptolemäus** diese Beobachtung zu einer geographischen Längenbestimmung benutzt, unrichtig, — er benutzte dieselbe gegenteils zur Bestimmung der Länge des bedeckten Sternes. Nach Humboldt (Examen critique, Ed. in fol. p. 475) war Amerigo **Vespucci**, welcher von 1499 hinweg die Sternbedeckungen zu geographischen Zwecken beobachtete, der Erste, welcher diese Methode anwandte, und dann scheint allerdings bald darauf auch **Werner** dieselbe empfohlen zu haben. Grössere Bedeutung konnte sie jedoch nur nach Erstellung etwas zuverlässiger Mondtafeln erhalten, und so wurde sie eigentlich erst vom 18. Jahrhundert hinweg weiter ausgebildet, wofür auf die Specialschriften „J. **Cassini**, Méthode de déterminer les longitudes des lieux de la Terre par les éclipses des étoiles fixes et des planètes par la Lune (Mém. Par. 1703), — L. **Euler**, Méthode de déterminer la longitude des lieux par l'observation d'occultations des étoiles fixes par la Lune (Mém. Berl.

1747), — Fr. v. **Zach**, Beiträge zu geographischen Längenbestimmungen aus Fixstern-Bedeckungen (Mon. Corr. 1809—12), — Edward **Riddle** (Troughend in Northumberland 1788 — Greenwich 1854; Vorsteher von Schulen in Newcastle und Greenwich), On finding the longitude from an observed occultation of a fixed star by the Moon (Mem. Astr. Soc. 1831), — etc.“ verwiesen wird. — *b.* Unter diesen selbstlosen astronomischen Rechnern verdienen namentlich Fr. **Triesnecker** und J. Fr. **Wurm** dankbare Erwähnung.

Einige Zusätze und Berichtigungen.

36 (zu 3): Vgl. „J. **Epping**, Astronomisches aus Babylon. Freiburg i./B. 1889 in 8., — und: P. **Jensen**, Die Kosmologie der Babylonier. Strassburg 1890 in 8.“

37 (zu 4): Von den Schriften des **Aristoteles** hebe ich seine 8 Bücher über Physik und seine 4 Bücher über das Himmelsgebäude hervor, welche z. B. Karl **v. Prantl** (Landsberg 1820 geb.; Prof. philos. München) zu Leipzig 1854—57 in 8. griechisch und deutsch herausgab. Sodann seine Schrift „De generatione animalium“, welche den denkwürdigen Ausspruch „Noch sind die Erscheinungen nicht hinlänglich erforscht; wenn sie es aber dereinst sein werden, alsdann ist **der Wahrnehmung mehr zu trauen als der Spekulation, und letzterer nur insoweit als sie mit den Erscheinungen Übereinstimmendes giebt**“ enthält, welchen seine verbissensten Anhänger gerade am allerwenigsten berücksichtigten.

38 (zu 5): Der Litteratur füge ich bei: „F. E. **Hall**, The Surja-Siddhanta. Calcutta 1854 in 8., — und: E. **Burgess**, Translation of the Surja-Siddhanta. New-Haven 1860 in 8. (vgl. J. B. Biot in Journ. d. Sav. 1860).“

39 (zu 6): Es ist zu verbessern, dass **Walafried** (genannt Strabo oder Strabus) von 806 bis 849 lebte. — Enrico **Narducci** (Rom 1832 geb.) ist Bibliothekar in Rom.

40 (zu 8): Vgl. „Joh. Ludwig Emil **Dreyer** (Kopenhagen 1852 geb.; Dir. Obs. Armagh), Tycho Brahe. Edinburgh 1890 in 8. — Ludwig **Häpke** (Bassum bei Bremen 1835 geb.) ist Lehrer in Bremen.

41 (zu 9): In seiner „Institutio“ wagte **Gassendi** nicht, sich zum Coppernicanischen Systeme zu bekennen, und soll einmal gesagt haben: „Il est contraire à l'écriture; en conséquence et pour obéir, je me vois contraint de donner la palme à Tycho“. Auch **Scheiner** sprach sich in seinem „Prodromus (vgl. meine Sonnenfl. Litt. 660)“ gegen dasselbe aus; vgl. für ihn „Anton **v. Braunmühl**, Christoph Scheiner. Bamberg 1891 in 8.“

42 (zu 12): Der Litteratur sind beizufügen: „**Lalande**, Abrégé d'astronomie. Paris 1774 in 8. (auch später und in verschiedenen Sprachen), und: Traité du flux et du reflux de la mer. Paris 1781 in 4. (auch für die 3. éd. giltiger Hauptteil des damals erschienenen Supplementbandes zur 2. éd. der Astronomie), — Gottlieb Friedrich **Rösler** (Stuttgart 1740 — ebenda 1790; Prof.

math. et phys. Stuttgart), Handbuch der praktischen Astronomie. Tübingen 1788 in 8., — Abel **Bürja** (Kikebusch bei Berlin 1752 — Berlin 1816; Prof. math. Berlin), Lehrbuch der Astronomie. Berlin 1794—1806, 5 Bde. in 8., — **Voiron**, Histoire de l'astronomie depuis 1881. Paris 1810 in 4. (als Fortsetzung von Bailly zu betrachten), — Gottlieb Leberecht **Schulze** (Hirschfeld 1779 — Dresden 1856; Kirchen- und Schulrat Dresden), Darstellung des Weltsystemes. Leipzig 1811 in 8. (2. A. 1821), — Johann **Pasquich** (Wien 1753 — ebenda 1829; Priester; Prof. math. und Dir. Obs. Ofen), Epitome elementorum astronomiæ sphærico-calculatoriæ. Viennæ 1811, 2 Vol. in 4., — etc."

43 (zu 13): G. B. **Airy** starb 1892 zu London. Wolfgang **Sartorius** von Waltershausen (Göttingen 1809 — ebenda 1876) war Prof. min. et geol. Göttingen. — Der Litteratur füge ich bei: „Jeremias David **Reuss** (Rendsburg 1750 bis Göttingen 1837; Bibliothekar Göttingen), Repertorium commentationum a societatibus litterariis editarum. Gottingæ 1801—21, 16 Vol. in 4. (Vol. 5 ist speciell der Astronomie gewidmet), — Em. **Develey**, Cours élémentaire d'astronomie. Lausanne 1833 in 8. (2 éd. 1835), — R. **Engelmann**, Recensionen von F. W. Bessel. Leipzig 1878 in 8. — Die Erudition, welche **Delambre**, der sehr sprachengewandt war und für welchen die längsten analytischen Entwicklungen oder numerischen Rechnungen als Erholung galten, in seiner Geschichte entwickelt, ist geradezu fabelhaft; dagegen wird er allerdings, sowohl in dieser als in seiner Astronomie, sehr oft ausserordentlich weitschweifig und vergisst vor lauter Rechnerei gar vieles zu sagen, was man in so dickleibigen Werken mit Recht zu finden hofft, und **Gauss** fürchtete sogar (vgl. Brief an Schumacher vom Herbst 1814), es werde letzteres Werk, das kaum etwas Trigonometrie voraussetze, nur „astronomische Taglöhner und keine Astronomen" bilden.

44 (zu 14): Zur Berichtigung erwähne ich, dass **Chauvenet** 1820 (nicht 1819) zu Milford geboren wurde, wo sein aus Narbonne stammender Vater eine kleine Farm besass, — dass **Herr** früher in Graz (nicht in Prag) Prof. math. war, — und dass der Herausgeber von Angers Vorträgen **Zaddach** (nicht Zadbach) hiess. — **Adams** starb 1892 zu Cambridge, — **Brünnow** 1891 zu Heidelberg, — und **Schönfeld** 1891 zu Bonn. — Friedrich Wilhelm **Looff** (Magdeburg 1808 — Langensalza 1889) war lange Jahre Schuldirektor in Gotha. — Maximilien **Marie** (Paris 1819 geb.) war früher Examinator bei der Ecole polytechnique. — Albert-Benoît-Marie **Lancaster** (Mons in Belgien 1849 geb.) ist Bibliothekar der Sternwarte in Brüssel. — Die 1865 gegründete „Deutsche astronomische Gesellschaft" begann sofort mit „Publicationen", welchen sich im folgenden Jahre auch noch eine „Vierteljahrsschrift" anschloss. — Der Litteratur füge ich bei: „**Sédillot**, Matériaux pour servir à l'histoire comparée des sciences mathématiques chez les Grecs et les Orientaux. Paris 1848—49, 2 Vol. in 8., — Olry **Terquem** (Metz 1782 — Paris 1862; Bibliothekar Paris), Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématique (von 1855 bis zu seinem Tode als Suppl. der Nouv. Annal. de Math. erschienen), — Ribeiro de **Sousa Pinto**, Elementos de astronomia. Coimbra 1860, 2 Vol. in 8., — George F. **Chambers**, A handbook of descriptive and practical astronomy. London 1861 in 8. (4. ed. Oxford 1889, 3 Vol.), — Ch. A. **Young**, A textbook of general astronomy. Boston 1888 in 8., — Florian **Cajori**, The teaching and history of mathematics in the United States. Washington

1890 in 8., — und: Charl. **Wolf**, Astronomie et géodésie. Cours professé à la Sorbonne. Paris 1891 in 8.

45 (zu 25): Für die Wahl der Logarithmentafel kann man sich an die Regel halten, dass die Mantissen ebensoviele Stellen haben sollen als Zahlstellen berücksichtigt werden müssen. — Nach „W. **Cudworth**, Life and correspondence of Abr. Sharp. London 1889 in 4." wurde **Sharp** 1653 (nicht 1651) geboren.

46 (zu 26): Der Arithmometer von **Thomas** soll sich von der 1770—76 durch Philipp Matthäus **Hahn** (Scharnhausen in Würtemberg 1739 — Echterdingen 1790; Pfarrer in Echterdingen) ausgedachten und noch von dessen Sohne wiederholt ausgeführten Rechenmaschine wesentlich nur durch eine, ein rascheres Arbeiten erlaubende Anordnung unterscheiden.

47 (zu 33): Für die **Determinanten**, an welche schon **Leibnitz** dachte, aber die erst G. **Cramer** wirklich einführte, verweise ich auf die Specialschriften von Fr. **Brioschi** (Pavia 1854), R. **Baltzer** (Leipzig 1857, 4. A. 1875), S. **Günther** (Erlangen 1875), G. **Dostor** (Paris 1877), — etc."

48 (zu 52): Bemerkenswert ist, dass Robert **Adrain** (Dublin 1780? — New-York 1843; Autodidakt, der 1798 expatriierte; Prof. math. New-Brunswick und New-York) schon in der Abhandlung „Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations (The Analyst, Vol. I von 1808)" das zwar damals von **Gauss** bereits aufgestellte, aber noch nicht publizierte Fehlergesetz ableitete, und auch entsprechend **Legendre**, dessen wenig frühere Publikation ihm wohl schwerlich bekannt war, das Zusammenfallen der wahrscheinlichsten Lage mit dem Schwerpunkte erkannte. Vgl. auch seine spätere „Investigation of the figure of the earth and of the gravity in different latitudes (Trans. Amer. Phil. Soc. I von 1818)". — Der Litteratur füge ich bei: „Robert **Ellis** (Bath in Somerset 1817 geb.; Fellow Trinity College Cambridge), On the method of least squares (Trans. Cambridge VIII von 1844), — James Whitbread Lee **Glaisher** (Lewisham in Kent 1848 geb.; Sohn von James in 598; Senior tutor of Trinity College Cambridge), On the law of facility of errors of observations, and on the method of least squares (Mem. Astr. Soc. 39 von 1872), — Mansfield **Merriman**, A list of writings relating to the method of least squares (Trans. Connecticut Acad. IV von 1877), — und: Emmanuel **Czuber** (Prag 1851 geb.; Prof. math. Brünn), Theorie der Beobachtungsfehler. Leipzig 1891 in 8." — Endlich trage ich nach, dass Angelo **Forti** (Pesaro 1818 geb.) Prof. math. Pisa ist, — Friedrich Gustav **Gauss** (Bielefeld 1829 geb.) Generalinspektor des k. preussischen Katasters, — und Christian August **Vogler** (Wiesbaden 1841 geb.) Prof. geod. Bonn.

49 (zu 53): Der Litteratur füge ich bei „Justus Günther **Grassmann** (Linzlow bei Stettin 1779 — Stettin 1852; Prof. math. Stettin), Raumlehre. Berlin 1817—24, 2 Th. in 8.", sowie die weiter ausbauenden Schriften seiner Söhne „Hermann Günther **Grassmann** (Stettin 1809 — ebenda 1877; Prof. math. Stettin), Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844 in 8, — und: Robert **Grassmann**, Die Ausdehnungslehre. Stettin 1891 in 8."

50 (zu 60): Vgl. „Ferdinand **Rudio** (Wiesbaden 1856 geb; Prof. math. Zürich), Das Problem von der Quadratur des Zirkels (Zürcher. Viertelj. 35 von 1890)."

51 (zu 70): Bezeichnet w den äussern Winkel, welchen die Tangente am Punkte der Polarcoordinaten (r, v) mit r bildet, so erhält man nach den zu 1 führenden Principien

$$\text{Tg}\, w = -r \cdot dv : dr \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\,(90 - w) = -dr : (r \cdot dv) \qquad \mathbf{9}$$

Hieraus folgen, wenn w nahe an 90° fällt, die Winkel in Minuten ausgedrückt und die Formeln 39 : 7 und 41 : 3 benutzt werden,

$$(90 - w) \cdot \text{Si}\, 1' \doteq -\frac{dr}{r \cdot dv \cdot \text{Si}\, 1'} \qquad \text{wo} \qquad \frac{dr}{r} = \text{Ln}\, 10 \cdot d\, \text{Lg}\, r$$

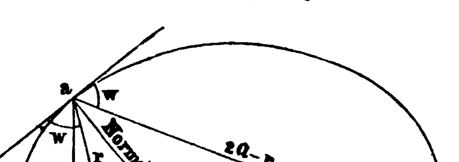
so dass in diesem Specialfalle

$$w \doteq 90^\circ + \frac{\text{Ln}\, 10}{\text{Si}^2\, 1'} \cdot \frac{d\,\text{Lg}\, r}{dv} = 90^\circ + \overline{7{,}4348} \cdot \frac{d\,\text{Lg}\, r}{dv} \qquad \mathbf{10}$$

52 (zu 71): Der von **Oppikofer** 1822/3 (nicht erst 1826) erfundene Planimeter wurde zuerst durch Johannes **Pfäffli** (Signau 1802 — Bern 1828; Mech. Bern), dann durch Heinrich Rudolf **Ernst** (Bern 1808 — Boulogne 1863; Mech. Bern und Paris) wirklich ausgeführt. Etwa 1849 hatte sodann Kaspar **Wetli** (Männedorf 1822 — Zürich 1889; Ingenieur) die glückliche Idee, den anfänglich nur $9^1/_2$° betragenden Kegelwinkel auf 90° zu erhöhen, und noch später wurden durch **Hansen**, **Starke**, etc. verschiedene konstruktive Verbesserungen eingeführt. Vgl. „S. **Stampfer**, Über das neue Planimeter von Wetli. Wien 1850 in 8., — **Bauernfeind**, Die Planimeter von Ernst, Wetli und Hansen. München 1853 in 8., — etc." — Nach **Bauernfeind** (Vermessungskunde 3. A. 553) wurde das Polarplanimeter, ziemlich gleichzeitig mit und unabhängig von Amsler, auch durch Joh. Leopold **Schmidt** (Wien 1826 geb.; damals Bergmeister in Leoben, später Docent für Maschinenbau zu Przibram) erfunden.

53 (zu 74): Nach 1'' ist

$$r \cdot \text{Co}\, v = [a\,(1 - e^2) - r] : r$$



folglich mit Hilfe von 4

$$b f_1 = \frac{r^2\,(1 - \text{Co}^2\, v)}{(1 - e^2) \cdot r \cdot \text{Co}\, v} + r \cdot \text{Co}\, v = \frac{a \cdot r \cdot e}{a - r} \qquad \mathbf{26}$$

$$f_1 e = (1 - e^2)\,(a \cdot e + r \cdot \text{Co}\, v) - (r \cdot \text{Co}\, v) = e \cdot r \qquad \mathbf{27}$$

und es ergeben sich somit aus den Dreiecken $a\,b\,f_1$, $f_1\,a\,e$ und $f_1\,a\,f_2$ die Proportionen

$$\text{Si}\,(w + v) : \text{Si}\, w = a f_1 : b f_1 = (a - r) : a \cdot e \qquad \mathbf{28}$$

$$-\text{Co}\,(w + v) : \text{Co}\, w = a f_1 : e f_1 = 1 : e \qquad \mathbf{29}$$

$$\text{Si}\, 2w : \text{Si}\, v = f_1 f_2 : a f_2 = 2a \cdot e : (2a - r) \qquad \mathbf{30}$$

so dass man z. B., wenn α, r, w bekannt sind, aus 28:29 den Winkel v und sodann aus 30 auch e berechnen kann, wovon wir in 570 Gebrauch machen werden.

54 (zu 78): Es ist beizufügen „**Ligowski**, Tafeln der Hyperbelfunktionen und der Kreisfunktionen. Berlin 1890 in 8.", — ferner dass Christoph **Gudermann** (Winneburg bei Hildesheim 1798 — Münster 1852) Prof. math. Münster war, und Charles-Ange **Laisant** (Basse-Indre 1841 geb.) Militär und Deputierter ist.

55 (zu 114): Bezeichnet m die Masse der Volumeneinheit, so ist diejenige eines geraden und homogenen Hohlcylinders der Radien x und (x + dx) und der Höhe h gleich $[(x+dx)^2 - x^2] \cdot \pi \cdot h \cdot m \fallingdotseq 2h \cdot \pi \cdot m \cdot x \cdot dx$, also stellt $2h \cdot \pi \cdot m \cdot x^3 \cdot dx$ dessen Trägheitsmoment in Beziehung auf die Cylinderaxe, und somit

$$M = 2h \cdot \pi \cdot m \cdot \int_0^r x^3 \cdot dx = \frac{1}{2} h \cdot \pi \cdot m \cdot r^4 \qquad \mathbf{16}$$

das entsprechende Trägheitsmoment eines Vollcylinders des Radius r vor. Hieraus ergiebt sich aber leicht das Trägheitsmoment einer Kugel in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser; denn schneidet man dieselbe in den Distanzen x und (x + dx) vom Mittelpunkte durch zwei zu dem Durchmesser senkrechte Ebenen, und ist $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ der Radius des für x erhaltenen Parallelkreises, so ist nach 16 das Trägheitsmoment des herausgeschnittenen Kugelstückes gleich $\frac{1}{2} dx \cdot \pi \cdot m \cdot y^4$, und somit dasjenige der ganzen Kugel

$$M = \frac{1}{2} m \cdot \pi \cdot \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^2 \cdot dx = \frac{8}{15} m \cdot \pi \cdot r^5 \qquad \mathbf{17}$$

Teilt man diesen Wert durch die $\frac{4}{3} r^3 \cdot \pi \cdot m$ betragende Kugelmasse, so erhält man einen Quotienten

$$z^2 = \frac{2}{5} r^2 \qquad \text{woraus} \qquad z \fallingdotseq 0,63 \cdot r \qquad \mathbf{18}$$

folgt, und es hat daher ein in letzterm Abstande vom Durchmesser befindlicher Punkt, wenn man ihm die Kugelmasse zuteilt, ein ebenso grosses Trägheitsmoment als die ganze Kugel, so dass er ein sog. **Trägheitspunkt** ist.

56 (zu 117): Der Litteratur füge ich bei: „Th. **Young**, A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts. London 1807, 2 Vol. in 4., — Wilhelm **Eisenlohr** (Pforzheim 1799 — Karlsruhe 1872; Prof. phys. Karlsruhe), Lehrbuch der Physik. Mannheim 1836 in 8. (11. A. 1876), — Victor **Lang** (Wiener-Neustadt 1838 geb.; Prof. phys. Wien), Einleitung in die theoretische Physik. Braunschweig 1867—73 in 8. (2. A. 1891), — Emil-Léonard **Mathieu** (1834 geb. — Nancy 1890; Prof. math. Nancy), Cours de physique mathématique. Paris 1873 in 4.), — J. **Chappuis** et A. **Berget**, Leçons de physique générale. Paris 1891—92, 3 Vol. in 8., — und: E. **Gerland**, Geschichte der Physik. Leipzig 1892 in 8." Ferner trage ich nach, dass William **Thomson** (Belfast 1824 geb.) Prof. phys. Glasgow, Peter Guthrie **Tait** (Dalkeith 1831 geb.) Prof. Nat. Philos. Edinburgh, und August **Heller** (Budapest 1843 geb.) Prof. phys. Budapest ist.

57 (zu 121): Während (114) k den Abstand des Trägheitspunktes in Beziehung auf die durch M gelegte Parallele zu Z bezeichnet, mag K die

entsprechende Bedeutung für Z selbst besitzen, so dass nach 4 und 6

$$M \cdot K^2 = M \cdot (a^2 + k^2) \qquad \text{oder} \qquad K^2 = a \cdot l \qquad \mathbf{13}$$

somit in Beziehung auf die Drehaxe **der Abstand des Trägheitspunktes das geometrische Mittel aus den Abständen von Schwerpunkt und Schwingungspunkt** ist, folglich (da a durch Auflegen des Pendelkörpers auf eine Schneide, oder mit dem Apparate von Repsold bestimmt, l aus der beobachteten Schwingungsdauer nach 120:2 berechnet werden kann) leicht gefunden wird, wie dies **Autenheimer** noch kürzlich (Schweiz. Bauz. 1891) hervorhob. — Der Näherungsformel 120:2 für das mathematische Pendel entsprechen nach 6 und 13 beim physischen Pendel die Formeln

$$t = \pi \cdot \sqrt{(a^2 + k^2) : (a \cdot g)} = K \cdot \pi : \sqrt{a \cdot g} = \pi \cdot \sqrt{J : (a \cdot g \cdot M)} \qquad \mathbf{14}$$

wo J das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Drehaxe bezeichnet.

58 (zu 123): Unter den Uhrmachern des vorigen Jahrhunderts sind z. B. noch Joh. Georg **Enderli** (vgl. 494), Joh. Konrad **Pfenninger** (Zürich 1725 — ebenda 1797; Uhrmacher in Kassel, wo er als zweiter Bürgi galt, und Zürich, zuletzt Landvogt in Eglisau), und Henry **Sully** (vgl. 409 und seine „Description d'une horloge pour la juste mesure du temps sur mer. Paris 1726 in 4.") zu erwähnen, — der Litteratur „George **Maurice** (Genève 1799 — Nizza 1839; Prof. phys. Genf), Discours sur l'histoire de la mesure du temps. Genève 1831 in 8., — J. H. **Martens**, Beschreibung der Hemmungen der höhern Uhrmacherkunst. Furtwangen 1858 in 8., — und: Eugen **Gelcich**, Die Uhrmacherkunst und die Behandlung der Präcisionsuhren. Wien 1891 in 8." beizufügen.

59 (zu 127): Ich trage nach, dass Joh. Karl **Prediger** (Klausthal 1822 geb.) Prof. math. Klausthal, — Moritz Richard **Rühlmann** (Dresden 1846 geb.) Gymnasialprof. in Chemnitz ist.

60 (zu 129): Ich füge bei, dass Wilhelm **Weber** 1891 zu Göttingen starb, und neuerlich „L. A. **Zellner**, Vorträge über Akustik. Wien 1892, 2 Bde. in 8." ausgegeben wurde.

61 (zu 130): Ich trage nach, dass Edmond **Becquerel** 1891 zu Paris starb, und Elie-Nicolas **Mascart** (Quarouble in Nord 1837 geb.) Prof. phys. und Akad. Paris ist. Der Litteratur ist beizufügen „Ad. **Steinheil** und E. **Voit**, Handbuch der angewandten Optik. I. Leipzig 1891 in 8."

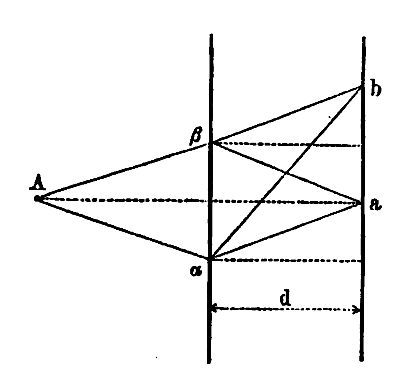
62 (zu 133): Aus einem in „Gerold **Meyer von Knonau** (Zürich 1843 geb.; Prof. hist. Zürich), Lebensbild des heil. Notker von St. Gallen. Zürich 1877 in 4." reproduzierten Bilde, welches sich in einem dem 9. Jahrhundert angehörenden Codex der St. Galler Stiftsbibliothek erhalten hat, geht unzweifelhaft hervor, dass man damals auch in St. Gallen vom Tubus Gebrauch machte.

63 (zu 141): Ich trage nach, dass Heinrich Friedrich Ludwig **Matthiessen** (Fissau bei Eutin 1830 geb.) Prof. phys. Rostock ist, — und Joh. Benedikt **Listing** 1882 zu Göttingen starb.

64 (zu 146): Während **Bouguer** (und später Foucault) die zu vergleichenden Lichtquellen so lange verschob, bis sie die zwei durch eine Wand getrennten Hälften eines (am besten durchscheinenden) Blattes gleich stark erleuchteten, glich **Lambert** (wie später Rumford) die von einem Stabe geworfenen Schatten aus, und es besitzen diese beiden Verfahren noch

jetzt einen gewissen Wert; dagegen war der Vorschlag von **Lampadius**, abzuzählen, wie viele durchsichtige Scheibchen eine Lichtquelle unsichtbar machen, nicht sehr glücklich. Für andere Verfahren und überhaupt für das ganze Gebiet vgl. „Adrien **Palaz** (Riez bei Cully 1863 geb.; Prof. math. Lausanne), Traité de Photométrie industrielle. Paris 1892 in 8.“

65 (zu 148): Als Th. **Young** von einem Punkte A aus homogenes Licht durch zwei enge Öffnungen α und β in einen dunkeln Raum treten liess, so zeigten sich auf einem entgegengehaltenen weissen Schirme regelmässige Folgen von hellen und dunkeln Streifen, — genau wie es erfolgen muss, wenn das Licht in einer Wellenbewegung besteht, und sich somit nach dem Durchgange durch α und β nach allen Richtungen ausbreitet: Nehmen wir nämlich z. B. an, es liege β vertikal über α, so wird es auf dem Schirme eine Horizontale geben, deren Punkte a von α und β gleichen Abstand haben, während jedem andern Punkte b, wenn $\alpha\beta = c$ und $ab = e$ ist, eine Wegdifferenz



$$\alpha b - \beta b = \sqrt{(e + {}^1\!/_2\, c)^2 + d^2} - \sqrt{(e - {}^1\!/_2\, c)^2 + d^2} \fallingdotseq \frac{e \cdot c}{d} \qquad 1$$

entspricht. Während somit die bei a zusammentreffenden Strahlen gleiche Wege durchlaufen haben, folglich sich nach der Wellenlehre verstärken und also $e = 0$ eine helle Stelle entspricht, so nimmt mit e auch die Wegdifferenz und damit die Schwächung des Lichtes fortwährend zu, bis jene für einen gewissen Wert e' gleich der Hälfte der Wellenlänge λ wird, also eine vollständige Interferenz oder eine dunkle Stelle entsteht. Misst man somit e', so kann man nach der aus 1 folgenden Formel

$$\lambda = 2 \cdot e' \cdot c : d \qquad 2$$

die Länge der Wellen des angewandten Lichtes wirklich berechnen, und so erhielt **Fresnel**, indem er durch Vorsetzen eines roten Glases das Licht einer Flamme homogen machte, $\lambda = 0{,}67^{\mu}$ oder, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes (467) zu 300000^{km} angenommen wird, auf eine Sekunde die enorme Anzahl von $300000^{km} : 0{,}67^{\mu} \fallingdotseq 448$ Billionen sich folgender Wellen. Entsprechend lassen sich auch die Wellenlängen anderer Farben messen; jedoch erhält man sie, wie schon **Fraunhofer** zeigte, noch bequemer und genauer, wenn man sog. „Gitterspektra“ erzeugt und die Messungen auf die nach ihm benannten Linien bezieht. — Zum Untersuchen eines Lichtstrahles auf seine Polarisation dient meistens ein von William **Nicol** (1768? bis 1851; Prof. phys. Edinburgh) aus zwei Doppelspathen kombiniertes und 1828 in Jamesons philos. Journal beschriebenes, seinen Namen tragendes Prisma: Enthält das auffallende Licht keine polarisierten Strahlen, so hat eine Drehung des Nicol keinen Einfluss, — ist es dagegen gemischt, so variiert die Intensität während derselben, — und findet sich eine Stellung, wo letztere unmerklich wird, so ist das polarisierte Licht zum mindesten weit überwiegend.

66 (zu 152): Ich trage nach, dass Joh. Georg **Greiner** (Russhütte in Thüringen 1788 — Berlin 1860) Mechaniker in Berlin, — Rudolf **Hottinger** (Meilen 1834 — Zürich 1883; Tochtermann und Geschäftsnachfolger von Goldschmid in 128) Ingenieur und Mechaniker in Zürich war, — und Hermann **Suhle** (Potsdam 1830 geb.) Prof. math. et phys. Bernburg ist. Ferner verweise ich auf „Richard **Assmann** (Magdeburg 1845 geb.; Oberbeamter am meteor. Inst. Berlin), Das Aspirations-Psychrometer, ein neuer Apparat zur Ermittlung der wahren Temperatur und Feuchtigkeit der Luft (in „Das Wetter“ 1887 u. f.)“.

67 (zu 154): Schon Tob. **Mayer** lehrte um 1760, dass die Quadrate der Schwingungszahlen magnetischer Nadeln ein Mass für die örtliche Stärke (Intensität) des Erdmagnetismus geben. — Vgl. auch „J. **Liznar**, Anleitung zur Messung und Berechnung der Elemente des Erdmagnetismus. Wien 1883 in 8.“

68 (zu 158): Joh. Georg **Halske** (Hamburg 1814 — Berlin 1890) gründete 1844 in Berlin eine mechanische Werkstätte, in welche Werner **Siemens** 1847 eintrat, während sich sein Bruder Karl Wilhelm **Siemens** (Leuthe 1823 — London 1883) in London etablierte.

69 (zu 160): Beim Betriebe der Glühlampen kommen namentlich auch sekundäre Batterien oder sog. **Accumulatoren** in Betracht, welche für galvanische Ströme analoge Bedeutung haben, wie sie die Leydner-Flasche für die statische Elektricität besitzt. Schon 1803 durch J. W. **Ritter** eingeführt, werden sie jetzt meistens nach dem 1859 durch Gaston **Planté** (Orthèz in Basses-Pyrenées 1834 geb.; Prof. phys. Paris) gemachten Vorschlage aus dafür eigens präparierten (z. B. von Faure mit Mennig bestrichenen) Bleiplatten erstellt, welche in verdünnte Schwefelsäure tauchen und mit einer Dynamomaschine geladen werden, wobei sie gewisse, sich fortwährend steigernde chemische Modifikationen erleiden, die bei jedem spätern Stromschlusse (indem gewissermassen chemische in elektrische Energie übergeht) wieder abnehmen, während ein gleichmässiger elektrischer Strom langsam abfliesst.

70 (zu 172): Schon **Wendelin** teilte (vgl. Ciel et terre 1891) Huygens mit, dass nach seinen Beobachtungen ein Pendel im Sommer etwas langsamer schwinge als im Winter. — Vgl. auch „Max **Zwink** (Waldenburg in der Mark 1858 geb.; Obs. Strassburg), Die Pendeluhren im luftdicht verschlossenen Raume. Halle 1888 in 4.“

71 (zu 177): Um das unter einer Polhöhe φ dem Stundenwinkel s entsprechende Azimut w eines Sternes der Deklination d zu berechnen, erhält man nach 1 und 4 die wenig bequeme Formel

$$\mathrm{Tg}\, w = \mathrm{Si}\, s \cdot \mathrm{Co}\, d : (\mathrm{Si}\, \varphi \cdot \mathrm{Co}\, d \cdot \mathrm{Co}\, s - \mathrm{Co}\, \varphi \cdot \mathrm{Si}\, d) \qquad \mathbf{10}$$

Aus einem von **Horner** herrührenden Manuskripte ersehe ich nun, dass er die glückliche Idee hatte, durch

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(\varphi + d), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(\varphi - d), \quad \mathrm{Tg}\, M = \frac{\mathrm{Co}\, \alpha}{\mathrm{Si}\, \beta} \cdot \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2} s, \quad \mathrm{Tg}\, N = \frac{\mathrm{Si}\, \alpha}{\mathrm{Co}\, \beta} \cdot \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2} s \qquad \mathbf{11}$$

einige aus den Gegebenen sehr leicht zu berechnende Hilfsgrössen einzuführen, und dadurch 10 auf

$$\mathrm{Tg}\, w = \frac{\mathrm{Tg}\, M + \mathrm{Tg}\, N}{1 - \mathrm{Tg}\, M \cdot \mathrm{Tg}\, N} \qquad \text{oder} \qquad w = M + N \qquad \mathbf{12}$$

zu reduzieren.

72 (zu 191): Die Bestimmung von Tschu-Kong datiert vom Jahre 1100 (nicht 2100) vor unserer Zeitrechnung.

73 (zu 195): Die Formel 15 ist nach den in 73 befolgten Principien, nach welchen immer der vom Mittelpunkte aus vorwärts liegende Scheitel ins Auge zu fassen ist, durch

$$q = A + a = -h \cdot Ct(p + \varphi) \qquad \mathbf{15'}$$

zu ersetzen, welche sodann für die Solstitien ($p = 90 \mp e$) den richtigen Wert $q = h \cdot Tg(\varphi \mp e)$ ergiebt. — Der Litteratur füge ich bei: „Jos. **Ferchel**, Praktische Sonnenuhrkunst. Passau 1844 in 8., — und: **Born**, Gnomonique graphique et analytique. Paris 1846 in 8.".

74 (zu 214): Der Litteratur ist beizufügen „Ernst **Mayer**, Handbuch der Astrologie. Berlin 1891 in 8."

75 (zu 218): Der die Einführung einer Universalzeit in bürgerlichen Gebrauch glücklich vermittelnde Vorschlag von **Fleming**, sich für die bürgerliche Zeit überall (anstatt auf willkürlich gewählte) auf Meridiane zu beziehen, welche um volle Stunden vom ersten Meridiane abstehen, und so zu bewirken, dass alle Uhren auf der Erde in Beziehung auf Minute und Sekunde übereinstimmen, hat alle Aussicht, bald allgemein adoptiert zu werden, — sind ja bereits Nordamerika, Schweden und die deutschen Eisenbahnverwaltungen mit gutem Beispiele vorangegangen, indem sie in dieser modifizierten Weise Greenwicher-Zeit benutzen.

76 (zu 221): Vgl. „B. **Studer**, Lehrbuch der physik. Geographie. Bern 1844 bis 1847, 2 Bde. in 8., — Gustav Adolf **v. Klöden** (Berlin 1814 — ebenda 1885; Geograph), Handbuch der physischen Geographie. Berlin 1859 in 8., — P. J. **Stieltjes**, Quelques remarques sur les variations de la densité dans l'intérieur de la terre (Arch. néerl. 19 von 1884), — O. **Callandreau**, Sur la constitution intérieure de la terre (Compt. rend. 1885), — R. **Radau**, Sur la loi des densités à l'intérieur de la terre (Bull. astr. 7 von 1890), — und: S. **Günther**, Lehrbuch der physik. Geographie. Stuttgart 1891 in 8."

77 (zu 225): Es sind die „Tables météorologiques internationales. Paris 1890 in 4." beizufügen. — Wilhelm Jakob **van Bebber** (Grieth bei Emmerich 1841 geb.) ist Abteilungsvorstand der Seewarte in Hamburg, — Joh. Georg Gustav **Hellmann** (Löwen in Schlesien 1854 geb.) Vizedirektor des meteor. Inst. Berlin. — G. J. **Symons** fand in der Bodleyanischen Bibliothek in Oxford ein Witterungsjournal, welches William **Merle**, Pfarrer zu Driby in Lincolnshire, von 1337—1343 regelmässig führte.

78 (zu 226): In der von der Societas Palatina benutzten Formel $\frac{1}{4}(19^h + 2^h + 2 \times 9^h)$ wurde (wenigstens für die Schweiz) 2^h mit Vorteil durch 1^h ersetzt.

79 (zu 227): Max Ferdinand **Thiessen** (Johannisburg in Ostpreussen 1849 geb.) ist Assistent der k. Normal-Aichungs-Kommission in Berlin.

80 (zu 228): Aus „Pierre **Perrault**, De l'origine des fontaines. Paris 1674 in 12." ersieht man, dass schon 1668—74 (also vor Townley) in Paris Regenmessungen gemacht wurden.

81 (zu 236): Es ist beizufügen, dass **Weinek** schon 1886 im Appendix zum 45. Jahrg. eine Reihe solcher Zeichnungen publizierte.

82 (zu 240): Vgl. „Ch. **Simon**, Mémoires sur la rotation de la Lune et sur la libration réelle en latitude (Annal. Ecole norm. 1866 et 1869)", und die Note von **Tisserand** in Compt. rend. 1885.

83 (Zu 262): Schon vor William **Ferrel** (Bedford County in Pennsylvanien 1817 bis Maywood in Kansas 1891; Rechner im Naut. und Sign. Office) machte **Poisson** in seiner Abhandlung „Sur le mouvement des projectiles dans l'air en ayant égard à la rotation de la terre (Journ. Ec. polyt. 26 von 1838)" betreffende Untersuchungen über den Einfluss der Erdrotation.

84 (zu 269): Die von **Kepler** in Kap. 37 seiner „Astronomia nova" gegebene unrichtige Darstellung der epicyklischen Bewegung unsers Mondes um die Sonne durch eine Wellenlinie mit Inflexionspunkten wurde vielfach reproduziert, anstatt die durch **Maclaurin** in seinen „Account of Sir Is. Newton's philos. discoveries. London 1748 in 4." aufgenommene Untersuchung zu beachten. — Vgl. „G. D. E. **Weyer**, Über die Bahnen der Planetenmonde in Bezug auf die Sonne (A. N. 3007 von 1890)". — **Voltaire** starb 1778 (nicht 1678).

85 (zu 286): Das 1842 von **Doppler** aufgestellte Princip wurde auch durch die 1844 von **Buys-Ballot** (vgl. dessen „Akustische Versuche auf der niederländischen Eisenbahn zur Prüfung der Doppler'schen Theorie" in Pogg. 66 von 1845) und 1848 von **Fizeau** (vgl. „Bull. Soc. philom. von 1848 und Annal. de chim. et de phys. von 1870) mit Schall-Quellen angestellten Versuche als richtig erwiesen, dagegen gezeigt, dass die von Doppler darauf gestützte Erklärung des Farbenwechsels unhaltbar sei. Namentlich hob **Fizeau** hervor, dass jenes Princip statt einer Farbenänderung nur eine **Verschiebung** des Spektrums bedinge, — dass es möglich sein sollte, diese an den Spektrallinien zu messen, folglich die Geschwindigkeit in der Gesichtslinie zu bestimmen, — und es hat daher **Cornu** (vgl. Annuaire 1891) mit Recht verlangt, dass dieses neue Messungsverfahren als **Methode Doppler-Fizeau** bezeichnet werde. — Benedikt **Sestini** (Italien 1816 — Frederick in Maryland 1888?; Jesuit) war erst Dir. Observ. Coll. Rom., dann Prof. math. in Georgetown und andern amerik. Ordenskollegien.

86 (zu 317): Da Ostern auf 35 verschiedene Tage fallen kann, so erfordert ein immerwährender Kalender, der Wochentage und Festtage enthalten soll, 35 Einzelkalender, wie sich solche in „Chr. Fr. **Rüdiger**, Immerwährender Kalender. Leipzig 1789 in 8." finden. — Laurenz **Feldt** starb 1882 zu Kösen a. d. S.

87 (zu 327): Bei dem von **d'Aubuisson** angewandten Apparate war die Einstellung (vgl. Note Laussedat in Compt. rend. 1880) von freiem Auge auszuführen, so dass strenge genommen keine optische Berührung, wohl aber (wie schon bei Tralles und Hassler) „une règle unique" benutzt wurde.

88 (zu 352): Von den 1732 auf offener See angestellten 68 Proben ergaben

16	26	14	6	1	5

Fehler, welche zwischen

0,0—0',5	0,6—1,5	1,6—2,5	2,6—3,5	3,6—5,0	5,1—11',9

fielen, so dass ihnen ein mittlerer Fehler von ± 2',7 entsprechen würde, wenn nicht nach den Gesetzen der Erfahrungswahrscheinlichkeit unzweifelhaft die letzte Klasse wegzuwerfen und somit derselbe auf ± 1',6 (von welchen wohl überdies die grössere Hälfte dem Beobachter zufällt) zu reduzieren wäre. — Vgl. auch „H. **Eylert**, Der Sextant. Hamburg 1881 in 4."

Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur.

Von

Dr. Rudolf Wolf,

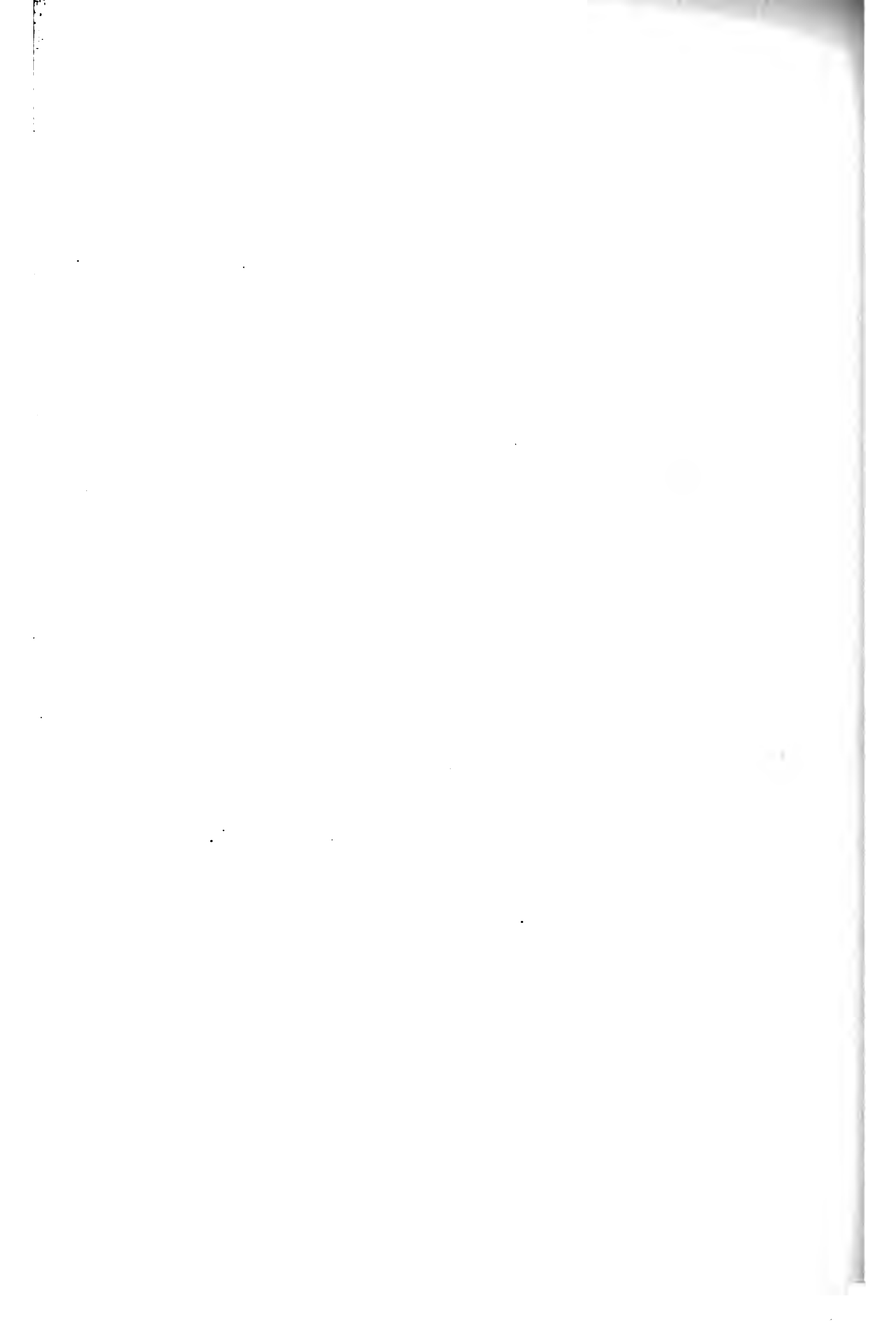
Professor in Zürich.

Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

In zwei Bänden.

Vierter Halbband.

Zürich
Druck und Verlag von F. Schulthess
1893.



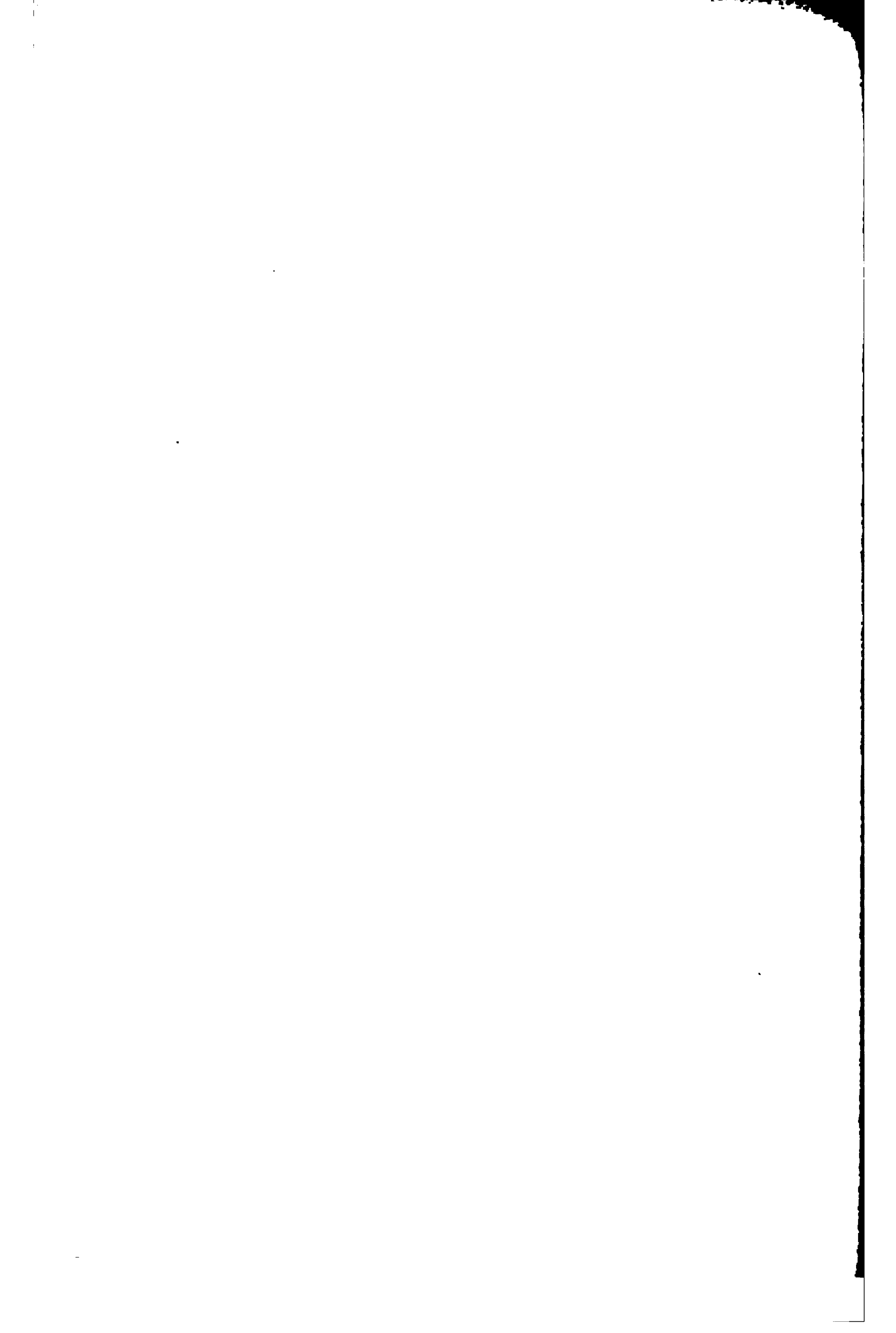
Handbuch der Astronomie

ihrer Geschichte und Litteratur

in vier Büchern.

Viertes Buch:

Mechanik und Physik des Himmels.



XIX. Das Gravitationsgesetz und seine Konsequenzen.

Nature and Nature's Laws lay hid in night, —
God said „Let Newton be", and all was Light.
(Pope.)

481. Die sog. Lagrange'schen Gleichungen. — Wählen wir die Sonne teils als Anfangspunkt der Coordinaten, teils als Masseneinheit, und bezeichnen x, y, z, r, m Coordinaten, Distanz und Masse eines andern Körpers, dessen Bewegung um dieselbe bestimmt werden soll, ξ, v, ζ, ϱ, μ aber die entsprechenden Grössen für einen von m in der Distanz d stehenden Repräsentanten der übrigen Glieder des Sonnensystemes, so bestehen nach dem Gravitationsgesetze (268), wenn f die Distanz ist, in welcher die Masseneinheit die Anziehung 1 ausübt, und überdies die Hilfsgrösse

$$R = \frac{1}{d} + \frac{d^2 - r^2 - \varrho^2}{2\varrho^3} = \frac{1}{d} - \frac{x \cdot \xi + y \cdot v + z \cdot \zeta}{\varrho^3} \qquad 1$$

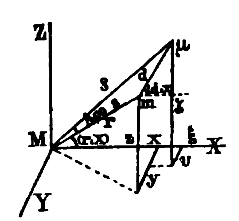
eingeführt wird, die Fundamentalgleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + f^2 \cdot \frac{1+m}{r^3} \cdot x = \sum f^2 \cdot \mu \cdot \frac{dR}{dx}$$
$$\frac{d^2 y}{d t^2} + f^2 \cdot \frac{1+m}{r^3} \cdot y = \sum f^2 \cdot \mu \cdot \frac{dR}{dy} \qquad 2$$
$$\frac{d^2 z}{d t^2} + f^2 \cdot \frac{1+m}{r^3} \cdot z = \sum f^2 \cdot \mu \cdot \frac{dR}{dz}$$

in welchen das Summenzeichen die sämtlichen durch μ repräsentierten Körper umfasst [a]. Sie tragen den Namen von **Lagrange**, während die eine Potentialfunktion darstellende Grösse R, durch deren Einführung sich derselbe ein hohes Verdienst um die Mechanik des Himmels erworben hat, **Störungsfunktion** genannt wird [b].

Zu 481: *a.* Bezeichnet F die Anziehung, welche die Sonne auf ein Massenelement in der Distanz r ausübt, so verhält sich nach dem Gravitationsgesetze $F : 1 = f^2 : r^2$, und es wird daher die Komponente der von der Sonne auf jedes

Element von m ausgeübten Wirkung nach der Axe der X durch $F \cdot Co[180^\circ + (r, x)] = -(f^2 : r^2) \cdot Co(r, x)$ gegeben, während $(f^2 \cdot \mu : d^2) \cdot Co(d, x)$ die entsprechende Komponente der von μ auf m ausgeübten Wirkung darstellt. Es wird also von der Sonne und allen μ auf m nach der Axe der X die Gesamtwirkung



$$-\frac{f^2}{r^2} \cdot Co(r, x) + \sum \frac{f^2 \cdot \mu}{d^2} \cdot Co(d, x)$$

und ebenso von m und allen μ auf die Sonne die Gesamtwirkung

$$\frac{f^2 \cdot m}{r^2} \cdot Co(r, x) + \sum \frac{f^2 \cdot \mu}{\varrho^2} \cdot Co(\varrho, x)$$

ausgeübt. Zieht man nun, um die relative Bewegung von m in Beziehung auf die als ruhend gedachte Sonne zu erhalten, letztere Gesamtwirkung von ersterer ab, setzt (nach 112) die Differenz gleich $d^2x : dt^2$, und führt die aus der Figur abzulesenden Werte

$$Co(r, x) = x : r \qquad Co(d, x) = (\xi - x) : d \qquad Co(\varrho, x) = \xi : \varrho$$

ein, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f^2 \cdot \frac{1+m}{r^3} \cdot x = \sum f^2 \mu \left(\frac{\xi - x}{d^3} - \frac{\xi}{\varrho^3} \right) \qquad 3$$

Bedenkt man aber, dass offenbar

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \varrho^2 = \xi^2 + v^2 + \zeta^2 \qquad 4$$

$$d^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r \cdot \varrho \cdot s = (x - \xi)^2 + (y - v)^2 + (z - \zeta)^2$$
$$= r^2 + \varrho^2 - 2(x \cdot \xi + y \cdot v + z \cdot \zeta) \qquad 5$$

ist, und aus 1

$$\frac{dR}{dx} = \frac{\xi - x}{d^3} - \frac{\xi}{\varrho^3} \qquad 6$$

folgt, so geht 3 in die 2' über, und entsprechend erhält man für die beiden andern Axen 2'' und 2'''. — *b.* Dem glücklichen Gedanken, die Hilfsgrösse R einzuführen, gab **Lagrange** in seiner 1774 von der Pariser Akademie gekrönten Abhandlung „Sur l'équation séculaire de la lune (Mém. Sav. étr. 1776)" Folge. Es war dies eine förmliche That, welche **Laplace** noch später (Méc. cél. V 318) mit den Worten feierte „Son introduction dans la mécanique céleste est, à cause de son utilité, une véritable découverte", zugleich für R den Namen **Störungsfunktion** beliebend. — Werden 6 und ihre Analoga nochmals nach x, y und z differentiert, so erhält man

$$\frac{d^2R}{dx^2} = \frac{3(\xi - x)^2 - d^2}{d^5} \qquad \frac{d^2R}{dy^2} = \frac{3(v - y)^2 - d^2}{d^5} \qquad \frac{d^2R}{dz^2} = \frac{3(\zeta - z)^2 - d^2}{d^5} \qquad 7$$

woraus durch Summation unter Berücksichtigung von 5 die Beziehung

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2R}{dy^2} + \frac{d^2R}{dz^2} = 0 \qquad 8$$

folgt, welche **Laplace** 1785 in seiner „Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes (Mém. Par. 1782, ausgeg. 1785)" zuerst aufstellte und die daher seinen Namen trägt. — Anhangsweise mag noch auf „R. **Clausius**, Die Potentialfunktion und das Potential. Leipzig 1859 in 8. (4. A. 1885), — Max **Bacharach**, Abriss der Geschichte der Potentialtheorie. Göttingen 1883 in 8., — etc." hingewiesen werden.

482. Die zwei ersten Gesetze Keplers als Folgen der Gravitation. — Die Integration der Lagrange'schen Gleichungen

wird sich kaum je in aller Allgemeinheit durchführen lassen; wenn man dagegen in erster Annäherung die Massen μ gegen die weit überwiegende Masse der Sonne vernachlässigt, d. h. jene Gleichungen durch

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{g^2 \cdot x}{r^3} = \frac{d^2 y}{d t^2} + \frac{g^2 \cdot y}{r^3} = \frac{d^2 z}{d t^2} + \frac{g^2 \cdot z}{r^3} = 0 \qquad 1$$

ersetzt, wo $g^2 = f^2 \cdot (1 + m)$ ist, so lassen sie sich leicht bewältigen. Zunächst erhält man nämlich aus diesen Näherungsgleichungen die Integralgleichung

$$c_1 \cdot x - c_2 \cdot y + c_3 \cdot z = 0 \qquad 2$$

wo c_1, c_2, c_3 Konstante sind, — folglich das wichtige Resultat, dass unter der gemachten Voraussetzung die Bahn von m in **eine durch die Sonne gehende Ebene** fällt, welche (93) gegen die Ebene der XY um

$$i_3 = \text{Atg}\left[\sqrt{c_1^2 + c_2^2} : c_3\right] = \text{Aco}\,(c_3 : k) \quad \text{wo} \quad k^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \qquad 3$$

geneigt ist und diese so schneidet, dass die Knotenlinie mit der Axe der X den Winkel

$$n = \text{Atg}\,(c_1 : c_2) = \text{Aco}\left(c_2 : \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\right) \qquad 4$$

bildet[a]. Sodann ergiebt sich, dass k die doppelte **Flächengeschwindigkeit** und somit diese **konstant** ist[b]. Endlich findet man, dass die Polarcoordinaten von m die Gleichung

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \text{Co}\,(v - w)} \qquad 5$$

eingehen, wo a, e, w von Integrationskonstanten abhängen, also ebenfalls konstant sind, — somit m eine **Linie zweiten Grades** beschreibt, **in deren Brennpunkt die Sonne steht,** — folglich bei Wiederkehr notwendig eine Ellipse[c]. Hiemit ist aber offenbar bewiesen, dass die zwei ersten Kepler'schen Gesetze (266) unter der unserer Rechnung zu Grunde liegenden Vernachlässigung, somit als **Annäherungsgesetze**, notwendige Folgen der allgemeinen Gravitation sind[d].

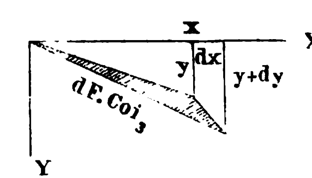
Zu 482: *a.* Kombiniert man die 1 paarweise, so erhält man

$$\frac{x \cdot d^2 y - y \cdot d^2 x}{d t^2} = \frac{x \cdot d^2 z - z \cdot d^2 x}{d t^2} = \frac{y \cdot d^2 z - z \cdot d^2 y}{d t^2} = 0$$

und hieraus durch Integration, wenn c_3, c_2, c_1 Konstante sind,

$$\frac{x \cdot d y - y \cdot d x}{d t} = c_3 \qquad \frac{x \cdot d z - z \cdot d x}{d t} = c_2 \qquad \frac{y \cdot d z - z \cdot d y}{d t} = c_1 \qquad 6$$

woraus sofort die 2 hervorgeht. — *b.* Bezeichnet F das durch den Radius Vector r in dem Zeitelemente dt beschriebene Flächenelement, so ist dessen Projektion auf die Ebene XY



$$dF \cdot Co\, i_3 = \frac{(y+dy)\cdot(x+dx)}{2} - \frac{x\cdot y}{2} - \frac{2y+dy}{2}\cdot dx$$

$$= \frac{x\cdot dy - y\cdot dx}{2} = \frac{c_3}{2}\cdot dt \qquad 7$$

Hieraus folgt aber mit Hilfe von 3 sofort

$$dF\cdot c_3 : k = {}^1/_2\, c_3 \cdot dt \quad \text{oder} \quad dF : dt = {}^1/_2 \cdot k \qquad 8$$

w. z. b. w. — *c.* Multipliziert man die 1 der Reihe nach mit $2\cdot dx$, $2\cdot dy$, $2\cdot dz$ und addiert die Produkte, so erhält man unter Benutzung der aus 481 : 4 folgenden Relation

$$r\cdot dr = x\cdot dx + y\cdot dy + z\cdot dz \qquad 9$$

die Gleichung

$$\frac{2dx\cdot d^2x + 2dy\cdot d^2y + 2dz\cdot d^2z}{dt^2} + g^2\cdot\frac{2dr}{r^2} = 0$$

und hieraus durch Integration, da bekanntlich $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 dv^2$ ist, wenn h eine Konstante bezeichnet,

$$\frac{dr^2 + r^2\cdot dv^2}{dt^2} - \frac{2g^2}{r} + h = 0 \qquad 10$$

während (nach 71) unsere 8

$${}^1/_2\cdot r^2\cdot dv = dF = {}^1/_2\, k\cdot dt \qquad \text{oder} \qquad dv : dt = k : r^2 \qquad 11$$

ergiebt. — Eliminiert man aber aus 10 und 11 die Grösse dt, so folgt

$$\frac{dr}{dv} = \frac{r}{k}\cdot\sqrt{2g^2\cdot r - h\cdot r^2 - k^2} \qquad 12$$

womit das Differential der Polargleichung der von m um die Sonne beschriebenen Bahn gefunden ist. Da nun $dr : dv$ für

$$2g^2\cdot r - h\cdot r^2 - k^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad r^2 - 2(g^2 : h)\cdot r + k^2 : h = 0 \qquad 13$$

verschwindet, so muss also diese Bahn so beschaffen sein, dass sowohl der grösste als der kleinste Wert von r der Bedingung 13 genügt. Setzt man somit von diesen beiden extremen Werten den einen $r_1 = a(1+e)$, den andern $r_2 = a(1-e)$, wo a und e neue Konstante sind, so muss

$$2a = r_1 + r_2 = 2g^2 : h \qquad a^2(1-e^2) = r_1\cdot r_2 = k^2 : h$$

oder also

$$h = g^2 : a \qquad k = g\cdot\sqrt{a(1-e^2)} \qquad 14$$

sein. Führt man aber diese letztern Werte in 12 ein und setzt

$$\frac{1}{r} = \frac{ex+1}{a(1-e^2)} \qquad \text{folglich} \qquad \frac{dr}{r^2} = -\frac{e\cdot dx}{a(1-e^2)} \qquad 15$$

so erhält man, wenn w eine Konstante bezeichnet,

$$dv = -dx : \sqrt{1-x^2} \quad \text{oder} \quad v = Aco\,x + w \quad \text{d. h.} \quad x = Co\,(v-w) \qquad 16$$

und substituiert man letztern Wert in 15', so geht sofort unsere 5 hervor. — *d.* Über die Modifikationen, welche eintreten, wenn von jener Vernachlässigung Umgang genommen wird, werden wir später (505 u. f.) zu sprechen haben.

483. Das dritte Kepler'sche Gesetz und die sog. Gauss'sche Zahl. — Bezeichnet T die in mittlern Sonnentagen ausgedrückte Umlaufszeit in einer Ellipse, so ist nach dem vorhergehenden

$$T = \frac{2\cdot a^{3/2}\cdot\pi}{f\cdot\sqrt{1+m}} \qquad \text{oder} \qquad f = \frac{2\cdot a^{3/2}\cdot\pi}{T\cdot\sqrt{1+m}} \qquad 1$$

so dass die Umlaufszeit eines Planeten nur von der grossen Axe seiner Bahn und in untergeordneter Weise von seiner Masse abhängig ist, — ferner die Konstante f berechnet werden kann, sobald für Einen Planeten T, a und m bekannt sind [a]. — Für zwei verschiedene Planeten ergiebt sich nach 1 die Proportion

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : [1 + (m_1 - m_2) : (1 + m_2)] \cdot a_2^3 \qquad \mathbf{2}$$

und somit, wenn $m_1 - m_2$ vernachlässigt wird, das dritte Kepler'sche Gesetz (267), so dass also auch dieses als ein **Annäherungsgesetz** nachgewiesen ist [b]. — Setzt man mit Gauss für die Erde $T = 365^d,256\,385$, $a = 1$, $m = {}^1/_{354720} = 0,0000\,21892$, so erhält man nach 1

$$\begin{aligned} f &= \overline{8,23558\,14414} &&= 0,017202\,09895 \\ &= \overline{3,55000\,65746} \cdot \mathrm{Si}\,1'' &&= 3548'',1877 \cdot \mathrm{Si}\,1'' \end{aligned} \qquad \mathbf{3}$$

d. h. diejenige Zahl, welche man gewohnt ist, als **Gauss'sche Zahl** zu bezeichnen [c].

Zu 483: *a.* Da die Fläche der Ellipse gleich $a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \pi$ und die Flächengeschwindigkeit nach 482 : 14 gleich $^1/_2\, k = {}^1/_2\, f \cdot \sqrt{1 + m} \cdot \sqrt{a\,(1 - e^2)}$ ist, so ergiebt sich offenbar, indem man erstern Wert durch letztern dividiert, für T sofort unsere 1. — *b.* Die Vernachlässigung ist nicht sehr bedeutend, da sogar in dem extremen Falle, wo man nach Tab. IX^b für den kleinsten Planeten unsers Sonnensystemes (Merkur) $m' = {}^1/_{5310000}$ und für den grössten (Jupiter) $m'' = {}^1/_{1050}$ einführt, nur $(m' - m'') : (1 + m'') = -0,000945$ wird. — *c.* Führt man in 1", anstatt den von Gauss benutzten Werten, den neuern Bestimmungen gemäss mit **Hansen** $T = 365,2563582$ und mit **Leverrier** $m = {}^1/_{354936}$ an, so wird $f = 0,017202\,10018$, und überhaupt wird notwendig f mit den nie ganz scharf bestimmbaren T und m immer etwas variieren. Es kömmt mir daher vor, dass, wenn man f als **Gauss'sche Zahl** bezeichnen will, man unter dieser letztern nur ihre Bedeutung und nicht gerade den von Gauss selbst berechneten Wert ins Auge zu fassen habe, und dass der von **Lehmann** gemachte und später auch von **Newcomb** empfohlene Vorschlag (vgl. A. N. 1341, 1349, 1435, etc.), an dem Gauss'schen Werte festzuhalten und dafür a je einen andern Wert (z. B. bei Annahme der obigen neuern Werte $a = 1,00000\,129$ zu setzen) nicht als ein glücklicher bezeichnet werden dürfe. Auch die Benennung von f hat keine erhebliche Bedeutung, sonst müsste ich dafür plaidieren, dass sie in „Euler'sche Zahl" umgeändert würde, da **Euler** (während er, vgl. 491, ein Jahr zuvor noch $\mu = m \cdot \sqrt{2}$ benutzt hatte) schon 1744 in seiner „Theoria motuum" eine solche Konstante $m = a^{3/2} \cdot \pi : T$ einführte, welche somit mit unserm $^1/_2 \cdot g$ übereinkömmt, oder sich von $^1/_2 \cdot f$ nur dadurch unterscheidet, dass bei ihrer Berechnung die Masse des Planeten gegen diejenige der Sonne vernachlässigt wurde. Da Euler $T = 365,256$ und nach damaliger Übung $a = 100000$ annahm, so erhielt er $\mathrm{Lg}\, m = 5,43455\,25139$, woraus $\mathrm{Lg}\, f = \mathrm{Lg}\, m + \mathrm{Lg}\, 2 - {}^3/_2 \cdot \mathrm{Lg}\, 100000 = 8,23558\,25096$ hervorgeht, d. h. ein dem Gauss'schen sehr nahe kommender Wert.

484. Die Geschwindigkeit in der Bahn, der sog. mittlere Planet und einige andere Corollarien. — Bezeichnet c

die Geschwindigkeit in der Bahn, so folgt aus dem vorhergehenden, dass

$$c^2 = g^2 \cdot (2 : r - 1 : a) \qquad 1$$

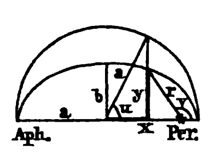
ist, und es wird daher c^2 für den Kreis ($r = a$) den konstanten Wert $g^2 : a$, für jede andere Bahn aber im Perihel, wo r seinen kleinsten Wert $q = a(1 - e)$ annimmt, einen grössten Wert erhalten, der für die Parabel gleich $2g^2 : q$, für die Ellipse aber kleiner und für die Hyperbel grösser als $2g^2 : q$ sein wird [a]. — Giebt man dem mit veränderlicher Geschwindigkeit seine elliptische Bahn durchlaufenden Planeten einen Hilfsplaneten bei, welcher je gleichzeitig mit ihm vom Perihel abzugehen, aber den über der grossen Axe beschriebenen Kreis mit gleichförmiger Geschwindigkeit zu durchlaufen hat, so wird dieser sog. **mittlere Planet** vom Mittelpunkte aus gesehen, jeweilen vom Perihel einen gewissen Abstand m, die sog. **mittlere Anomalie**, besitzen, — und zwar wird m einerseits der seit dem Durchgange durch das Perihel verflossenen Zeit proportional sein, sowie anderseits zu dem gleichzeitigen Werte des **seit Euler** ebenfalls vom Perihel aus gezählten Winkels v, der auf den Brennpunkt bezüglichen **wahren Anomalie** und dem Radius vector, in einem durch die Beziehungen

$$m = u - e \cdot \mathrm{Si}\, u \qquad \mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v = \mathrm{Tg}\, {}^1/_2 u \cdot \sqrt{(1+e) : (1-e)} \qquad 2$$
$$r = a(1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u)$$

bestimmten Rapporte stehen, wo u ein von **Kepler** mit grossem Geschicke zur Vermittlung zwischen m und v unter dem Namen der **excentrischen Anomalie** eingeführter Hilfswinkel ist [b]. — Aus den unter den vorhergehenden Nummern aufgestellten Beziehungen lassen sich ferner verschiedene Sätze ableiten; so z. B. findet man, dass bei Vernachlässigung der Massenunterschiede die Proportionen: „In jeden zwei Bahnen verhalten sich die Quadrate der Flächengeschwindigkeiten wie ihre Parameter", — und: „Die Zeiten, in welchen zwei Flächen beschrieben werden, verhalten sich direkt wie diese Flächen, und umgekehrt wie die Wurzeln der Parameter" bestehen [c]. Ebenso lässt sich mit ihrer Hilfe eine ganze Reihe kleiner Untersuchungen leicht durchführen, wie unten noch an einigen Beispielen gezeigt werden mag [d].

Zu 484: *a.* Bezeichnet nämlich ds das Bogenelement, so ist (112:1) $c = ds : dt = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} : dt = \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot dv^2} : dt$, also (482:10) $c^2 = 2g^2 : r - h$, woraus mit Hilfe von 482:14 sofort die 1 folgt. — Da die Geschwindigkeit in einem Kreise des Radius q gleich $\sqrt{g^2 : q}$ folgt, während die Maximalgeschwindigkeit in der Parabel gleich $\sqrt{2g^2 : q}$ ist, so ergiebt sich, dass letztere $\sqrt{2} = 1{,}414$ mal so gross als erstere wird, und man bezeichnet daher wohl 1,414 als **parabolische Geschwindigkeit.** — Gelangt ein Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit in den Bereich der Sonne, so

wird es ganz von deren kleinerm oder grösserm Betrag abhängen, ob er in eine Ellipse, oder nur in eine Parabel, oder gar nur in eine Hyperbel abgelenkt wird. — *b.* Da (74 : 2) $r = a - e \cdot x$ und überdies $x = a \cdot \text{Co}\, u$ ist, so erhält man sofort entsprechend 2″,



$$r = a(1 - e \cdot \text{Co}\, u) \quad \text{somit} \quad dr = ae \cdot \text{Si}\, u \cdot du \qquad 3$$

Hieraus folgen aber einerseits, da nach unsern Annahmen $w = 0$ ist, durch Vergleichung mit 482 : 5 successive die Beziehungen

$$1 - e \cdot \text{Co}\, u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cdot \text{Co}\, v} \qquad \text{Co}\, v = \frac{\text{Co}\, u - e}{1 - e \cdot \text{Co}\, u}$$

$$\text{Si}\, v = \sqrt{1 - \text{Co}^2 v} = \frac{a \cdot \sqrt{1 - e^2}}{r} \cdot \text{Si}\, u \qquad \text{Tg}\, \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{Co}\, v}{1 + \text{Co}\, v}} = \text{Tg}\, \frac{u}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \qquad 4$$

deren letzte mit 2″ übereinstimmt, und anderseits erhält man, wenn man in die aus 482 : 10, 11 durch Elimination von dv folgende

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{2 g^2 \cdot r - h \cdot r^2 - k^2} \qquad 5$$

die Werte 3 einführt, unter Benutzung von 482 : 14 und unter 483 : 1 entsprechender Einführung von n durch

$$n = g : a^{3/2} = 2\pi : T \qquad \text{so dass} \qquad m = n \cdot t \qquad 6$$

wo t die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit bezeichnet,

$$n \cdot dt = (1 - e \cdot \text{Co}\, u) \cdot du \qquad \text{oder} \qquad m = u - e \cdot \text{Si}\, u \qquad 7$$

womit auch noch 2′ bewiesen ist. — *c.* Führt man den Parameter $p = a(1 - e^2)$ ein, so geht 482 : 14″ in

$$k^2 = g^2 \cdot p \qquad 8$$

über, und man erhält daher für zwei sich um die Sonne bewegende Körper

$$k'^2 : k''^2 = g'^2 \cdot p' : g''^2 \cdot p'' \qquad 9$$

woraus die erste der oben ausgesprochenen Proportionen als Annäherung hervorgeht. Sind ferner f′ und f″ die in den beiden Bahnen während den Zeiten t′ und t″ beschriebenen Flächen, so verhält sich offenbar

$$\frac{f'}{f''} = \frac{k' \cdot t'}{k'' \cdot t''} = \frac{g' \cdot t' \cdot \sqrt{p'}}{g'' \cdot t'' \cdot \sqrt{p''}} \qquad \text{oder} \qquad t' : t'' = \frac{f'}{g' \cdot \sqrt{p'}} : \frac{f''}{g'' \cdot \sqrt{p''}} \qquad 10$$

d. h. es bildet auch die zweite der oben ausgesprochenen Proportionen, wie schon **Newton** (Princ. 55, A. Wolfers 78) erkannte, ein Näherungsgesetz. **Euler**, der letzteres Gesetz an die Spitze seiner „Theoria motuum“ stellte, brauchte dabei anstatt „Wurzel“ den Ausdruck „subduplicata“, welchen sein Übersetzer Paccassi mit „cubus“ verwechselte. — Für zwei Punkte (r′, v′) und (r″, v″) einer Parabel des Parameters 2q hat man nach 76 : 1

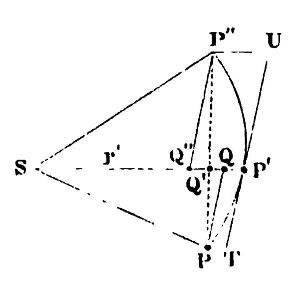
$$\text{Co}\, \tfrac{1}{2} v' = \sqrt{q : r'} \qquad \text{Co}\, \tfrac{1}{2} v'' = \sqrt{q : r''}$$

woraus ohne Schwierigkeit

$$\text{Tg}\,(45^\circ + z) = \text{Ct}\, \tfrac{1}{2}(v' + v'') \cdot \text{Ct}\, \tfrac{1}{2}(v' - v'') \qquad \text{wo} \qquad \text{Tg}\, z = \sqrt{r'' : r'} \qquad 11$$

folgt, so dass man aus zwei Radien vectoren und der Differenz der Anomalien die Summe dieser letztern und damit diese selbst, — ja für die beiden Knotendurchgänge, wo diese Differenz 180° beträgt, aus den Radien vectoren allein die beiden Anomalien berechnen kann. Es trägt dieser Satz den Namen von **Nicollic**, eines Adjunkten der Pariser Akademie, welchen man nur durch die denselben enthaltende Abhandlung „Sur la détermination des orbites planétaires

(Mém. Par. 1746)" kennt. — Befindet sich ein Punkt zur Zeit t' in P', so würde er infolge der Trägheit vermöge der bereits besitzenden Geschwindigkeit c' in der Zeit t'' — t' den Weg $P'U = c' \cdot (t'' - t')$ nach der Tangente zurücklegen, — infolge der Anziehung aber mit der Beschleunigung $f^2 : r'^2$ gegen S fallen und zwar, wenn die Zeit (t'' — t') klein genug ist, um die Beschleunigung während derselben als konstant ansehen zu dürfen, in dieser Zeit (nach 111:2) einen Weg $P'Q'' = f^2 \cdot (t'' - t')^2 : 2r'^2$ durchlaufen, — also wird er im Zusammenwirken beider Bewegungsursachen nach dem Parallelogramm der Bewegungen zur Zeit t'' in P'' anlangen.



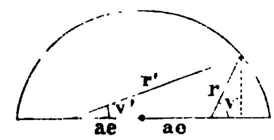
Wäre er zur Zeit t in P gewesen, so hätte man entsprechend $P'T = c' \cdot (t' - t)$ und $P'Q = f^2 \cdot (t' - t)^2 : 2r'^2$ zu setzen. Ist daher Q' der Punkt, in welchem die Gerade PP'' auf CP' einschneidet, so hat man

$$Q'Q : Q'Q'' = PQ : P''Q'' = (t' - t) : (t'' - t') \quad \text{oder} \quad Q'Q : QQ'' = (t' - t) : (t'' - t)$$

und somit nach Substitution und Reduktion

$$Q'P' = QP' + QQ' = QP' + \frac{t' - t}{t'' - t}(Q''P' - QP') = \frac{f^2}{2r'^2} \cdot (t' - t) \cdot (t'' - t') \qquad \mathbf{12}$$

eine Beziehung, welche schon **Klinkerfues** (Theor. Astr. 103) in ähnlicher Weise ableitete, und welche uns später wiederholt (z. B. in 498) gute Dienste leisten wird. — *d.* Da der (255) von **Ptolemäus** als Centrum des Equans gewählte Punkt bei der elliptischen Bewegung dem zweiten oder sog. „obern Brennpunkte" entspricht, so ist es von Interesse, die letzterm entsprechende Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen. Nun ist einerseits



$$r \cdot \mathrm{Si}\, v = r' \cdot \mathrm{Si}\, v'$$

also wegen $r' = 2a - r$ oder $dr' : dt = -dr : dt$

$$r' \cdot \mathrm{Co}\, v' \cdot \frac{dv'}{dt} = (\mathrm{Si}\, v + \mathrm{Si}\, v') \cdot \frac{dr}{dt} + r \cdot \mathrm{Co}\, v \cdot \frac{dv}{dt}$$

und anderseits nach 482:5 für $w = 0$

$$r(1 + e \cdot \mathrm{Co}\, v) = a(1 - e^2) \quad \text{oder} \quad (1 + e \cdot \mathrm{Co}\, v) \cdot \frac{dr}{dt} - e \cdot r \cdot \mathrm{Si}\, v \cdot \frac{dv}{dt} = 0$$

Hieraus ergiebt sich aber durch Elimination von dr/dt nach einigen Reduktionen die Proportion

$$\frac{dv'}{dt} : \frac{dv}{dt} = r : r' \qquad \mathbf{13}$$

so dass sich nach 482:11

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{dv'}{dt} = \frac{k}{r \cdot r'} \qquad \mathbf{14}$$

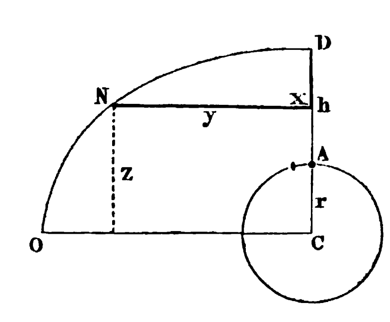
entsprechen, woraus folgt, dass $dv' : dt$ viel geringern Schwankungen als $dv : dt$ unterworfen ist: Während nämlich letzteres Verhältnis für die beiden Scheitel der grossen Axe die Differenz

$$\frac{k}{a^2(1-e)^2} - \frac{k}{a^2(1+e)^2} = \frac{4ke}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{k}{a^2}(4e + 8e^3)$$

zeigt, so kömmt ersterem für die Scheitel der grossen und kleinen Axe nur die Maximaldifferenz

$$\frac{k}{a^2(1-e^2)} - \frac{k}{a^2} = \frac{k \cdot e^2}{a^2(1-e^2)} = \frac{k}{a^2} \cdot e^2$$

zu, welche bei Vernachlässigung der zweiten Potenz von e vollständig verschwindet. Könnte man sich somit z. B. von der Erde in den obern Brennpunkt der Mondbahn versetzen, so würde für diesen Standpunkt die Libration in Länge (240) fast unmerklich werden. — Wird ein Körper, welcher bei D in der Distanz h von einer Kugel des Radius r steht, von dieser im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Distanz angezogen, so wird er gegen sie fallen und nach einer gewissen Zeit t in M anlangen. Bezeichnet nun g die Beschleunigung in A, g' aber diejenige in M, so hat man $g' : g = r^2 : z^2$, wo $z = r + h - x$ ist, und somit nach 112



$$\frac{d^2x}{dt^2} = g' = \frac{gr^2}{z^2} = \frac{g \cdot r^2}{(r+h-x)^2}$$

oder, beidseitig mit $2 \cdot dx$ multiplizierend und integrierend,

$$\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2g \cdot r^2}{r+h-x} + \text{Const.}$$

Hat nun der Körper in D noch keine Geschwindigkeit und beginnt man die Zeit mit seinem Abgange von D, so giebt letztere Gleichung für D

$$0 = 2g \cdot r^2 : (r+h) + \text{Const.}$$

und man erhält somit durch Subtraktion und Extraktion

$$\sqrt{\frac{2g \cdot r^2}{r+h}} \cdot dt = \frac{r+h-x}{\sqrt{(r+h) \cdot x - x^2}} \cdot dx = \sqrt{\frac{r+h-x}{x}} \cdot dx \qquad \textbf{15}$$

Verzeichnet man aber eine gemeine Cykloide des Scheitels D, bei welcher $DC = r + h$ Durchmesser des erzeugenden Kreises und $MN = y$ die der Abscisse x entsprechende Ordinate ist, so hat man (80)

$$x = \frac{r+h}{2} \cdot (1 - \text{Co}\,w) \qquad y = \frac{r+h}{2} \cdot (w + \text{Si}\,w) \qquad \textbf{16}$$

wo w einen Hilfswinkel bezeichnet. Aus 16' folgen

$$\text{Co}\,w = 1 - \frac{2x}{r+h} \qquad 1 + \text{Co}\,w = 2 \cdot \frac{r+h-x}{r+h} \qquad \text{Si}\,w = \frac{2 \cdot \sqrt{(r+h) \cdot x - x^2}}{r+h}$$

$$dx = {}^1\!/_2\,(r+h) \cdot \text{Si}\,w \cdot dw \qquad dy = {}^1\!/_2\,(r+h)\,(1 + \text{Co}\,w) \cdot dw$$

somit durch Elimination von dw und w successive

$$dy = \frac{1 + \text{Co}\,w}{\text{Si}\,w} \cdot dx = \frac{r+h-x}{\sqrt{(r+h) \cdot x - x^2}} \cdot dx = \sqrt{\frac{r+h-x}{x}} \cdot dx \qquad \textbf{17}$$

Es geht also 15, wie schon **Poisson** (Méc. 2 éd. I 254) hervorhob, in

$$\sqrt{\frac{2gr^2}{r+h}} \cdot dt = dy \qquad \text{oder} \qquad t = \frac{y}{r} \cdot \sqrt{\frac{r+h}{2g}} \qquad \textbf{18}$$

über, so dass die Cykloide die merkwürdige Eigenschaft hat, dass ihre Ordinate der Zeit proportional ist, welche zum Durchlaufen der Abscisse gebraucht wird. Nun ist aber $OC = {}^1\!/_2\,(h + r) \cdot \pi$, und wenn daher r gegen h sehr klein ist, so darf man für $x = h$ sehr nahe $y = {}^1\!/_2\,h \cdot \pi$ setzen, und hiefür wird nach 18 die Fallzeit durch h

$$t' = \sqrt{h^3 : 8g} \cdot \pi : r \qquad \textbf{19}$$

Ist nun R der Radius der Sonne und G die Beschleunigung an ihrer Ober-

fläche, so hat man nach dem Gravitationsgesetze $G : 1 = f^2 : R^2$, so dass nach 483 : 1 bei Vernachlässigung von m

$$T = 2 a \pi \cdot \sqrt{a : G} : R$$

wird. Es ist daher die Zeit, welche ein von der Sonne um a entfernter Körper brauchen würde, um auf sie zu fallen, nach 19

$$\tau = \sqrt{a^3 : 8 G} \cdot \pi : R = T : \sqrt{32} = T : 5{,}657 \qquad 20$$

Diese merkwürdige Beziehung wurde wohl zuerst durch Adolphe de **Saussure** (Lausanne 1807 — ebenda 1880; Oberforstmeister der Waadt) in einem von 1868 VI 21 datierten autographierten Mémoire, und sodann wieder durch C. **Flammarion** in seiner „Astronomie populaire" von 1870 aufgestellt, sowie seither (Bull. vaud. 17) durch Henri **Rapin** (Kassel 1813 — Lausanne 1890; früher Pfarrer zu Corsier-sur-Vevey, dann Privatgel. in Lausanne) wesentlich in vorstehender Weise abgeleitet. Da nun z. B. für die Erde $T = 365^d{,}26$ ist, so würde sie somit bei plötzlichem Erlöschen ihrer Tangentialkraft in $64^d{,}6$ auf die Sonne stürzen.

485. Die sog. Bahnelemente. — Anhangsweise mögen die im vorhergehenden nur beiläufig eingeführten und nach ihren Beziehungen besprochenen Konstanten oder sog. **Elemente** noch in derjenigen Form zusammengestellt werden, in welcher sie schon im 17. Jahrhundert nach und nach acceptiert und seither beibehalten worden sind: Die **Ebene der Bahn** wird durch

☊ = Länge des aufsteigenden Knotens, d. h. des Punktes der Ekliptik, in welchem sich der Wandelstern über dieselbe erhebt, — und

i = Neigung der Bahnebene gegen die Ekliptik, wenn die Länge nach dem Durchgange durch den aufsteigenden Knoten zunimmt, somit der Wandelstern rechtläufig (D, direkt) ist, — oder Supplement der Neigung, wenn die Länge abnimmt, somit derselbe rückläufig (R, retrograd) ist

gegeben, — die **Bahn** selbst aber, welche man sich auf die Ekliptik niedergeklappt denkt, durch

P = Länge des Perihels, oder auch den Winkel (P — ☊), welchen die grosse Axe mit der Knotenlinie bildet,

a = halbe grosse Axe, in Teilen der mittlern Distanz Erde-Sonne ausgedrückt, — und

e = Excentricität, in Teilen der halben grossen Axe

und endlich die **Lage in der Bahn** zu einer bestimmten Zeit, der sog. Epoche E, auf welche sich auch die übrigen Elemente beziehen, durch

M = mittlere Länge zur Epoche, d. h. die der Länge des Perihels entsprechend gezählte Länge des mittlern Planeten zur Zeit der Epoche.

Neben diesen sechs eigentlichen Elementen werden dann wohl auch noch, soweit möglich, Periheldistanz, Umlaufszeit, Durchmesser, Masse, Dichte, etc., beigefügt. [Vgl. Tab. $IX^{b,c}$] [a].

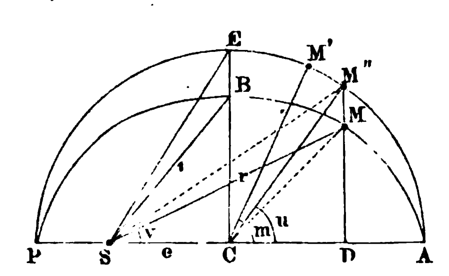
Zu 485: *a.* Statt oder neben der halben grossen Axe giebt man wohl auch die damit durch das dritte Kepler'sche Gesetz zusammenhängende siderische oder die aus dieser abgeleitete tropische Umlaufszeit, wohl auch die sog. **mittlere tägliche Bewegung** μ, d. h. die Anzahl Sekunden, welche man erhält, wenn man $360 \cdot 60 \cdot 60$ durch die in Tagen ausgedrückte tropische Umlaufszeit teilt, — statt e den Winkel $\varphi = \text{Asi}\ e$, — bei parabolischen Bahnen statt a, e und M die Periheldistanz q und die Durchgangszeit durch das Perihel, — etc. — Von Elementen in unserm Sinne konnte natürlich erst nach Aufstellung der Kepler'schen Gesetze die Rede sein, — dann aber waren die jetzt Gebräuchlichen (etwa mit Ausnahme der Länge zur Epoche) quasi von selbst gegeben, und so erscheinen sie denn auch bereits in der 1705 von **Halley** publizierten „Cometographia (vgl. 575)“ vollständig.

486. Die Kepler'sche Aufgabe. — Da für die Planeten, um deren Theorien es sich für **Kepler** zunächst handelte, bereits vielfache und sich so ziemlich über deren ganze Bahnen verteilende Ortsbestimmungen vorhanden waren, so fiel es ihm nicht schwer, daraus, ohne eigentliche Rechnung, annähernde Werte für ihre Bahnelemente zu abstrahieren, und sodann für eine beliebige Zeit τ, wie wir es jetzt nach der Formel

$$m = M - P + (\tau - E) \cdot \mu \qquad 1$$

ausführen, approximativ die mittlere Anomalie irgend eines derselben zu berechnen [a]. Ferner gelang es ihm, nach der schon (484) erwähnten Einführung einer vermittelnden Hilfsgrösse, die wünschbaren (unsern 484 : 2 entsprechenden) Beziehungen zwischen der mittlern Anomalie und den Polarcoordinaten des Planeten aufzustellen [b], — und wenn auch diejenige dieser Beziehungen, deren er zur Berechnung seiner Hilfsgrösse bedurfte, transcendent war und sich somit nur näherungsweise lösen liess [c], so war damit doch die wichtige und mit vollem Recht nach **Kepler** benannte Aufgabe gelöst, aus den Elementen eines Planeten für jede Zeit die Polarcoordinaten desselben zu berechnen, somit **einerseits** die wünschbaren Tafeln zu erstellen, und dann **anderseits** durch Vergleichung der Tafelörter mit den aus den Beobachtungen abgeleiteten Örtern Anhaltspunkte für successive Verbesserung der Elemente und Tafeln zu gewinnen [d].

Zu 486: *a.* Will man, wie es zur Zeit von Kepler und bis auf Euler allgemein gebräuchlich war, vom Aphel ausgehen, so hat man P und m durch $180^0 + P$ und $180^0 + m$ zu ersetzen, was aber, da ganze Umdrehungen wegfallen, ohne Einfluss auf 1 bleibt. — *b.* In Kap. 59 seiner „Astronomia nova“ schlug **Kepler** folgenden Weg ein: Er konstruierte über der grossen Axe



einen dem ehemaligen Excentrus entsprechenden Kreis, in welchem er einen gedachten, durch die **mittlere Anomalie** (anomalia media) m für jede Zeit τ entsprechend 1 seiner Lage nach leicht bestimmbaren Planeten M' sich gleichförmig so bewegen liess, dass er mit dem wahren, durch die **wahre Anomalie** (anomalia coæquata) v bestimmten Planeten M je gleichzeitig durch das Aphel ging. Überdies führte er (484) zur Vermittlung zwischen m und v die sich auf den mit M gleiche Abscisse besitzenden Kreispunkt M" beziehende **excentrische Anomalie** (anomalia excentri) u als Hilfswinkel ein. Es ergab sich ihm nun, dass

$$\triangle ESC : \triangle M''SC = EC : M''D = 1 : \mathrm{Si}\,u \quad \text{oder} \quad \triangle M''SC = \tfrac{1}{2} e \cdot \mathrm{Si}\,u$$

sei und somit, hiezu den Sector $M''CA = (\pi : 360) \cdot u$ fügend, einerseits

$$M''SA = u \cdot \pi : 360 + \tfrac{1}{2} e \cdot \mathrm{Si}\,u \qquad 2$$

Anderseits hat man aber, da zwei in derselben Ebene liegende Flächen sich wie ihre Projektionen auf irgend eine andere Ebene verhalten,

$$M''SA : \text{Kreis} = MSA : \text{Ellipse} = t : T = m : 360$$

oder also

$$M''SA = \pi \cdot m : 360 \qquad 3$$

d. h. durch Gleichsetzung der beiden Werte 2 und 3

$$m = u + (180 : \pi) \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,u \qquad 4$$

Da ferner $SD = e + \mathrm{Co}\,u$, $M''D = \mathrm{Si}\,u$ und $MD : M''D = BC : EC = \sqrt{1 - e^2} : 1$, so hat man überdies

$$r = \sqrt{SD^2 + MD^2} = 1 + e \cdot \mathrm{Co}\,u \quad \text{und} \quad \mathrm{Co}\,v = \frac{SD}{r} = \frac{e + \mathrm{Co}\,u}{1 + e \cdot \mathrm{Co}\,u} \qquad 5$$

Man kann daher, wenn u gegeben ist, nach den, für $a = 1$ mit unsern frühern 484 : 2 ganz übereinstimmenden Beziehungen 4 und 5 mit Leichtigkeit m, r und v berechnen. — *c.* Um umgekehrt bei gegebenem m die in Beziehung auf u transcendente 4 zu lösen, fand begreiflich **Kepler** keinen Weg, sondern schloss den betreffenden Abschnitt seines Werkes (p. 300) mit den Worten: „Mihi sufficit credere, solvi a priore non posse, propter arcus et sinus ἑτερογένειαν. Erranti mihi, quicunque viam monstraverit, is erit mihi magnus Apollonius". Dagegen zeigte er in seinem „Epitome (p. 696)" an einem Beispiele, wie man dennoch u mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen könne, indem man successive

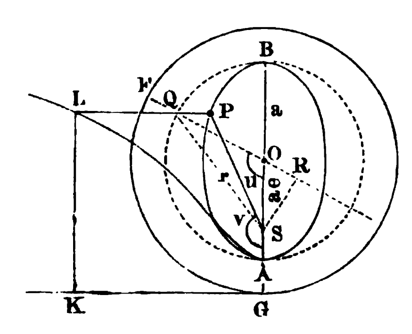
$$u' = m - (180 : \pi) \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,m \qquad u'' = m - (180 : \pi) \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,u' \qquad \text{etc.} \qquad 6$$

setze. — *d.* Die spätere Zeit hat eine ganze Menge solcher Annäherungsverfahren aufgefunden, von welchen die wichtigsten unter den folgenden Nummern abgehandelt werden sollen.

487. Die konstruktiven Lösungen. — Ausser dem von Kepler selbst für die Lösung seiner Aufgabe eingeschlagenen Wege sind im Laufe der Zeiten noch viele andere Verfahren beliebt worden [a], die zwar meist nur in Behandlung der transcendenten

Gleichung voneinander abweichen und sich wesentlich in vier Klassen einteilen lassen. Eine erste Klasse umfasst die Versuche, auf konstruktivem Wege zum Ziele zu gelangen, und wird namentlich durch den Vorschlag von **Newton**, eine Cykloide [b], und denjenigen von **Dubois**, eine Sinusoide dafür zu verwenden [c], repräsentiert. Praktische Wichtigkeit ist jedoch diesen, theoretisch ganz hübschen, Verfahren kaum beizulegen [d].

Zu 487: *a.* Schon **Houzeau** zählt in seiner „Bibliographie" bei 80 betreffende Arbeiten auf, obschon er nur die in periodischen Schriften enthaltenen berücksichtigt und mit 1881 abbricht: Mit Einschluss der originellen Behandlungen in Lehrbüchern, und der auch seit 1881 so ziemlich jedes Jahr auftauchenden neuen Vorschläge, würde man mindestens die Zahl 120 erreichen. — *b.* In seinen Principien (A. 1687 p. 107, A. Wolfers p. 122) stellte sich **Newton** die Aufgabe „Ein Körper bewegt sich in einer Ellipse; man soll seinen Ort zu einer gegebenen Zeit finden", und löste dieselbe in folgender höchst originellen Weise: Man verlängere die grosse Axe BA der gegebenen Ellipse bis G so, dass $OG : a = a : (a \cdot e)$ oder also $OG = a : e$, — beschreibe mit OG als Radius einen Kreis, — konstruiere die verlängerte Cykloide, welche A beim Rollen dieses Kreises auf der ihn in G berührenden GK durchläuft, — bestimme K so, dass $GK : (2 \cdot OG \cdot \pi) = t : T$ wird, wo t die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit und T die Umlaufszeit ist, — ziehe $KL \perp GK$ und $LP \parallel GK$, — und erhalte so den Punkt P, welcher nunmehr nach **Newton** den gesuchten Ort des Körpers zur Zeit t darstellt. — Der Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktion kann (in etwelcher Vereinfachung gegenüber Newton) in folgender Weise geleistet werden: Nach 80 : 2 ist $KG = OG \cdot u - a \cdot \mathrm{Si}\, u$, während nach Konstruktion $KG = 2 \cdot OG \cdot \pi \cdot t : T$ ist; also muss wegen $OG = a : e$



$$u - e \cdot \mathrm{Si}\, u = 2\pi \cdot t : T = m \qquad 1$$

sein, wo m die sog. mittlere Anomalie bezeichnet, — also ist u die sog. excentrische Anomalie. Überdies verhält sich, wenn b die halbe kleine Axe ist, Sect. PSA : Sect. QSA = b : a, während, mit Benutzung von 1, Sect. $QSA = \frac{1}{2} a^2 \cdot u - \frac{1}{2} a \cdot RS = a^2 \cdot \pi \cdot t : T$ folgt; also muss Sect. $PSA = a \cdot b \cdot \pi \cdot t : T$ sein, und es verhält sich somit

$$\text{Sect. } PSA : \text{Ellipse} = t : T \qquad 2$$

wie es nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze sein soll, — d. h. es ist die Newton'sche Konstruktion von P richtig, und giebt sogar, ausser u, noch r und v oder den Ort in der Bahn. — *c.* **Dubois** schlug in seiner Note „Moyen de résoudre graphiquement le problème de Kepler (A. N. 1404 von 1863)" vor, für ein und allemal in etwas grösserm Mass-Stabe eine Sinusoide (vgl. 79 und die dortige Figur) zu konstruieren, — dann von dem m entsprechenden Punkte der Abscissenaxe eine mit letzterer den Winkel $\varphi = \mathrm{Act}\, e$ bildende Gerade zu ziehen, — und behauptete sodann, dass die Abscisse des so er-

haltenen Punktes M gleich der excentrischen Anomalie sei. Man hat auch in der That, da für die Sinusoide $t = \mathrm{Si}\, u$ ist, $m = u - t \cdot \mathrm{Ct}\, \varphi = u - e \cdot \mathrm{Si}\, u$, wie es nach 1 oder 482 : 2 sein soll. — *d.* Auch **Newton** fühlte, dass die durch solche Konstruktionen erhältlichen Werte häufig nicht genügen, und fügte darum noch eine ebenfalls ganz hübsche Methode bei, um aus einem Näherungswerte u' nach und nach bessere Werte zu finden. Dieselbe lässt sich in folgender Weise resümieren: Berechnet man

$$m' = u' - e \cdot \mathrm{Si}\, u' \qquad 3$$

so wird $m' \fallingdotseq m$ sein. Vermehrt man aber u' um $\Delta u'$, so erhält auch m' einen Zuwachs $\Delta m'$, so dass $m' + \Delta m' = u' + \Delta u' - e\, \mathrm{Si}\,(u' + \Delta u')$ wird, oder

$$\Delta m' \fallingdotseq (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u') \cdot \Delta u' \qquad \Delta u' \fallingdotseq \Delta m' : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u') \qquad 4$$

Setzt man daher successive

$$\begin{array}{lll} \Delta m' = m - u' + e \cdot \mathrm{Si}\, u' & \Delta u' = \Delta m' : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u') & u'' = u' + \Delta u' \\ \Delta m'' = m - u'' + e \cdot \mathrm{Si}\, u'' & \Delta u'' = \Delta m'' : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u'') & u''' = u'' + \Delta u'' \end{array} \qquad 5$$

etc., so hat man

$$u = u' + \Delta u' + \Delta u'' + \ldots \qquad 6$$

und wird sogar selten über $\Delta u''$ hinausgehen müssen, um ein gutes u zu erhalten.

488. Die Lösungen durch Näherung. — Eine zweite Klasse enthält die für näherungsweise Berechnung der excentrischen Anomalie gegebenen Vorschriften und ist, teils ihrer Natur nach, teils weil durch solche dem praktischen Bedürfnisse wirklich am besten Genüge geleistet wird, weitaus die zahlreichste. Nach den bereits mitgeteilten Verfahren dieser Art [a], und dem Hinweise auf die ebenfalls ausreichende Regula falsi, dürfte es jedoch hier genügen, noch speciell an die durch **Jacques Cassini** ausgedachte und sodann successive durch **Lacaille** und **Encke** etwas umgearbeitete Methode zu erinnern [b].

Zu 488: *a.* Vgl. 486 : c und 487 : d. — *b.* Jacques **Cassini** ging in seiner Abhandlung „Méthode de déterminer la première équation des Planètes suivant l'hypothèse de Kepler (Mém. Par. 1719)" wesentlich in folgender Weise vor: Sind M und M' gleichzeitige Lagen des wahren und mittlern Planeten, und ist M'' der M entsprechende Kreispunkt, so hat man nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze

$$\mathrm{Sect.}\ M'CP : a^2\pi = \mathrm{Sect.}\ MSP : ab\pi$$

und nach geometrischer Lehre

$$\mathrm{Sect.}\ M''SP : a^2\pi = \mathrm{Sect.}\ MSP : ab\pi$$

also müssen die Sectoren M'CP und M''SP gleich sein, folglich auch ihre Unterschiede $M''CM' = \tfrac{1}{2}\, Ax$ und $M''CS = \tfrac{1}{2}\, ES$ vom Sector M''CP, d. h. es besteht die Gleichheit

$$e \cdot \mathrm{Si}\, u = ES = Ax = M'M'' = u - m \qquad 1$$

Für $M'F \parallel M''C$ wird somit

$$FS = ES - M'G = Ax - \mathrm{Si}\, x \qquad 2$$

während anderseits aus den Dreiecken M'CS und M'FS

$$\frac{\text{Si}(x+y)}{\text{Si}(m+x+y)} = \frac{e}{1} \quad \text{oder} \quad \text{Tg}(x+y) = \frac{e \cdot \text{Si}\, m}{1 - e \cdot \text{Co}\, m} \qquad 3'$$

und
$$\text{Si}\, y = \frac{SF}{SM'} = \frac{Ax - \text{Si}\, x}{\sqrt{1 - 2e \cdot \text{Co}\, m + e^2}} \qquad 3''$$

folgen. Da ferner nach 3'

$$d(x+y) : dm = e \cdot (\text{Co}\, m - e) : (1 - 2e \cdot \text{Co}\, m + e^2)$$

ist, so nimmt $x + y$ für $\text{Co}\, m = e$ einen Maximalwert an, für welchen die 3 in

$$\text{Tg}(x+y) = e : \sqrt{1-e^2} \qquad \text{und} \qquad \text{Si}\, y = (Ax - \text{Si}\, x) : \sqrt{1-e^2}$$

übergehen. Es erreicht also für kleine Excentricitäten $x + y$ sogar im Maximum nur einen kleinen Wert, von dem für y fast nichts abfällt, — während dagegen allerdings bei zunehmender Excentricität nicht nur $x + y$, sondern wegen $Ax - \text{Si}\, x = {}^1/_6 (Ax)^3 - \ldots$ auch y, rasch ansteigt, wie die korrespondierenden Werte

$e =$	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	...
$x + y =$	$^1/_2{}^0$	1^0	3^0	6^0	12^0	...
$y =$	0''	$^1/_4$''	6''	40''	300''	...

zeigen. Man darf daher y nur für kleine Excentricitäten vernachlässigen, oder SM' und CM'' als parallel betrachten, und

$$u = m + \text{Atg}\,[e \cdot \text{Si}\, m : (1 - e \cdot \text{Co}\, m)] \qquad 4$$

setzen, muss dagegen für grössere Excentricitäten noch einen Abzug machen, welchen man nach 3

$$y \risingdotseq (A\alpha - \text{Si}\, \alpha) \cdot \text{Cs}\, 1'' \qquad 5$$

setzen kann, wo α den bei 4 für Atg erhaltenen Wert von $x + y$ bezeichnet. Um letztere Korrektion zu erleichtern, gab **Cassini** eine Hilfstafel, welche für $\alpha = 1$ bis 13^0 die Werte von $A\alpha - \text{Si}\, \alpha$ von 10 zu 10' bis auf 7 Decimalen, und diejenigen von $(A\alpha - \text{Si}\, \alpha) \cdot \text{Cs}\, 1''$ auf ganze Sekunden enthält. Da ferner aus $\triangle\, SCM''$

$$\text{Si}\, z : \text{Si}(u+z) = e : 1 \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\, z = e \cdot \text{Si}\, u : (1 - e \cdot \text{Co}\, u) \qquad 6$$

folgt, und nach den Eigenschaften der Ellipse

$$\text{Tg}\, v : \text{Tg}(u+z) = MD : M''D = \sqrt{1-e^2} : 1 \quad \text{oder} \quad \text{Tg}\, v = \text{Tg}(u+z) \cdot \sqrt{1-e^2} \qquad 7$$

ist, so konnte **Cassini** ohne Schwierigkeit aus der excentrischen die wahre Anomalie, und damit die sog. **Gleichung** $v - m$ berechnen, deren Auffindung er sich zur Aufgabe gestellt hatte. Und ebensoleicht würde es ihm geworden sein, den Radius vector nach

$$r = \sqrt{MD^2 + DS^2} = \sqrt{(1-e^2)\,\text{Si}^2 u + (e - \text{Co}\, u)^2} = a(1 - e \cdot \text{Co}\, u) \qquad 8$$

zu ermitteln, wenn auch dies in seinem Plane gelegen hätte. — Den von Cassini eingeschlagenen Weg verfolgte sodann **Lacaille** in seinen „Leçons d'astronomie (éd. 1761 p. 86—92, 246—48)", aber nur bis zum Nachweise, dass SM' nahezu parallel CM'' sei, — nahm nun $\angle M'SP = u'$ als ersten Näherungswert für u an, und setzte

$$u' = {}^1/_2\, m + \mu \qquad 9$$

wofür $\angle CM'S \risingdotseq u' - m = \mu - {}^1/_2\, m$ und $\angle CSM' \risingdotseq 180^0 - \mu - {}^1/_2\, m$ wird, so dass man (mit Hilfe von 65 : 4)

$$\frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{CM' + CS}{CM' - CS} = \frac{\text{Ct}\, {}^1/_2\, m}{\text{Ct}\, \mu} \qquad \text{oder} \qquad \text{Tg}\, \mu = \frac{1+e}{1-e} \cdot \text{Tg}\, {}^1/_2\, m \qquad 10$$

setzen, und somit nach 10 und 9 eine solche erste Annäherung u' wirklich finden kann. Da ferner aus 1

$$u = m + e \cdot \mathrm{Si}\, u \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad 11$$

folgt, so wird man successive aus

$$u'' = m + e \cdot \mathrm{Si}\, u' \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad u''' = m + e \cdot \mathrm{Si}\, u'' \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \quad \text{etc.} \qquad 12$$

immer bessere Annäherungen an u erhalten, und dabei so weit zu gehen haben, bis ein neues u sich von dem vorhergehenden (in der Regel schon u''' von u'') nicht mehr merklich unterscheidet, — worauf sich sodann r und v aus 484 : 3, 4 leicht ergeben. — Dagegen zog **Encke** (A. N. 714 von 1850) den von Lacaille nicht mehr benutzten zweiten Hauptgedanken Cassinis ebenfalls wieder zu Ehren, indem er folgenden eleganten Weg einschlug: Er setzte

$$x + y = u = m + \mathrm{Si}\, x \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad 13$$

woraus sich einerseits unmittelbar

$$y = m - z \qquad \text{wo} \qquad z = x - \mathrm{Si}\, x \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad 14$$

und anderseits mit Hilfe von 11

$$\mathrm{Si}\, x = (u - m) \cdot \mathrm{Si}\, 1'' = e \cdot \mathrm{Si}\, u = e \cdot \mathrm{Si}(x + y) \text{ oder } \mathrm{Tg}\, x = e \cdot \mathrm{Si}\, y : (1 - e\, \mathrm{Co}\, y) \qquad 15$$

ergiebt. Wenn man sich somit nach und nach durch

$$\begin{array}{lll} y_1 = m & \mathrm{Tg}\, x_1 = e \cdot \mathrm{Si}\, m : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, m) & z_1 = x_1 - \mathrm{Si}\, x_1 \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \\ y_2 = m - z_1 & \mathrm{Tg}\, x_2 = e \cdot \mathrm{Si}\, y_2 : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, y_2) & z_2 = x_2 - \mathrm{Si}\, x_2 \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad 16 \\ y_3 = m - z_2 & \mathrm{Tg}\, x_3 = e \cdot \mathrm{Si}\, y_3 : (1 - e \cdot \mathrm{Co}\, y_3) & \text{etc.} \end{array}$$

durchrechnet, bis die neuen y und x keinen merklichen Unterschied von den frühern mehr zeigen, was bei kleinen Excentricitäten schon beim 2. oder 3. Gange eintrifft, so giebt die Summe dieser letzten y und x einen guten Wert für u. Diese Methode, zu deren Gunsten **Encke** eine der Cassini'schen verwandte, unserer IX[a] (wo die Kolumne u mit z überschrieben sein sollte) entsprechende Tafel berechnet hat, welche für das Argument x den Wert von z giebt, wird von denjenigen Rechnern, die sich nicht selbst in einer Lösung der Kepler'schen Aufgabe versucht haben, wohl zumeist angewandt.

489. Die Lösung durch Reihen. — Eine dritte Klasse, welche durch E. S. **Jeaurat**[a] inauguriert wurde, löst die Kepler'sche Aufgabe dadurch, dass die geschlossenen Formeln 484 : 2, unter Elimination der Hilfsgrösse u, durch die Reihen

$$v = m + 2e \cdot \mathrm{Si}\, m + {}^5/_4\, e^2 \cdot \mathrm{Si}\, 2m + {}^1/_{12}\, e^3 (13 \cdot \mathrm{Si}\, 3m - 3 \cdot \mathrm{Si}\, m) + \ldots \qquad 1$$

$$r = a\,[1 - e \cdot \mathrm{Co}\, m - {}^1/_2\, e^2 (\mathrm{Co}\, 2m - 1) - {}^3/_8\, e^3 (\mathrm{Co}\, 3m - \mathrm{Co}\, m) - \ldots] \qquad 2$$

ersetzt werden[b], welche für kleine Excentricitäten rasch konvergieren und die bequemen Näherungsformeln

$$v \fallingdotseq m + 2e \cdot \mathrm{Si}\, m \qquad r \fallingdotseq a\,(1 - e \cdot \mathrm{Co}\, m) \qquad 3$$

ergeben. Wir werden von diesen, später auch durch **Lagrange** in ihm eigentümlicher Weise[c] abgeleiteten Reihen, noch im folgenden, namentlich (494) bei Besprechung der Zeitgleichung, Gebrauch zu machen haben.

Zu 489: *a.* Edme-Sébastien **Jeaurat** (Paris 1724 — ebenda 1803) war Ingénieur-Géographe, später Prof. math. an der Ecole militaire und Gründer

der dortigen Sternwarte, welche durch die Arbeiten von Lalande und seiner Schule so berühmt geworden ist. — *b.* **Jeaurat** ging in seinen Abhandlungen „Sur le mouvement des planètes et moyen de calculer leur équation du centre pour un temps donné, — und: Détermination directe de la distance d'une planète au Soleil (Sav. étr. IV von 1763) in folgender Weise vor: Er ersetzte in der Grundbeziehung 484 : 2′ unter Anwendung von 40 : 19 die Grössen m und u durch ihre Sinus, wodurch sie in

$$\mathrm{Si}\,m + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Si}^3 m + \tfrac{3}{40}\,\mathrm{Si}^5 m + \ldots = (1 - e)\,\mathrm{Si}\,u + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Si}^3 u + \tfrac{3}{40}\,\mathrm{Si}^5 u + \ldots$$

überging, und ihm „par les règles ordinaires du calcul des suites", also mutmasslich nach 37 : 1—3

$$\mathrm{Si}\,u = (1 + e + e^2 + e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}\,m - (\tfrac{1}{2}e + \tfrac{3}{2}e^2 + \tfrac{19}{6}e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}^3 m + \ldots \quad \mathbf{4}$$

und somit unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$\mathrm{Co}\,u = (1 - \mathrm{Si}^2 u)^{1/2} = 1 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Si}^2 u - \tfrac{1}{8}\,\mathrm{Si}^4 u - \ldots$$
$$= 1 - (\tfrac{1}{2} + e + \tfrac{3}{2}e^2 + 2e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}^2 m - (\tfrac{1}{8} - \tfrac{3}{4}e^2 - \tfrac{8}{3}e^3 - \ldots)\cdot\mathrm{Si}^4 m - \ldots \quad \mathbf{5}$$

ergab. Da nun (vgl. 488 Fig.) die Gleichheiten $MD = b\cdot\mathrm{Si}\,u = a\cdot\sqrt{1 - e^2}\cdot\mathrm{Si}\,u$ und $DS = a\cdot(e - \mathrm{Co}\,u)$ bestehen, so erhält man mit Hilfe von 4 und 5

$$\mathrm{Tg}\,v = -MD : DS = (1 - e^2)^{1/2}\cdot\mathrm{Si}\,u\cdot(\mathrm{Co}\,u - e)^{-1} =$$
$$= (1 + 2e + \tfrac{5}{2}e^2 + 3e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}\,m + (\tfrac{1}{2} + 2e + \tfrac{21}{4}e^2 + \tfrac{34}{3}e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}^3 m + \ldots \quad \mathbf{6}$$

oder nach 40 : 17

$$v = (1 + 2e + \tfrac{5}{2}e^2 + 3e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}\,m + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{13}{3}e^3 - \ldots)\cdot\mathrm{Si}^3 m + \ldots$$

Zieht man aber hievon die schon oben benutzte

$$m = \mathrm{Si}\,m + \tfrac{1}{6}\,\mathrm{Si}^3 m + \tfrac{3}{40}\,\mathrm{Si}^5 m + \ldots$$

ab, so erhält man

$$v - m = (2e + \tfrac{5}{2}e^2 + 3e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}\,m - (\tfrac{5}{4}e^2 + \tfrac{13}{3}e^3 + \ldots)\cdot\mathrm{Si}^3 m + \ldots \quad \mathbf{7}$$

oder unter Benutzung der 40 : 15 unsere obige 1, welche **Jeaurat** bis und mit e^9 entwickelte. Ferner ergiebt sich aus 484 : 2‴ unter Anwendung der 5 sofort auch unsere 2. — *c.* Setzt man in der von **Lagrange** speciell zu diesem Zwecke aufgestellten Reversionsformel 43 : 3 die Grössen $y = u$, $w = m$, $x = e$, $u = m + e\cdot\mathrm{Si}\,u$, $\psi(u) = (1 - e\cdot\mathrm{Co}\,u)^n$ und $z = n\cdot e\cdot\mathrm{Si}\,m\cdot(1 - e\cdot\mathrm{Co}\,m)^{n-1}$, so ergiebt sie sofort

$$(1 - e\cdot\mathrm{Co}\,u)^n = (1 - e\cdot\mathrm{Co}\,m)^n + \frac{n\cdot e^2}{1}\cdot\mathrm{Si}^2 m\cdot(1 - e\cdot\mathrm{Co}\,m)^{n-1} +$$
$$+ \frac{n\cdot e^3}{1\cdot 2}\cdot\frac{d\,[\mathrm{Si}^3 m\cdot(1 - e\cdot\mathrm{Co}\,m)^{n-1}]}{dm} + \ldots$$

und hieraus unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes, wenn man die angedeuteten Operationen ausführt, die Sinus in Cosinus umsetzt, und wieder die 40 : 15 benutzt, ohne Schwierigkeit, aber nicht gerade viel leichter als nach Jeaurats Verfahren die entsprechenden Beziehungen erhalten wurden,

$$(1 - e\cdot\mathrm{Co}\,u)^n = 1 - n\cdot e\cdot\mathrm{Co}\,m + \tfrac{1}{4}n\cdot e^2\,[(n - 3)\cdot\mathrm{Co}\,2m + n + 1] -$$
$$- \tfrac{1}{24}n\cdot e^3\,[(n^2 - 9n + 17)\cdot\mathrm{Co}\,3m + 3(n^2 - n - 3)\cdot\mathrm{Co}\,m] + \ldots \quad \mathbf{8}$$

woraus für $n = 1$ unter Benutzung von 484 : 2‴ sofort unsere 2 hervorgeht, während sich für $n = -2$

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + 2e\cdot\mathrm{Co}\,m + \tfrac{1}{2}e^2\cdot(5\,\mathrm{Co}\,2m + 1) + \tfrac{1}{4}e^3\cdot(13\,\mathrm{Co}\,3m + 3\,\mathrm{Co}\,m) + \ldots \quad \mathbf{9}$$

ergiebt. Aus letzterer Gleichung folgt aber, wenn man sie mit $dm \cdot \sqrt{1-e^2} = dm \cdot (1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \ldots)$ multipliziert, — ferner bedenkt, dass nach 482 : 11, 14 und 484 : 6

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g \cdot \sqrt{a(1-e^2)}}{r^2} \quad \text{und} \quad \frac{dt}{dm} = \frac{a^{3/2}}{g} \quad \text{also} \quad \frac{dv}{dm} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}}{r^2} \qquad 10$$

ist, — und endlich beidseitig integriert, auch noch unsere 1. — Vgl. „E. **Weiss**, Entwickelungen zum Lagrange'schen Reversionstheorem und Anwendung derselben auf die Lösung der Keppler'schen Gleichung. Wien 1885 in 4."

490. Die Lösungen mittelst Hilfstafeln und Hilfsapparaten. — In eine vierte Klasse endlich vereinige ich die zu Gunsten der Lösung des Kepler'schen Problemes angefertigten Hilfstafeln und Hilfsapparate. Erstere beruhen auf dem Umstande, dass die 484 : 2′ nur in Beziehung auf u transcendent ist, während man nach ihr mit grösster Leichtigkeit eine Tafel berechnet, welche m für die beiden Argumente e und u giebt; denn besitzt man eine solche Tafel, so kann diese offenbar auch rückwärts zur angenäherten Bestimmung von u aus e und m benutzt werden, während allerdings etwas genauere Werte nur bei grösserer Ausdehnung der Tafel, oder durch mühsame Interpolation erhältlich sind[a]. Für letztere beschränke ich mich, da ich denselben noch weniger einen grossen praktischen Wert beilegen kann, auf die betreffende Speciallitteratur zu verweisen[b].

Zu 490: *a.* Von den Tafeln, welche Annibale de **Gasparis** (Bugnara in den Abruzzen 1819 — Neapel 1892; Dir. Obs. auf Capo di Monte bei Neapel) und W. **Doberck** in den Astronomischen Nachrichten (1082 von 1857, 2002 von 1878) veröffentlichten, zeichnet sich die erstere durch ihre ingenieuse, aber die Anwendung etwas erschwerende, — die zweite dagegen durch ihre ganz ungekünstelte, nicht bei jedem neuen Gebrauche auch wieder ein neues Studium erfordernde Anlage aus; beide sind ausgedehnt genug, um ihnen in bequemer Weise, d. h. ohne strenge Interpolation, erste Annäherungswerte für u entnehmen, und sodann mit diesen nach einer der frühern Methoden genügende bessere Werte berechnen zu können, — entsprechen aber weitergehenden Forderungen nicht vollständig. Letzteres ist dagegen allerdings durch die Tafeln erreicht, welche neuerlich Johann Julius **Astrand** (Gothenburg 1819 geb.; Dir. Obs. Bergen), der schon früher in seiner Abhandlung „Om en Auxiliærtabel til Løsning of Kepler's Problem. Bergen 1887 in 4. (Mindre Afhandl. II)" sich in dieser Hinsicht bemühte, unter dem Titel „Hülfstafeln zur leichten und genauen Auflösung des Kepler'schen Problems. Leipzig 1890 in 8." publiziert hat: Diese geben nämlich für $e = 0{,}01$ bis $1{,}00$ (Interv. $0{,}01$) und für $m = 0$ bis 180° (Interv. $\frac{1}{2}^\circ$ bis 20°, dann 1°) die Werte von u bis auf Tausendstelsgrade genau, sowie den Zuwachs $\Delta u'$, welchen u bei einem bestimmten Werte von e erhält, wenn m um ein Interval zunimmt. Berechnet man nun auch noch, was je durch Vergleichung mit der nächstfolgenden Tafel leicht geschehen kann, den Zuwachs $\Delta u''$, welchen u bei einem bestimmten Werte von m erhält, wenn e um ein Interval zunimmt, — und bezeichnen dm und de die Grössen, um welche die gegebenen m und e von den nächst

kleinern der Tafel, denen nach derselben ein Wert u entsprechen würde, abweichen, so wird schon $u_0 = u + \Delta u' \cdot dm + \Delta u'' \cdot de$ bei diesen kleinen Intervallen eine ganz gute Annäherung sein, — ja wenn man noch $m_0 = u_0 - e \cdot Si\, u_0$ berechnet, und sodann an u_0 die Korrektion $(m - m_0) \cdot \Delta u'$ anbringt, so erhält man für u einen in weitaus den meisten Fällen ganz genügenden Wert. — *b.* Ich verweise für einen eigentlichen Apparat auf „**Carlini**, Descrizione di una machinetta che serve a risolvere il probleme di Keplero. Milano 1853 in 4.", — und für Hilfsnetze teils auf die Note von R. **Radau** im Bull. astron. 1884 VIII, teils auf die obenerwähnte von **Astrand** von 1887.

491. Die Rechnung bei Bahnen von grosser Excentricität. — Zur Zeit, wo **Kepler** seine Aufgabe stellte, handelte es sich nur um die Planeten, deren Bahnen sämtlich **kleine** Excentricitäten besassen, und in solchem Falle waren die im vorhergehenden besprochenen Hilfsmittel zur näherungsweisen Bestimmung der, einer seit dem Durchgange durch das Perihel verflossenen Zeit entsprechenden, wahren Anomalie und des zugehörenden Radius vectors ganz ausreichend. Als dann aber **Halley** die betreffenden Rechnungen zu Gunsten der Kometen auch auf parabolische Bahnen auszudehnen hatte, war er genötigt, in diesem Falle einen andern Weg einzuschlagen, und er führte damals in geschickter Weise die vom Radius vector in der gegebenen Zeit überstrichene Fläche unter dem Namen **mittlere Bewegung** als Hilfsgrösse ein, dadurch eine Tafel ermöglichend, welcher er für dieses Argument die beiden erwähnten Grössen entnehmen konnte [a]. Noch etwas später gelang es **Euler** zu zeigen, dass dieselben Hilfsmittel unter gewissen Modifikationen auch in dem Falle ausreichen, wo statt einer Parabel eine ihr nahe kommende Ellipse oder Hyperbel vorliegt [b], und was wir noch gegenwärtig unter dem Namen **Barker'sche Tafel** und **Bessel'sche Reihe** benutzen, stimmt bis auf Kleinigkeiten mit dem überein, was wir **Halley** und **Euler** verdanken und somit auch richtiger nach ihnen benennen würden [c].

Zu 491: *a.* Bezeichnen f und f' die Flächen der den Anomalien v und 90° entsprechenden Parabelsectoren, so hat man (76 : 5)

$$f = q^2 \cdot (\mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \mathrm{Tg}^3\, \tfrac{1}{2} v) \qquad f' = \tfrac{4}{3} \cdot q^2 \qquad \mathbf{1}$$

oder also, wenn mit **Halley** $\frac{1}{100}$ des sog. Parabelquadranten f' als eine Art Einheit eingeführt wird,

$$f = 75 \cdot (\mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2} v + \tfrac{1}{3} \mathrm{Tg}^3\, \tfrac{1}{2} v) \qquad \mathbf{2}$$

Anderseits hat man, wenn A, $B = \sqrt{A \cdot P}$, P die Halbaxen und den Parameter der Erdbahn bezeichnen, deren Fläche

$$F = A \cdot B \cdot \pi = A^{3/2} \cdot \sqrt{P} \cdot \pi \qquad \mathbf{3}$$

und daher, wenn nach früherer Übung A = 100000 angenommen und (das siderische Jahr gleich $365^d{,}25625$ gesetzt) die Hilfsgrösse μ durch

$$\mu = A \cdot \sqrt{2 A} \cdot \pi : 365{,}25625 = 384651{,}5 \qquad \mathbf{4}$$

eingeführt, sowie angenommen wird, dass die Fläche f der Zeit τ seit dem Durchgange durch das Perihel entspreche, nach dem in 484 abgeleiteten Newton'schen Satze

$$\frac{365{,}25625}{\tau} = \frac{F \cdot \sqrt{2q}}{f \cdot \sqrt{P}} \qquad \text{oder} \qquad f = \mu \cdot \tau \cdot \sqrt{q} \qquad \mathbf{5}$$

Man kann daher für jede Zeit τ die von **Halley** als „medius motus“ eingeführte Grösse f leicht berechnen, und sodann der 2 in Verbindung mit der Parabelgleichung 76 : 1, oder bequemer mit f als Argument unserer Tab. IX^a, deren Erstellung schon in 76 : a auseinandergesetzt wurde, die entsprechenden Werte von v und r entnehmen. — ***b.*** **Euler** ging hiefür in seiner „Determinatio orbitæ Cometæ A. 1742 observati (Mem. Berl. 1743)“ in folgender Weise vor: Da für die Ellipse $p = a(1 - e^2)$ und $q = a(1 - e)$, also $p = q(1 + e)$ ist, so entsprechen sich

$$e = 1 - \alpha \qquad \text{und} \qquad p = q(2 - \alpha) \qquad \mathbf{6}$$

wo in dem vorliegenden Falle α eine kleine Grösse ist. Setzt man nun

$$\begin{gathered} \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, v = t \qquad \text{oder} \qquad dv = 2 \cdot dt : (1 + t^2) \qquad \mathrm{Co}\, v = (1 - t^2) : (1 + t^2) \\ r = p : (1 + e\, \mathrm{Co}\, v) = q \cdot (1 + t^2) \cdot [1 - {}^1\!/\!_2\, \alpha \cdot t^2 - {}^1\!/\!_4\, \alpha^2 t^2 (1 - t^2) - \ldots] \end{gathered} \qquad \mathbf{7}$$

so erhält man, wenn f wieder die nach dem Periheldurchgange vom Radius vector überschriebene Fläche ist,

$$\begin{aligned} f &= {}^1\!/\!_2 \int r^2 \cdot dv = q^2 \cdot \int (1 + t^2) \cdot (1 - {}^1\!/\!_2\, \alpha t^2 - {}^1\!/\!_4\, \alpha^2 t^2 (1 - t^2) - \ldots) \cdot dt \\ &= q^2 [t + {}^1\!/\!_3\, t^3 - \alpha ({}^1\!/\!_3\, t^3 + {}^1\!/\!_5\, t^5) - \alpha^2 ({}^1\!/\!_6\, t^3 - {}^1\!/\!_{20}\, t^5 - {}^3\!/\!_{28}\, t^7) - \ldots] \end{aligned}$$

oder, da für diesen Fall in 5 der Parameter 2q in $q(2 - \alpha)$ übergeht, also $f = \mu \cdot \tau \cdot \sqrt{q(1 - {}^1\!/\!_2\, \alpha)}$ wird,

$$\mu \cdot \tau : q^{3/2} = t + {}^1\!/\!_3\, t^3 + \alpha ({}^1\!/\!_4\, t - {}^1\!/\!_4\, t^3 - {}^1\!/\!_5\, t^5) + \alpha^2 ({}^3\!/\!_{32}\, t - {}^7\!/\!_{32}\, t^3 + {}^3\!/\!_{28}\, t^7) + \ldots \qquad \mathbf{8}$$

Da die Berechnung von t aus τ, selbst in dem Falle, wo man nur die erste Potenz von α beibehält, die Lösung einer Gleichung 5. Grades erfordert, so schlug **Euler** folgenden indirekten Weg ein: Er setzte

$$\mu \cdot \tau : q^{3/2} = \theta + {}^1\!/\!_3\, \theta^3 \qquad \text{wo} \qquad \theta = \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, u \qquad \text{und} \qquad v = u + du \qquad \mathbf{9}$$

so dass

$$t = \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, v = \frac{\mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, u + \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, du}{1 - \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, u \cdot \mathrm{Tg}\, {}^1\!/\!_2\, du} = \theta + {}^1\!/\!_2\, du\, (1 + \theta^2)\, \mathrm{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{10}$$

war, — setzte sodann die beiden Werte von $\mu\tau : q^{3/2}$ in 8 und 9 einander gleich, — substituierte für t nach 10, dabei die Produkte und 2. Potenzen der kleinen Grössen α und $du \cdot \mathrm{Si}\, 1''$ weglassend, — und erhielt so (nach Beseitigung eines von ihm begangenen Rechnungsfehlers)

$$du = \alpha \cdot A \cdot \mathrm{Cs}\, 1'' \qquad \text{wo} \qquad A = \theta \cdot ({}^2\!/\!_5\, \theta^4 + {}^1\!/\!_2\, \theta^2 - {}^1\!/\!_2) : (1 + \theta^2)^2 \qquad \mathbf{11}$$

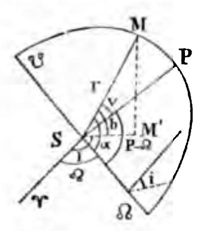
Er erstellte nun eine der Halley'schen entsprechende (ja durch sie in ihrem ersten Teile unter Anwendung des Argumentes 75 $m \cdot \tau : q^{3/2}$ zu ersetzende) Tafel, welche ihm für das Argument u die Werte für $\theta + {}^1\!/\!_3\, \theta^3$ und $\mathrm{Lg}\, (\theta + {}^1\!/\!_3\, \theta^3)$ gab, — schlug in dieser umgekehrt zu dem gegebenen Werte von $m \cdot \tau : q^{3/2}$ das zugehörige u auf, das ihm auch θ und somit schliesslich nach 11 (wo die Berechnung von A ebenfalls durch eine Tafel mit dem Argumente u erleichtert werden kann) auch noch die Korrektion du, also nach 9 den gesuchten Wert von v ergab. — ***c.*** Die von Thomas **Barker** (1721? — Lyndon-Hall in Rutlandshire 1809; Esquire) in seinem „Account of the discoveries concerning Comets, with the way to find their orbits. London 1757 in 4.“ gegebene und nach ihm benannte Hilfstafel giebt die dem Argumente v

(mit Interval von 5′) nach 2 zukommenden Werte von f, und ist somit eigentlich nur eine Umkehrung des ersten Teiles der Halley'schen Tafel, hat aber allerdings diese infolge ihrer bequemern Anlage und namentlich infolge des kleinern Intervals, das später durch Robert **Luther** (Schweidnitz 1822 geb.; Dir. der Benzenberg'schen Sternwarte in Düsseldorf; Vater von Wilhelm L., geb. 1860, Obs. Hamburg, — dagegen nicht verwandt mit Eduard L., Hamburg 1816 — Königsberg 1887, Dir. Obs. Königsberg, der fälschlich als Nachkomme des Reformators Martin L. bezeichnet wurde) zu Gunsten der Neu-Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung (501) auf 100″ reduziert wurde, fast ganz verdrängt. Die von **Lacaille** (Leçons 290—91), **Pingré** (Cométographie II 469), **Lalande** (Astronomie I, Suppl. 240), **Watson** (Astronomy), **Oppolzer** (Lehrbuch der Bahnbestimmung I), etc., zu entsprechenden Zwecken gegebenen Tafeln unterscheiden sich von der Halley-Barker'schen Tafel ebenfalls nur durch gewisse Variationen in Anlage, Argument, Interval, u. s. f. — Ebenso entspricht die durch **Bessel** in seiner Abhandlung „Über die Berechnung der wahren Anomalie in einer von der Parabel nicht sehr verschiedenen Bahn (Mon. Corr. XII von 1805)“ durchgeführte Untersuchung ganz der Euler-schen Arbeit, und führte ihn ebenfalls auf die 8 und 11, — einzig berücksichtigte Bessel auch noch α^2 und vervollständigte die Hilfstafeln. Für etwas andere Behandlung derselben Aufgaben wird auf die Theoria motus von **Gauss** (lib. 1, sect. 1), auf die Abhandlung „**Oppolzer**, Über die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen. München 1879 in 4.“, etc., verwiesen.

492. Die ältern Verfahren für Bestimmung des heliocentrischen und geocentrischen Ortes. — Sind für eine gewisse Zeit, durch Lösung der Kepler'schen Aufgabe, wahre Anomalie und Radius vector eines Wandelsternes bestimmt, so müssen sich durch Transformation der Coordinaten successive auch dessen **heliocentrische** und **geocentrische** Längen und Breiten berechnen lassen, und es ist in der That schon der ältern Zeit gelungen, unter geschickter Einführung vermittelnder Hilfsgrössen hiefür einen bequemen Weg aufzufinden [a].

Zu 492: *a.* Ein spätestens durch **Lacaille** vorgezeichneter Weg ist folgender: Zuerst berechnet man das sog. **Argument der Breite**

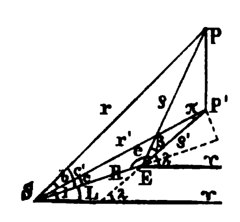
$$u = v + P - \Omega \qquad 1$$



Sodann benutzt man die aus dem rechtwinkligen Raumdreiecke S — M M′ Ω folgenden Formeln

$$\mathrm{Tg}(l - \Omega) = \mathrm{Tg}\,u \cdot \mathrm{Co}\,i \qquad \mathrm{Si}\,b = \mathrm{Si}\,u \cdot \mathrm{Si}\,i \qquad r' = r \cdot \mathrm{Co}\,b \qquad 2$$

um die heliocentrische Länge l und Breite b, sowie die sog. **kurtierte** Distanz r′ zu berechnen. Es ergiebt sich daraus auch die Grösse $u - (l - \Omega) = P + v - l$, welche man von der sog. **Länge in der Bahn** P + v abzuziehen hat, um die wahre Länge l zu erhalten, und die somit als **Reduktion** bezeichnet worden ist. — Führt man nun noch (vgl. Fig. auf folgender Seite) als Hilfswinkel die sog. **Commutation** c, die **Elongation** e und die **Parallaxe** π ein, so ergeben sich unmittelbar die Formeln



$c = l - L, \quad Co\,c' = Co\,b \cdot Co\,c, \quad \varrho^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cdot Co\,c'$

$\varrho' = r'\,Si\,c : Si\,e \qquad Tg\,e = r' \cdot Si\,c : (R - r' \cdot Co\,c)$ **3**

$Tg\,\beta = r \cdot Si\,b : \varrho' \qquad \pi = 180^\circ - c - e \qquad \lambda = l + \pi$

nach welchen sich, unter Voraussetzung, dass die heliocentrischen Coordinaten R und L der Erde bekannt seien, die geocentrischen Coordinaten ϱ, λ, β des Wandelsternes leicht berechnen lassen. Zur Bestimmung der e und π lässt sich übrigens auch, wie schon **Lalande** zeigte, die aus der Proportion

$$(r' + R) : (r' - R) = Tg\,{}^1\!/_2\,(e + \pi) : Tg\,{}^1\!/_2\,(e - \pi)$$

wegen $e + \pi = 180 - c$ hervorgehende bequeme Formel

$$Tg\,{}^1\!/_2\,(e - \pi) = Tg\,(x - 45^\circ) \cdot Ct\,{}^1\!/_2\,c \qquad wo \qquad Tg\,x = r' : R \qquad 4$$

ist, benutzen.

493. Die neuern Verfahren. — Die neuere Zeit hat für Berechnung der heliocentrischen Längen und Breiten wesentlich das frühere Verfahren beibehalten, dagegen für diejenige der entsprechenden geocentrischen Coordinaten meistens die gewöhnlichen Transformationsformeln der analytischen Geometrie als Grundlage benutzt [a]. Da man jedoch gegenwärtig auch die Wandelsterne mehr und mehr auf den Equator, anstatt wie früher auf die Ekliptik, bezieht [b], und in diesem Falle schliesslich noch eine weitere Transformation erfordert wird, so benützt man statt jenem Verfahren wohl auch eine von **Gauss** ausgedachte Methode, nach welcher man, ohne der Vermittlung durch jene zwei Systeme von Längen und Breiten zu bedürfen, die heliocentrischen Polarcoordinaten direkt in geocentrische Rektascensionen und Deklinationen umsetzen kann [c].

Zu 493: *a.* Ersetzt man in den Transformationsformeln 93 : 15 die r, v, w durch die heliocentrischen Coordinaten r, b, l des Wandelsternes, — die r', v', w' aber durch dessen geocentrische Coordinaten ϱ, β, λ, — und endlich die R, V, W durch die heliocentrischen Coordinaten R, B, L der Erde, so erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} \varrho \cdot Co\,\beta \cdot Co\,(\lambda - n) &= r \cdot Co\,b \cdot Co\,(l - n) - R \cdot Co\,B \cdot Co\,(L - n) \\ \varrho \cdot Co\,\beta \cdot Si\,(\lambda - n) &= r \cdot Co\,b \cdot Si\,(l - n) - R \cdot Co\,B \cdot Si\,(L - n) \\ \varrho \cdot Si\,\beta &= r \cdot Si\,b - R \cdot Si\,B \end{aligned} \qquad 1$$

wo n eine willkürliche Grösse ist. Ersetzt man letztere durch L, so gehen sie in

$$\begin{aligned} &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Co\,(\lambda - L) = r \cdot Co\,b \cdot Co\,(l - L) - R \cdot Co\,B \\ &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Si\,(\lambda - L) = r \cdot Co\,b \cdot Si\,(l - L) \qquad \varrho \cdot Si\,\beta = r \cdot Si\,b - R \cdot Si\,B \end{aligned} \qquad 2$$

über. Vernachlässigt man dagegen die nie eine volle Sekunde betragende Breite B der Erde und setzt für n successive 0, oder ${}^1\!/_2\,(l + L)$, oder ${}^1\!/_2\,(\lambda + L)$ ein, so erhält man nach 1 die drei Formelnsysteme

$$\begin{aligned} &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Co\,\lambda = r \cdot Co\,b \cdot Co\,l - R \cdot Co\,L \\ &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Si\,\lambda = r \cdot Co\,b \cdot Si\,l - R \cdot Si\,L \qquad \varrho \cdot Si\,\beta = r \cdot Si\,b \end{aligned} \qquad 3$$

$$\begin{aligned} &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Co\,[\lambda - {}^1\!/_2\,(l + L)] = (r \cdot Co\,b - R) \cdot Co\,{}^1\!/_2\,(l - L) \\ &\varrho \cdot Co\,\beta \cdot Si\,[\lambda - {}^1\!/_2\,(l + L)] = (r \cdot Co\,b + R) \cdot Si\,{}^1\!/_2\,(l - L) \qquad \varrho \cdot Si\,\beta = r \cdot Si\,b \end{aligned} \qquad 4$$

$$r \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, [l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)] = (\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \beta + R) \cdot \mathrm{Co}\, \tfrac{1}{2}(\lambda - L)$$
$$r \cdot \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Si}\, [l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)] = (\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \beta - R) \cdot \mathrm{Si}\, \tfrac{1}{2}(\lambda - L) \qquad r \cdot \mathrm{Si}\, b = \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \beta \qquad \mathbf{5}$$

Durch Quadrieren und Addieren der 2 erhält man aber

$$\varrho^2 = r^2 + R^2 - 2 r R \cdot [\mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Si}\, B + \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Co}\, B \cdot \mathrm{Co}\, (l - L)] \qquad \mathbf{6}$$

und, wenn man sowohl diese 6, als die zwei letzten 2 nach ϱ, β, λ und B differentiert,

$$\varrho \cdot \frac{d\varrho}{dB} = - r \cdot R\, [\mathrm{Si}\, b \cdot \mathrm{Co}\, B - \mathrm{Co}\, b \cdot \mathrm{Si}\, B \cdot \mathrm{Co}\, (l - L)]$$
$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \beta \cdot \frac{d\beta}{dB} + \mathrm{Si}\, \beta \cdot \frac{d\varrho}{dB} = - R \cdot \mathrm{Co}\, B \qquad \mathbf{7}$$
$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \beta \cdot \frac{d\lambda}{dB} - \mathrm{Tg}\, (\lambda - L) \cdot \left[\varrho \cdot \mathrm{Si}\, \beta \cdot \frac{d\beta}{dB} - \mathrm{Co}\, \beta \cdot \frac{d\varrho}{dB}\right] = 0$$

oder, wenn man B = 0 setzt,

$$\frac{d\varrho}{dB} = - R \cdot \mathrm{Si}\, \beta \qquad \frac{d\beta}{dB} = - \frac{R \cdot \mathrm{Co}\, \beta}{\varrho} \qquad \frac{d\lambda}{dB} = 0 \qquad \mathbf{8}$$

Hat man nun aus den heliocentrischen Coordinaten die geocentrischen zu berechnen, so macht man erst die Rechnung nach 4 und sucht dann nach 8 unter Einführung von $dB = B \cdot \mathrm{Si}\, 1''$ die wegen der momentanen Breite der Erde anzubringenden Verbesserungen. Hat man allfällig die umgekehrte Aufgabe zu lösen, so kommen entsprechend 8 und 5 zur Verwendung. — Anhangsweise mag noch folgende interessante, wenn auch nicht gerade hieher gehörende Anwendung von den 3 gemacht werden: Vernachlässigt man nämlich Excentricität und Neigung, d. h. setzt man $r = a$, $R = 1$, $b = 0 = \beta$ und führt die geocentrische Länge der Sonne mit $\odot = L + 180^\circ$ ein, so erhält man aus ihnen

$$\varrho \cdot \mathrm{Co}\, \lambda = a \cdot \mathrm{Co}\, l + \mathrm{Co}\, \odot \qquad \varrho \cdot \mathrm{Si}\, \lambda = a \cdot \mathrm{Si}\, l + \mathrm{Si}\, \odot \qquad \mathbf{9}$$

woraus sich successive

$$\mathrm{Tg}\, \lambda = \frac{A}{B}, \quad \mathrm{Tg}\, (\odot - \lambda) = \frac{a \cdot \mathrm{Si}\, (\odot - l)}{1 + a \cdot \mathrm{Co}\, (\odot - l)}, \quad (A^2 + B^2) \cdot d\lambda = B \cdot dA - A \cdot dB \qquad \mathbf{10}$$

ergeben, wo

$$A = a \cdot \mathrm{Si}\, l + \mathrm{Si}\, \odot \qquad dA = a \cdot \mathrm{Co}\, l \cdot dl + \mathrm{Co}\, \odot \cdot d\odot$$
$$B = a \cdot \mathrm{Co}\, l + \mathrm{Co}\, \odot \qquad dB = - a \cdot \mathrm{Si}\, l \cdot dl - \mathrm{Si}\, \odot \cdot d\odot \qquad \mathbf{11}$$

Bezeichnet man aber mit n und N die mittlern Bewegungen von Planet und Erde (oder Sonne), mit v und V die Geschwindigkeiten in der Bahn, und mit u und U die Umlaufszeiten, so ist

$$dl = n \cdot dt = (v : a) \cdot dt \qquad d\odot = N \cdot dt = V \cdot dt \qquad v = 2 a \pi : u$$
$$V = 2\pi : U \qquad u^2 : U^2 = a^3 : 1 \qquad V : v = \sqrt{a} \qquad \mathbf{12}$$

während aus 11 und 9 überdies $A^2 + B^2 = \varrho^2$ folgt. Man hat somit nach 10

$$\varrho^2 \cdot d\lambda : dt = (B \cdot dA - A \cdot dB) : dt = a \cdot v + V + (v + a \cdot V)\, \mathrm{Co}\, (\odot - l) \qquad \mathbf{13}$$

eine Beziehung, welche erlaubt, die in der sog. zweiten Ungleichheit der Alten (255) enthaltenen Wechsel in der scheinbaren Bewegung der Planeten festzustellen: Für die untere Konjunktion (u. Pl.) oder Opposition (o. Pl.) wird $l = L = \odot - 180^\circ$ oder $\odot - l = 180^\circ$, also nach 13

$$\varrho^2 \cdot d\lambda : dt = a \cdot v + V - (v + a \cdot V) = (v - V) \cdot (a - 1) \qquad \mathbf{14}$$

folglich (da nach 12 für die untern Planeten v — V positiv, für die obern

negativ, — im erstern Falle aber a — 1 negativ, und im zweiten positiv ist) immer $d\lambda : dt$ negativ oder die Bewegung retrograd. Von da ab wird der negative Überschuss geringer und erlischt, wenn

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \text{Co}(\odot - l) = -\frac{a \cdot v + V}{v + a \cdot V} = -\frac{a + \sqrt{a}}{1 + a \cdot \sqrt{a}} \qquad 15$$

wird, — ein Wert, welchem

$$\text{Si}(\odot - l) = (1 - a) \cdot \sqrt{1 + a} : (1 + a \cdot \sqrt{a}) \qquad 16$$

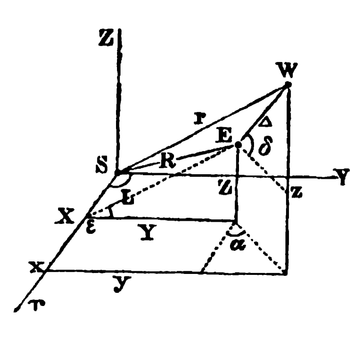
entspricht. Substituiert man aus 15 und 16 in 10, so erhält man für die Station

$$\text{Tg}(\odot - \lambda) = a : \sqrt{1 + a} \qquad 17$$

Nach 15 und 17 erhält man z. B. für

		$\odot - l =$	$\odot - \lambda =$
☿	oder a = 0,3871	126°	22°
♀	0,7233	167	29
♂	1,5237	164	42
♃	5,2028	125	65

b. Schon **Römer** sprach (vgl. Horrebow, Opera II 142) in einem 1700 I 24 an Leibnitz geschriebenen Briefe die Ansicht aus, dass es in den meisten Fällen zweckmässiger sei, sich auf den Equator als auf die Ekliptik zu beziehen. —



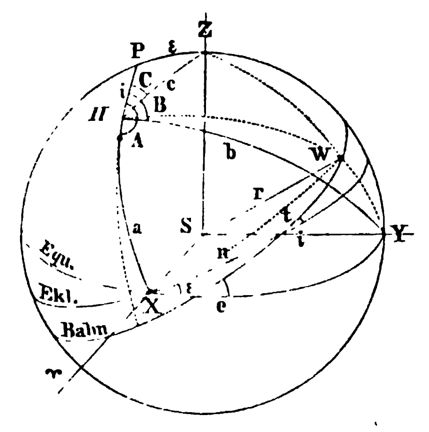
c. **Gauss** ging (vgl. Mon. Corr. IX von 1804) in folgender Weise vor: Bezeichnen x, y, z und X, Y, Z die Coordinaten von Planet und Erde in Beziehung auf ein durch die Sonne gelegtes Equatorsystem, Δ, α, δ aber die gesuchten geocentrischen Equator-Coordinaten des erstern, so hat man

$$x - X = \Delta \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \text{Co}\,\alpha$$
$$y - Y = \Delta \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,\alpha$$
$$z - Z = \Delta \cdot \text{Si}\,\delta$$

und hieraus folgen

$$\text{Tg}\,\alpha = (y - Y):(x - X) \quad \Delta \cdot \text{Co}\,\delta = (x - X) \cdot \text{Se}\,\alpha \quad \text{Tg}\,\delta = (z - Z):\Delta \cdot \text{Co}\,\delta \qquad 18$$

so dass in der That die Aufgabe gelöst ist, sobald man x, y, z und X, Y, Z zu finden weiss. Letztere drei Grössen ergeben sich nun aus



$$X = R \cdot \text{Co}\,L$$
$$Y = R \cdot \text{Si}\,L \cdot \text{Co}\,\varepsilon \qquad 19$$
$$Z = R \cdot \text{Si}\,L \cdot \text{Si}\,\varepsilon$$

wo R, L, ε die heliocentrischen Coordinaten der Erde und die Schiefe der Ekliptik bezeichnen, ohne Schwierigkeit. Um dagegen erstere zu erhalten, sah sich **Gauss** veranlasst, aus S mit dem Radius r eine Kugel zu beschreiben, — auf dieser Equator, Ekliptik und Bahnebene, sowie deren Pole Z, P und Π darzustellen, — die Distanzen a, b, c des Poles Π von X, Y, Z und die von $P\Pi$ mit ΠX, ΠY und ΠZ bestimmten Winkel

A, B, C als Hilfswinkel einzuführen, — endlich die Lage von W durch die Länge n des aufsteigenden Knotens, die Neigung i der Bahn und das Argument t der Breite zu bestimmen. Da nun $P\Pi W = 180^\circ - (90^\circ + t) = 90^\circ - t$ ist, so hat man offenbar die Winkel $X\Pi W = A + t - 90$, $Y\Pi W = B + t - 90$, $Z\Pi W = 90 - t - C$, und somit die Cosinus der Winkel, welche r mit den Axen bildet,

$$\text{Co}\,XW = \text{Si}\,a \cdot \text{Si}(A+t) \qquad \text{Co}\,YW = \text{Si}\,b \cdot \text{Si}(B+t) \qquad \text{Co}\,ZW = \text{Si}\,c \cdot \text{Si}(C+t)$$

Es ist folglich

$$x = r \cdot \text{Si}\,a \cdot \text{Si}(A+t) \qquad y = r \cdot \text{Si}\,b \cdot \text{Si}(B+t) \qquad z = r \cdot \text{Si}\,c \cdot \text{Si}(C+t) \qquad \mathbf{20}$$

und man kann daher auch x, y, z leicht finden, wenn man die a, b, c und A, B, C zu bestimmen weiss. Hiefür geben aber die Dreiecke $P\Pi X$, $P\Pi Y$, $P\Pi Z$, in welchen ausser der gemeinschaftlichen Seite i noch die Seiten 90°, $90^\circ + \varepsilon$, ε und die Winkel $90^\circ - n$, $180 - n$, $180 - n$ bekannt sind, sofort

$$\begin{array}{lll} \text{Ct}\,A = -\text{Co}\,i \cdot \text{Tg}\,n & \text{Co}\,a = \text{Si}\,i \cdot \text{Si}\,n & \text{Si}\,a = \text{Co}\,n : \text{Si}\,A \\ \text{Ct}\,B = \dfrac{\text{Ct}\,n}{\text{Co}\,G} \cdot \text{Co}(G+i) & \text{Co}\,b = -\dfrac{\text{Co}\,\varepsilon \cdot \text{Co}\,n}{\text{Co}\,G} \cdot \text{Si}(G+i) & \text{Si}\,b = \dfrac{\text{Co}\,\varepsilon \cdot \text{Si}\,n}{\text{Si}\,B} \qquad \mathbf{21} \\ \text{Ct}\,C = \dfrac{\text{Ct}\,\varepsilon}{\text{Si}\,n \cdot \text{Co}\,H} \cdot \text{Si}(H+i) & \text{Co}\,c = \dfrac{\text{Co}\,\varepsilon}{\text{Co}\,H} \cdot \text{Co}(H+\varepsilon) & \text{Si}\,c = \dfrac{\text{Si}\,\varepsilon \cdot \text{Si}\,n}{\text{Si}\,C} \end{array}$$

wo

$$\text{Tg}\,G = \text{Tg}\,\varepsilon : \text{Co}\,n \qquad \text{Tg}\,H = \text{Tg}\,\varepsilon \cdot \text{Co}\,n \qquad \mathbf{22}$$

wobei zu bemerken ist, dass für eine ganze Ephemeride eines bestimmten Wandelsternes a, b, c und A, B, C nur Ein Mal zu berechnen sind.

494. Die Zeitgleichung. — Die im vorhergehenden entwickelten Formeln und Reihen verschaffen auch die Möglichkeit, eine ganze Reihe anderer Fragen zu beantworten. So z. B. ergiebt sich daraus, dass die sog. **Mittelpunktsgleichung** $v - m$ ein Maximum f annimmt, wenn der Radius vector gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden Halbaxen wird [a], — dass gleichzeitig die Winkelgeschwindigkeit ihren mittlern Wert erreicht [b], — dass jener Maximalwert

$$f = 2 \cdot e + {}^{11}/_{48} \cdot e^3 + {}^{599}/_{5120} \cdot e^5 + {}^{17219}/_{229376} \cdot e^7 + \ldots \qquad \mathbf{1}$$

ist, also nur von der Excentricität abhängt [c], — etc. Namentlich aber wird es möglich, eine früher (193) kontrahierte Schuld abzulösen, nämlich die sog. **Zeitgleichung**

$$Z = M - W = A - L = (\lambda - L) + (A - \lambda) \qquad \mathbf{2}$$

wirklich zu bestimmen [d], indem sich nunmehr die Reihen

$$\lambda - L = (2e - {}^1/_4\,e^3) \cdot \text{Si}\,(L-P) + {}^5/_4\,e^2 \cdot \text{Si}\,2\,(L-P) + \\ + {}^{13}/_{12} \cdot e^3 \cdot \text{Si}\,3\,(L-P) + \ldots \qquad \mathbf{3}$$

$$A - \lambda = -(t \cdot \text{Si}\,2\lambda - {}^1/_2\,t^2 \cdot \text{Si}\,4\lambda + {}^1/_3\,t^3 \cdot \text{Si}\,6\lambda - \ldots) \cdot \text{Cs}\,1'' \qquad \mathbf{4}$$

ergeben [e], nach welchen, da $t = \text{Tg}^2\,{}^1/_2\,\varepsilon$ eine bekannte Grösse ist und L für jede beliebige Zeit als bekannt angesehen werden darf [f], in der That leicht der betreffende Wert von Z gefunden wird [g].

Zu 494: *a.* Aus den 484 : 3, 4, 7 erhält man ohne Schwierigkeit

$$dv = Si\,v \cdot \left(\frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r}\right) \cdot de + \frac{a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}}{r^2} \cdot dm \qquad 5$$

woraus für einen konstanten Wert von e

$$\frac{d(v-m)}{dm} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2} - 1 \quad \text{folgt, somit für} \quad r^2 = a^2 \cdot \sqrt{1-e^2} = a \cdot b \qquad 6$$

entsprechend obigem Satze, die Mittelpunktsgleichung ihren Maximalwert annimmt, wie dies **Lalande** schon 1761 (vgl. Astronomie p. 94) aussprach und Joh. Wilhelm **Camerer** (Ohnastetten in Würtemberg 1763 — Stuttgart 1847; Schüler von Lalande und Zach, dann Prof. math. und Prälat in Stuttgart) in verschiedener Weise, unter anderm (Berl. Jahrb. 1794) ähnlich wie oben erwies, — während man früher ohne weitere Prüfung den Maximalwert in den Scheitel der kleinen Axe verlegt hatte. — *b.* Da nach 482 : 11 die Winkelgeschwindigkeit $dv : dt = k : r^2$ und als konstante Flächengeschwindigkeit $\frac{1}{2} k = ab\pi : T$ ist, so erhält man für jenen Maximalpunkt $dv : dt = 2\pi : T$, d. h. die oben und auch schon durch **Lalande** ausgesprochene neue Eigenschaft. — *c.* Da ferner in dem durch den Maximalpunkt und die beiden Brennpunkte bestimmten Dreiecke die drei Seiten die Werte $r = \sqrt{a \cdot b} = a(1-e^2)^{1/4}$, $r' = 2a - r = a[2-(1-e^2)^{1/4}]$ und $2ae$ haben, so erhält man für die wahre Anomalie v die Beziehung

$$Co\,v = \frac{r'^2 - r^2 - 4a^2e^2}{2r \cdot 2ae} = -\frac{3}{2^2} \cdot e - \frac{3}{2^5} \cdot e^3 - \frac{5}{2^7} \cdot e^5 - \frac{45}{2^{11}} \cdot e^7 - \ldots \qquad 7$$

somit

$$Si\,v = \sqrt{1 - Co^2 v} = 1 - \frac{9}{2^5} \cdot e^2 - \frac{225}{2^{11}} \cdot e^4 - \frac{4233}{2^{16}} \cdot e^6 - \ldots \qquad 8$$

so dass mit Hilfe von 5 und 6

$$dv - dm = \left(2 + \frac{11}{2^4} \cdot e^2 + \frac{599}{2^{10}} \cdot e^4 + \frac{17219}{2^{15}} \cdot e^6 + \ldots\right) \cdot de \qquad 9$$

wird, woraus durch Integration sofort die schon von **Euler** in seinem „Mémoire sur la plus grande équation des planètes (Mém. Berl. 1746)" aufgestellte Reihe 1 hervorgeht. **Euler** leitete sodann noch aus derselben „par conversion", also mutmasslich nach der Moivre'schen Regel in 37, die umgekehrte Reihe

$$e = \frac{1}{2} f - \frac{11}{768} \cdot f^3 - \frac{587}{983040} \cdot f^5 - \ldots \qquad 10$$

ab, und nahm sich ferner die Mühe, eine Tafel zu berechnen, welche für jede Excentricität von 0,00 bis 1,00 die Werte von f giebt, also auch umgekehrt dazu dienen kann, zu gegebenem f das zugehörige g aufzuschlagen. Setzt man beispielsweise für die Erde $e = 0{,}0167712$, so erhält man nach 1 für dieselbe $f = 0{,}0335485$ oder, indem man mit Si 1" dividiert, $f = 1^0\, 55'\, 18'',843$. — *d.* Zur Vermittlung zwischen der sich in der Ekliptik ungleichförmig bewegenden, die Länge λ und die Rektascension A besitzenden **wahren Sonne**, und der (193) als Zeitregulator eingeführten, sich im Equator gleichförmig bewegenden, die Rektascension A' besitzenden **mittlern Sonne**, benutzt man noch eine **andere gedachte Sonne** der Länge L, welche sich gleichförmig in der Ekliptik bewegt, mit der wahren Sonne gleichzeitig durch das Perigeum und mit der mittlern Sonne gleichzeitig durch das Equinoktium geht, so dass $L = A'$ ist, folglich (vgl. 193) die 2 besteht. — Von den beiden Teilen der Zeitgleichung wird der erste $(\lambda - L)$ als **Gleichung**, der zweite $(A - \lambda)$ als

Reduktion bezeichnet. — *e.* Da offenbar, wenn P die Länge des Perihels giebt,

$$L = P + m \qquad \lambda = P + v \qquad \text{also} \qquad m = L - P \qquad v - m = \lambda - L$$

ist, so ergiebt sich die 3 unmittelbar aus 489 : 1. Löst man in dieser Gleichung die Sinus goniometrisch nach L und P auf, — führt die von **Hansen** für die Epoche 1850 I 0 m. Z. Paris bestimmten Werte e = 0,0167712 und P = 280° 21′ 41″,0 ein, — und dividiert, um Sekunden zu erhalten, rechts durch Si 1″, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \lambda - L &= 1244'',31 \cdot Si\ L - 67'',82 \cdot Si\ 2L - 0'',54 \cdot Si\ 3L + \ldots \\ &\quad + 6805,56 \cdot Co\ L + 25,66 \cdot Co\ 2L - 0,90 \cdot Co\ 3L + \ldots \\ &= 82^s,95 \cdot Si\ L - 4^s,52 \cdot Si\ 2L - 0^s,04 \cdot Si\ 3L + \ldots \\ &\quad + 453,70 \cdot Co\ L + 1,71 \cdot Co\ 2L - 0,06 \cdot Co\ 3L + \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{11}$$

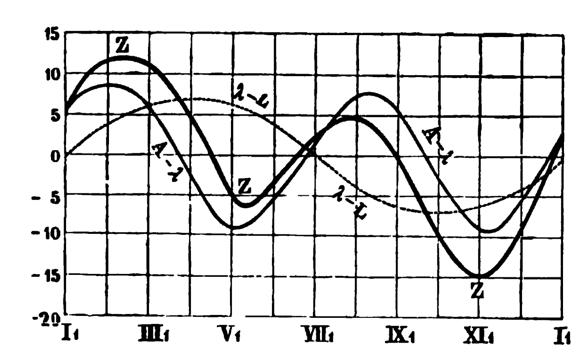
Es lässt sich somit $\lambda - L$ und sodann auch λ für jede Zeit leicht berechnen, sobald man für dieselbe L zu bestimmen weiss, worauf wir unter f zurückkommen werden. — Ferner hat man nach 197, wenn $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 31'',0$ die Schiefe der Ekliptik bezeichnet,

$$Tg\,A = Tg\,\lambda \cdot Co\,\varepsilon \qquad Tg\,(A - \lambda) = -\frac{t \cdot Si\,2\lambda}{1 + t \cdot Co\,2\lambda} \qquad \text{wo} \qquad t = Tg^2\,{}^1\!/_2\,\varepsilon \qquad \mathbf{12}$$

ist, woraus sich nach 40 : 22 oder 24 unmittelbar unsere 4 und sodann für obigen Wert von ε

$$\begin{aligned} A - \lambda &= -8891'',56 \cdot Si\,2\lambda + 191'',65 \cdot Si\,4\lambda - 5'',51 \cdot Si\,6\lambda + \ldots \\ &= -599^s,44 \cdot Si\,2\lambda + 12^s,78 \cdot Si\,4\lambda - 0^s,37 \cdot Si\,6\lambda + \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{13}$$

ergiebt. — Jeder der beiden Teile der Zeitgleichung stellt sich (entsprechend beistehender Figur) durch eine regelmässige Wellenlinie dar; aber da der erstere Teil (mit Argument L) annähernd ein Jahr, der zweite (mit Argument 2λ) nur ein halbes Jahr zur Periode hat, und auch zwischen L und λ ein merklicher Unterschied besteht, so geht aus ihrer Vereinigung (entsprechend der in 193 gegebenen Übersicht) eine ziemlich unregelmässige Welle hervor, welche die Abscissenaxe zwar noch wie die letztere der beiden Komponenten in 4 Punkten schneidet, und wie diese zwei Berge und zwei Thäler besitzt, aber mit verschiedenen Abständen und Höhen. — Auf weitern Detail kann ich hier nicht wohl eintreten und erwähne nur noch, dass die tägliche Änderung der Zeitgleichung zwischen + 30ˢ (XII 23) und — 21ˢ (IX 15) variiert, und im Zusammenhange damit auch die Länge des wahren Tages zwischen $24^h\ 0^m\ 30^s = 24 \cdot \overline{0},000251$ und $23^h\ 59^m\ 39^s = 24 \cdot \overline{9,999894}$ m. Z. schwankt, während der Sterntag beständig $23^h\ 56^m\ 4^s = 24 \cdot \overline{9},998812$ hält. — *f.* Um die Länge L der gedachten oder die ihr gleiche Rektascension der mittlern Sonne, welche offenbar mit der **Sternzeit im mittlern Mittage** übereinkommt, für irgend ein Datum zu bestimmen, geht man davon aus, dass nach **Hansen** der Epoche 1850 I 0



m. Z. Paris $L = 18^h\ 39^m\ 9^s{,}261$ war, und $\Delta L = \frac{24^h}{365{,}242208} = 3^m\ 56^s{,}555$

ihre tägliche Zunahme bezeichnet, so dass sie in 365^d um $\Delta L \cdot 365 = 23^h\ 59^m\ 2^s{,}706 = -57^s{,}294$, in 366^d aber um $3^m\ 56^s{,}555 - 57^s{,}294 = 2^m\ 59^s{,}261$, in einem Jahrviert um $2^m\ 59^s{,}261 - 3 \times 57^s{,}294 = 7^s{,}379$, und endlich in jeder Sekunde um $\Delta L : 86400 = 0^s{,}002738$ zunimmt. Will man nun z. B. L für 1891 VII 7 berechnen, so hat man zu bedenken, dass dieses Datum von der Epoche um 10 Jahrviert + 1 gem. Jahr + 188 Tage abliegt, somit nach obigem für Paris

$$L = 18^h\ 39^m\ 9^s{,}261 + 10 \times 7^s{,}379 - 57^s{,}294 + 188 \times 3^m\ 56^s{,}555 = 7^h\ 0^m\ 38^s{,}097$$

und für einen um l Sekunden östlich gelegenen Ort um $l \cdot 0^s{,}002738$ zu vermindern ist, so z. B. für Bern um $3^s{,}35$, für Berlin um $7^s{,}27$, für Greenwich um $-1^s{,}54$, etc. — Noch weit bequemer kann allerdings L erhalten werden, wenn man eine unserer VIII^c entsprechende Tafel besitzt, welche in unserm Beispiele für VII 5, die restierenden zwei Tage und das Jahr 1891 die Werte $6^h\ 51^m\ 16^s{,}0$, $7^m\ 53^s{,}1$ und $1^m\ 26^s{,}3$ giebt, aus deren Summe $L = 7^h\ 0^m\ 35^s{,}4$ folgt. Da diese Tafel zunächst für Bern angelegt ist, so hat man die erhaltene Zahl z. B. für Paris noch um $3^s{,}3$ zu vermehren, so dass für diesen Ort $7^h\ 0^m\ 38^s{,}7$ erhalten wird, — also nahe der obige, und noch näher der von der Conn. d. t. auf $7^h\ 0^m\ 38^s{,}4$ gesetzte Wert. — Die Tafel VIII^c giebt auch noch die Mittel an die Hand, L für die Nutation in Länge (610) zu verbessern, indem sie z. B. für VII 5 und 1891 die beiden Zahlen $N_1 = 27$, $N_2 = 803$ und sodann für das Argument $N_1 + N_2 = 830$ die Korrektion $-1^s{,}0$ ergiebt. Es ist hiebei das einer vollen Nutationsperiode entsprechende Argument gleich 1000, also dessen jährliche Veränderung gleich 1000 : 18,6 = 53,8 angenommen. Man darf jedoch in den meisten Anwendungen von dieser periodischen, die engen Grenzen $\pm 1^s{,}15$ besitzenden Verbesserung Umgang nehmen. — *g.* Dass schon **Hipparch** den ersten Teil der Zeitgleichung kannte, geht aus der von ihm (204) aufgestellten Theorie der Sonne unzweifelhaft hervor, und da wir bei **Ptolemäus** (vgl. Alm. Halma I 206 und Delambre II 139) auch den zweiten Teil besprochen finden, ohne dass er denselben als eigene Erfindung bezeichnet, so ist mit Sicherheit anzunehmen, dass er ihn ebenfalls den Hipparch'schen Überlieferungen entnahm. Jedenfalls enthält der Almagest, wenn auch die Zeitgleichung damals noch nicht in der jetzt gebräuchlichen Weise zur Richtigstellung der Zeitangaben praktische Verwendung fand, eine genauere und bündigere Darstellung derselben, als wir sie noch lange nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften im Abendlande, ja noch in der Tychonischen Zeit finden, und es gehört zu den grossen Verdiensten von **Flamsteed**, dass er zu derselben zurückführte: In seiner Abhandlung „De inæqualitate dierum solarium dissertatio astronomica. Londini 1672 in 4. (auch 1678 als Anhang zu Horocii opera posthuma abgedruckt)" zeigte er zunächst, dass die Zeitgleichung jedesmal verschwindet, wenn die Sonne einerseits im Perigeum oder Apogeum steht ($\lambda - L = 0$) und anderseits zugleich der betreffende Punkt mit einem der Kardinalpunkte der Ekliptik zusammenfällt ($A - \lambda = 0$), und gab an, dass er aus seinen Sonnentafeln gefunden habe, es müsse das Perigeum der Sonne 1167 XII 14 um $19^h\ 25^m\ 36^s$ mit dem Wintersolstitium zusammengefallen sein, so dass dieses Datum als Ausgangspunkt zu wählen sei. Obschon er sich nun hierin täuschte, so gelang es ihm doch, für das Jahr 1672, wo nach ihm das Apogeum in 7° ♋ fiel, für jeden Grad der Sonnenlänge die Zeitgleichung ziemlich richtig zu berechnen, und seine Tafel behielt fast allgemeine Geltung, bis **Maskelyne** seine

Note „Some remarks upon the equation of time and the true manner of computing it (Ph. Tr. 1764)" publizierte und in dem für 1767 und folgende Jahre unter seiner Leitung erstellten „Nautical almanac" nach jetziger Übung die Zeitgleichung jedem Tage des Jahres beigeben liess, was dann alsbald auch in den übrigen astronomischen Jahrbüchern geschah. — Über die Aufstellung von eigentlichen Formeln und Reihen zur Berechnung der Zeitgleichung ist schon oben das notwendigste mitgeteilt worden; doch ist noch beizufügen, dass **Delambre** (Astr. II 197), indem er $A - \lambda \doteq -R$ und $\lambda - L = E$ setzte, unsere 4 auf die Form

$$R = t \cdot Si\,2\,(L + E) \cdot Cs\,1'' + t^2 \cdot Si\,4\,(L + E) \cdot Cs\,2'' + t^3\,Si\,6\,(L + E) \cdot Cs\,3'' + \ldots$$

brachte, — hierauf die Klammern goniometrisch löste, — sodann für Si 2 E, Si 4 E, ... Co 2 E, Co 4 E, ... die mit Hilfe der Sinus- und Cosinus-Reihen (unter Berücksichtigung, dass rechts E durch E · Si 1'' zu ersetzen ist, folglich die höhern Potenzen in Wegfall kommen) aus 11 folgenden Werte substituierte, — die sich dabei ergebenden Potenzen und Produkte goniometrisch in Sinus und Cosinus von Vielfachen umsetzte, — und schliesslich den erhaltenen Wert von dem Werte von E selbst abzog. Er erhielt so für die Zeitgleichung eine, ihre Berechnung ohne vorhergehende Bestimmung von λ erlaubende Reihe der Form

$$Z = A_1 \cdot Si\,L + A_2 \cdot Si\,2\,L + \ldots + B_1 \cdot Co\,L + B_2 \cdot Co\,2\,L + \ldots + C \qquad \mathbf{14}$$

wo den Epochen 1810 und 1910 die Koeffizienten

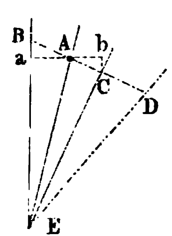
	1810	1910		1810	1910
	s	s		s	s
A_1	80,8285	94,7577	B_1	435,6206	432,1741
A_2	— 596,7782	— 595,9051	B_2	1,6681	1,9513
A_3	— 3,4849	— 4,0801	B_3	— 18,7880	— 18,0148
A_4	12,9426	12,8025	B_4	— 0,8812	— 0,8959
A_5	0,1441	0,1685	B_5	0,8468	0,8377
A_6	— 0,3725	— 0,3609	B_6	0,0030	0,0033
C	0,0415	0,0477			

entsprechen, und nur zu bedauern ist, dass durch die bereits vollzogene Summation die Natur der Zeitgleichung vollständig verdeckt wird. — Anhangsweise ist noch zu erwähnen, dass man schon im vorigen Jahrhundert versucht hat, sowohl sog. **Equationsuhren** zu konstruieren, welche die wahre Zeit, als auch Sonnenuhren, welche die mittlere Zeit zeigen. Erstere wurden durch Einschalten eines eigenen Mechanismus erhalten, dessen Hauptteil eine (vgl. „Berthoud, Essai sur l'horlogerie. Paris 1763, 2 Vol. in 4.", cap. 19) mit Hilfe einer Zeitgleichungstafel (entsprechend unserer VIII^c) durch Versuch bestimmte unregelmässige (somit ganz unpassend als Ellipse bezeichnete) Leit-Kurve bildet, und es gelang, nachdem schon 1717 die Pariser Uhrenmacher **Lebon** und Jul. **Leroy** der dortigen Akademie erste Werke dieser Art vorgelegt hatten, dem ebenfalls in Paris etablierten Uhrmacher Joh. Georg **Enderli** (Basel 1714 — Paris 1753; vgl. Notiz 442), jenen Mechanismus in so zweckmässiger Weise zu erstellen, dass die Beschreibung desselben, welche Antoine **Thiout** (Jonville bei Vésoul 1694 — Paris 1767; Uhrmacher in Paris) in seinem „Traité de l'horlogerie. Paris 1741 in 4. (pag. 252—57)" gab, und **Berthoud** auf pag. 188

bis 194 seiner „Histoire (vgl. 13)" fast wörtlich reproduzierte, noch auf neuere Werke dieser Art ziemlich vollständig passt. Bei den Sonnenuhren wurde, und zwar, wenn ich mich nicht irre, zuerst durch **Mallet**, der Mittagslinie eine ebenfalls mit Hilfe der Tafel ermittelte, der Lemniscate verwandte Schleifenlinie beigegeben, an welcher man den Eintritt des mittlern Mittages beobachten konnte.

495. Die Bestimmung der Bahnelemente. — Als im Verlaufe des 17. Jahrhunderts die Kometen in das Sonnensystem eingebürgert wurden und ein Jahrhundert später die Entdeckung eines neuen Planeten folgte, reichte die früher (486) angedeutete Weise, die Bahnelemente zu bestimmen, nicht mehr aus, da man die Kometen nur auf einem kleinen Teile ihrer Bahn beobachten konnte und auch bei dem Planeten nicht abwarten wollte, bis er einen Umlauf vollendet habe. Es entstand so die neue Aufgabe, die **Elemente der Bahn aus einer beschränkten Anzahl geocentrischer Beobachtungen** abzuleiten[a]. — Von theoretischer Seite standen nun der Lösung dieser Aufgabe keine grossen Schwierigkeiten entgegen, da (73) ein Kegelschnitt, dessen Brennpunkt man kennt, durch drei seiner Punkte bestimmt ist, und es somit (gewissermassen in Umkehrung der Kepler'schen Aufgabe) möglich sein muss, aus den durch Messung ermittelten geocentrischen Coordinaten (λ, β, ϱ) dreier Positionen und den aus der Theorie der Sonne erhältlichen gleichzeitigen heliocentrischen Coordinaten (L, R) der Erde, erst die entsprechenden heliocentrischen Coordinaten (l, b, r) des Wandelsternes und sodann die Bahnelemente zu berechnen; aber praktisch reichten leider die vorhandenen Methoden zur Bestimmung der unentbehrlichen Distanzen (ϱ) nicht aus und es waren, wie uns die folgenden Nummern zeigen werden, noch grosse Anstrengungen nötig, um zum Ziele zu gelangen[b].

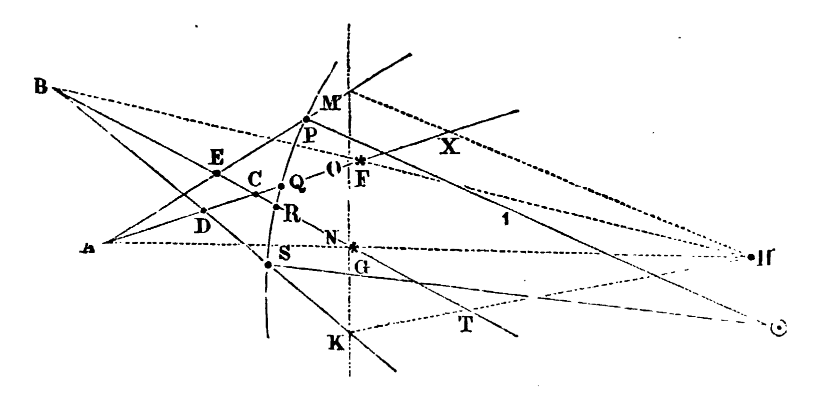
Zu 495: *a.* Für die Anhänger des Ptolemäischen Systemes existierte natürlich diese neue Aufgabe noch nicht, und es ist unbegreiflich, wie **Mädler** (Gesch. I 330) sagen konnte, es habe **Cassini** schon 1669 gezeigt, „dass drei vollständige Beobachtungen hinreichen, um die Bahn eines Planeten oder Kometen in einer Kepler'schen Ellipse zu bestimmen"; denn für Cassini war, nach Vorschrift der Kirche, die Erde der Mittelpunkt der Welt geblieben, und wenn er auch an die Wiederkehr der Kometen dachte, so liess er sie in einer Kreisbahn von sehr grossem Durchmesser um die Erde gehen, wobei er dann allerdings letztere sehr excentrisch zu stellen hatte, um begreiflich zu machen, dass man den Kometen nur auf einer relativ kurzen Strecke seiner Bahn sehen könne. Er kam wohl überhaupt (vgl. Pingré I 115) in der Kometentheorie nicht weiter, als dass er aus drei zu den Zeiten t_1, t_2, t_3 bestimmten Kometenörtern in folgender Weise auf die Richtung schloss, nach welcher der Komet zu einer folgenden Zeit t_4 zu sehen sein werde: Er zeichnete sich die Richtungen auf, unter welchen er zu jenen drei Zeiten von der Erde E



aus den Kometen gesehen hatte, — wählte in der mittleren einen beliebigen Punkt A, — legte durch diesen (wohl in der durch die Figur angedeuteten, noch bei Newton auf pag. 484 der Principien vorkommenden Weise) eine Gerade BC so, dass sich BA : AC = $(t_2 - t_1) : (t_3 - t_2)$ verhielt, — und verlängerte endlich diese so bis D, dass CD : BC = $(t_4 - t_3) : (t_3 - t_1)$ wurde. Es war sodann ED annähernd die zur Zeit t_4 zu erwartende Richtung, und zugleich erkannte er aus der Lage von BC, ob sich der Komet der Erde noch nähere oder sich schon wieder von ihr entferne. Dies Verfahren war für den Standpunkt von Cassini ganz nett; aber darin eine Bahnbestimmung und Ephemeridenrechnung sehen zu wollen, ist denn doch des Guten etwas zu viel. — *b.* Für die sich anfänglich gegenüberstehenden zwei Hauptmethoden der Distanzbestimmung, der direkten und indirekten, vgl. die Nummern 496 und 497.

496. Versuche direkter Distanzbestimmung. — Anfänglich wurden mehrere Versuche gemacht, die Distanzbestimmung durch Zuziehung weiterer Beobachtungen, durch Einführung vereinfachender Annahmen, etc., **direkt** zu bewältigen; aber so scharfsinnig die betreffenden Arbeiten eines Sir Christopher **Wren** [a], eines Pierre **Bouguer** [b], etc., waren, so bewährten sich die von ihnen vorgeschlagenen Methoden in der Praxis dennoch nicht, und es mussten ganz andere, nämlich **indirekte** Wege eingeschlagen werden, um einen wirklichen Erfolg zu erhalten [c].

Zu 496: *a.* Sir Christopher **Wren** (East-Knoyle in Wiltshire 1632 — London 1723; Prof. astr. et math. London und Oxford, dann Generalinspektor der k. Gebäude; vgl. Elmes, London 1823 in 8., und: Phillimore, London 1883 in 8.) ging zur Bestimmung der Distanz (vgl. Gregory II 633 und Pingré II 285) von der Voraussetzung aus, es seien 4 Beobachtungen eines Kometen nach Länge und Breite gegeben und es seien die Zwischenzeiten θ', θ'', θ''' dieser



Beobachtungen klein genug, um die Bewegung während der Zeit $\theta' + \theta'' + \theta'''$ als geradlinig und gleichförmig ansehen zu dürfen. Sind nun P, Q, R, S die

Lagen der Erde zur Zeit der 4 Beobachtungen, — PM, QO, RN, SK die durch die Längen gegebenen Projektionen der Visuren nach dem Kometen, — A und B die paarweise durch sie bestimmten Schnittpunkte, — F und G aber zwei Hilfspunkte, welche den Proportionen

$$CD : CF = \theta''' : (\theta' + \theta'') \qquad CE : CG = \theta' : (\theta'' + \theta''') \qquad 1$$

entsprechen, — so hat man nach **Wren** einfach durch die Verbindungslinien AG und BF den Punkt H zu bestimmen, und sodann HM || BG und HK || AF zu ziehen, um die Punkte M und K, d. h. die Projektion der Kometenbahn zu erhalten, aus der sich die kurtierten (also mit Hilfe der Breiten auch die wirklichen) Distanzen von Erde und Sonne in der für Verzeichnung der Erdbahn gewählten Sonnendistanz P⊙ als Einheit von selbst ergeben. Der Beweis für die theoretische Richtigkeit dieser Konstruktion ist sehr leicht zu leisten: Aus HM || BG und HK || AF folgen nämlich

$$\frac{KN}{NM} = \frac{KT}{TH} \qquad \frac{MX}{XH} = \frac{CE}{CG} \qquad \frac{KT}{TH} = \frac{CD}{CF} \qquad \frac{MO}{OK} = \frac{MX}{XH}$$

Man hat daher mit Hilfe von 1

$$KN:NM = CD:CF = \theta''' : (\theta' + \theta'') \quad \text{oder} \quad KN:MK = \theta''' : (\theta' + \theta'' + \theta''')$$
$$MO:OK = CE:CG = \theta' : (\theta'' + \theta''') \qquad MO:MK = \theta' : (\theta' + \theta'' + \theta''')$$

also auch

$$(KN + MO):MK = (\theta' + \theta''') : (\theta' + \theta'' + \theta''') \qquad ON:MK = \theta'' : (\theta' + \theta'' + \theta''')$$

womit die Proportion

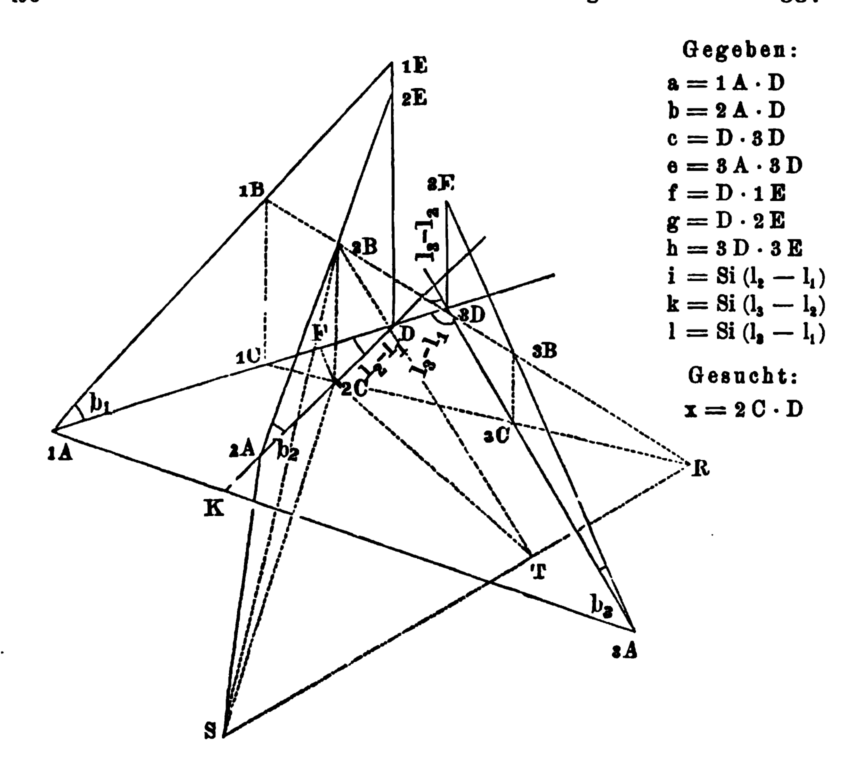
$$MO : ON : NK :: \theta' : \theta'' : \theta''' \qquad 2$$

und damit die Richtigkeit der Konstruktion erwiesen ist; aber dennoch vermag dieselbe kein, auch nur den bescheidensten Ansprüchen genügendes Resultat zu liefern, da in Praxi die Schnitte bei A, B und H unter gar zu spitzen Winkeln entstehen. — ***b.* Bouguer** stellte sich in seiner Abhandlung „De la détermination de l'orbite des Comètes (Mém. Par. 1733)“ zunächst die, eine Distanzbestimmung involvierende Aufgabe: „Trois observations étant données à peu de distance l'une de l'autre, déterminer sa vîtesse avec la petite portion de son orbite“, und löste dieselbe in folgender Weise: Man kennt die Lagen 1 A, 2 A, 3 A der Erde gegen die Sonne S zur Zeit der drei Beobachtungen, — ferner die geocentrischen Längen l_1, l_2, l_3 und Breiten b_1, b_2, b_3 des Kometen, — folglich die Richtungen 1 A · 1 E, 2 A · 2 E, 3 A . 3 E, in welchen der in 1 B, 2 B, 3 B stehende Komet jeweilen von der Erde aus gesehen wird, und die Projektionen 1 A · D, 2 A · D und 3 A · 3 D dieser Richtungen, — somit den in ganzen Linien ausgeführten Teil der Figur, und überdies noch die Beobachtungszeiten 1 T, 2 T, 3 T, deren Differenzen 2 T — 1 T = m und 3 T — 1 T = n sein mögen. Dagegen ist unbekannt die Bahn 1 B · 2 B · 3 B des Kometen, sowie ihre Projektion 1 C · 2 C · 3 C auf die Ekliptik, — jedoch darf bei den kleinen Intervallen die Bahn als geradlinig und als mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen, angenommen werden. — Zunächst hat man nun

$$b : g = (b - x) : 2B \cdot 2C \qquad \text{oder} \qquad 2B \cdot 2C = g\,(b - x) : b \qquad 3$$

Sodann, wenn 2 C · F || 3 A · 3 D gezogen wird, aus Dreieck 2 C · D · F

$$2C \cdot F = i \cdot x : l \qquad \text{und} \qquad F \cdot D = k \cdot x : l \qquad 4$$



Gegeben:

a = 1 A · D
b = 2 A · D
c = D · 3 D
e = 3 A · 3 D
f = D · 1 E
g = D · 2 E
h = 3 D · 3 E
i = Si $(l_2 - l_1)$
k = Si $(l_3 - l_2)$
l = Si $(l_3 - l_1)$

Gesucht:

x = 2 C · D

und somit unter Benutzung der Voraussetzung

$$\frac{3\,C \cdot 3\,D}{2\,C \cdot F} = \frac{1\,C \cdot 3\,C}{1\,C \cdot 2\,C} = \frac{n}{m} \qquad 3\,C \cdot 3\,D = \frac{i \cdot n \cdot x}{l \cdot m} \qquad 3\,A \cdot 3\,C = e - \frac{i \cdot n \cdot x}{l \cdot m} \tag{5}$$

Ferner

$$\frac{3\,B \cdot 3\,C}{3\,A \cdot 3\,C} = \frac{h}{e} \quad \text{oder} \quad 3\,B \cdot 3\,C = h\left(1 - \frac{i \cdot n \cdot x}{e \cdot l \cdot m}\right)$$

$$\frac{1\,C \cdot F}{3\,D \cdot F} = \frac{1\,C \cdot 2\,C}{2\,C \cdot 3\,C} = \frac{m}{n - m} \qquad 1\,C \cdot F = \frac{m}{n - m}\left(c + \frac{k \cdot x}{l}\right) \tag{6}$$

und somit

$$1\,C \cdot D = 1\,C \cdot F + F \cdot D = (c \cdot l \cdot m + k \cdot n \cdot x) : l\,(n - m) \tag{7}$$

Endlich

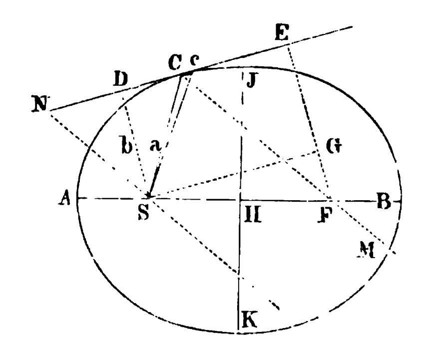
$$\frac{1\,B \cdot 1\,C}{a - 1\,C \cdot D} = \frac{f}{a} \quad \text{oder} \quad 1\,B \cdot 1\,C = f\left(1 - \frac{c \cdot l \cdot m + k \cdot n \cdot x}{a \cdot l \cdot (n - m)}\right) \tag{8}$$

Da nun nach Voraussetzung (1 B · 1 C — 2 B · 2 C) : (1 B · 1 C — 3 B · 3 C) = m : n, so erhält man durch Substitution aus 8, 3, 6 und Auflösung der entstehenden Gleichung nach x

$$x = l \cdot \left[(f - g) \cdot n + \left(h - f - \frac{c \cdot f}{a}\right) \cdot m\right] : \left(\frac{h \cdot i}{e} - \frac{g \cdot l}{b} + \frac{f \cdot k}{a}\right) \cdot n \tag{9}$$

und kann somit x, sowie nach 3—8 alle andern darauf bezogenen Distanzen wirklich berechnen, — folglich auch 2 A · 2 C = b — x, 2 B · 2 C, die **geocentrische Distanz** 2 A · 2 B, und, mit Hilfe der heliocentrischen Coordinaten der Erde, ebenso die **heliocentrische Distanz** 2 B · S, womit die uns zunächst

berührende **Distanzenbestimmung** vollständig erledigt ist. Da man ferner in Dreieck 1 C · 3 D · 3 C zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, so kann man 1 C · 3 C und hieraus in Verbindung mit 1 B · 1 C — 3 B · 3 C auch noch 1 B · 3 B berechnen, — folglich, da diese Strecke in der Zeit n durchlaufen wird, die von **Bouguer** verlangte **Geschwindigkeit in der Bahn.** Überdies darf man die Gerade 1 B · 3 B als eine Bahntangente in 2 B, und jedenfalls als eine der Bahnebene angehörende Gerade betrachten, also bestimmt der Durchschnittspunkt R von 1 B · 3 B und 1 C · 3 C mit S die **Knotenlinie,** und die von 2 C aus auf diese gezogene Senkrechte 2 C · T mit 2 B · T den die **Neigung der Bahnebene** gegen die Ekliptik messenden Senkrechtenwinkel. — Anhangsweise bleibt zu erwähnen, dass **Bouguer** an diese von theoretischem Standpunkte aus so hübsche, sich **für elementaren Unterricht ganz vorzüglich** eignende und mit Unrecht in der Neuzeit fast vergessene Auflösung noch die zweite Aufgabe anschloss: „Connaissant la plus petite portion de l'orbite d'une Comète, ou la tangente de cette orbite dans un seul point avec la vîtesse de la Comète, déterminer les dimensions de l'orbite entière et toutes les autres circonstances du mouvement", und dieselbe in folgender, ebenfalls höchst bemerkenswerter und in obigem Sinne noch jetzt brauchbarer Weise löste: Ist $Cc = e$ das aus dem vorhergehenden bekannte, in der Zeit f durchlaufene Bahnstück und S die Sonne, so dass auch $SC = a$, $\angle SCD$ und somit $SD = b$ bekannte Grössen sind, so besteht die Aufgabe, die beiden Axen $AB = x$ und $JK = y$ nach Lage und Grösse zu bestimmen, sowie die Umlaufszeit t. Bezeichnen nun q und n Axe und Umlaufszeit eines bekannten Planeten, so hat man nach dem dritten Kepler'schen Gesetze



$$t^2 : n^2 = x^3 : q^3 \qquad \text{oder} \qquad t = n \cdot x^{3/2} : q^{3/2} \qquad \mathbf{10}$$

Da ferner der kleine Sector $CSc = \frac{1}{2} b \cdot e$ ist, so hat man, wenn T die Fläche der ganzen Ellipse bezeichnet, nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze

$$T : \tfrac{1}{2} b \cdot e = t : f \qquad \text{oder} \qquad t = 2 f \cdot T : (b \cdot e) \qquad \mathbf{11}$$

Nun ist nach den Eigenschaften der Ellipse, wenn F der zweite Brennpunkt ist, $CF = x - a$ und überdies $\angle DCS = \angle ECF$ oder (wenn $FE \parallel SD$) $\triangle DCS \sim \triangle ECF$, also

$$EF = b \cdot (x - a) : a \qquad CE = (x - a) \cdot \sqrt{a^2 - b^2} : a \qquad \mathbf{12}$$

Zieht man aber $SG \parallel DE$, so hat man

$$GF = EF - b = b(x - 2a) : a \qquad SG = DC + CE = x \cdot \sqrt{a^2 - b^2} : a$$
$$SF = \sqrt{SG^2 + GF^2} = \sqrt{x^2 - 4b^2(x - a) : a}, \quad y = \sqrt{x^2 - SF^2} = 2b \cdot \sqrt{ax - a^2} : a \qquad \mathbf{13}$$

somit, da $T = \frac{1}{4} x \cdot y \cdot \pi$ ist und 11 besteht,

$$T = b \cdot x \cdot \pi \cdot \sqrt{ax - a^2} : 2a \qquad t = f \cdot x \cdot \pi \cdot \sqrt{ax - a^2} : ae \qquad \mathbf{14}$$

folglich durch Gleichsetzung der beiden Werte von t in 10 und 14

$$x = a \cdot f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 : g \qquad \text{wo} \qquad g = f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 - a \cdot e^2 \cdot n^2 \qquad \mathbf{15}$$

und mit Hilfe hievon nach 13 und 10

$$y = 2b \cdot e \cdot n \cdot \sqrt{a:g} \qquad t = n \cdot f^3 \cdot q^3 \cdot \pi^3 \cdot a^{3/2} : g^{3/2} \qquad \mathbf{16}$$

$$SF = \sqrt{a^2 \cdot f^4 \cdot q^6 \cdot \pi^4 - 4a \cdot b^2 \cdot e^2 \cdot n^2 \cdot f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 + 4a^2 \cdot b^2 \cdot e^4 \cdot n^4} : g$$

Ist nun

$$a \cdot e^2 \cdot n^2 < f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 \quad \text{oder} \quad e < f \cdot q \cdot \pi \sqrt{q:a} : n \qquad \mathbf{17}$$

so werden g und x positiv, und es erhalten auch y und t reelle Werte, so dass sich der Komet wirklich in einer Ellipse bewegt und in angebbarer Zeit einen Umlauf vollendet, — speciell in einem Kreise, wenn

$$e' = f \cdot q \cdot \pi \cdot \sqrt{q:2a} : n \qquad \mathbf{18}$$

ist, da nach 15 in diesem Falle $x = 2a$, also beständig $a = \frac{1}{2}x$ wird. Ist dagegen

$$a \cdot e^2 \cdot n^2 = f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 \quad \text{oder} \quad e'' = f \cdot q \cdot \pi \cdot \sqrt{q:a} : n = e' \cdot \sqrt{2} \qquad \mathbf{19}$$

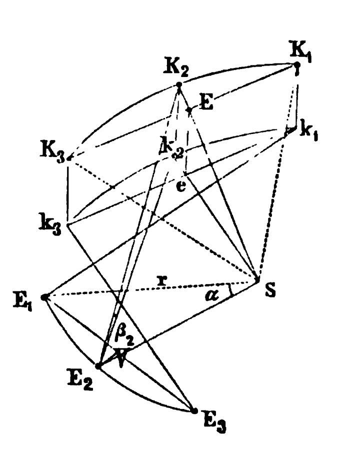
also $g = 0$, so werden x, y, t unendlich gross und es wird eine Parabel beschrieben. Für den Fall endlich, wo

$$a \cdot e^2 \cdot n^2 > f^2 \cdot q^3 \cdot \pi^2 \quad \text{oder} \quad e''' > e' \cdot \sqrt{2} \qquad \mathbf{20}$$

werden g und x negativ, während y und t imaginäre Werte annehmen, so dass sich der Komet in einer Hyperbel bewegt. — Nachdem x nach 15 berechnet und dadurch zugleich die Natur der Bahn gefunden ist, so kann man in allen drei Fällen die Lage der Axe x und die zugehörigen Scheitelpunkte leicht finden, indem man CM so zieht, dass $\angle ECM = \angle DCS$ ist: Bei der Ellipse hat man sodann auf CM von C aus $x - a$ vorwärts, — bei der Hyperbel aber $x + a$ rückwärts abzutragen, um je den zweiten Brennpunkt und durch Verbindung mit S die Lage der Axe zu finden, — während bei der Parabel $SN \parallel CM$ letztere unmittelbar ergiebt. Alles übrige wird dann sozusagen von selbst erhalten. — *c.* Vgl. für diese indirekten Methoden zunächst die folgende Nummer.

497. Ältere indirekte Bestimmungen. — Die indirekten Wege haben das Gemeinsame, dass zunächst für einzelne nicht unmittelbar bestimmbare Grössen (wie z. B. die geocentrischen Distanzen) plausible Suppositionen gemacht, dann unter diesen weitere Operationen vorgenommen (z. B. die heliocentrischen Radien vectoren und die von diesen eingeschlossenen Flächen berechnet), die erhaltenen Resultate (z. B. mit Hilfe des zweiten Kepler'schen Gesetzes) auf ihre Zulässigkeit geprüft und je nach dem Ergebnisse neue Suppositionen gemacht werden; mit diesen letztern wird sodann derselbe Weg nochmals durchlaufen, und so fort, bis endlich Alles in befriedigender Weise klappt. Das hiebei einzuschlagende Verfahren lässt sich ungemein variieren, und so sind die durch **Newton** am Schlusse seiner Principien gegebenen, noch äusserst mühsamen Vorschriften [a], schon um die Mitte des vorigen Jahrhunderts von seinen Nachfolgern, unter welchen hier speciell die **Loys** de Cheseaux und **Lacaille** erwähnt werden mögen, durch wesentlich andere, viel rascher und sicherer zum Ziele führende Methoden ersetzt worden [b].

Zu 497: *a.* Sind K_1, K_2, K_3 drei den Zeiten t_1, t_2, t_3 entsprechende Kometenörter, — k_1, k_2, k_3 ihre Projektionen auf die Ekliptik, — E_1, E_2, E_3 die gleichzeitigen Örter der Erde, — und S die Sonne, so stellte sich **Newton** die Aufgabe, aus den geocentrischen Längen und Breiten der K, unter Benutzung der Tafelörter der E, eine Parabel des Brennpunktes S zu bestimmen, welche möglichst nahe durch die K führe, und löste dieselbe wesentlich in folgender Weise: Nachdem er, unter Annahme eines beliebigen Masses für $E_2 S$, die Erdörter E_1, E_2, E_3 aufgetragen, und die sich aus Vergleich der Längen von Sonne und Komet ergebenden Richtungen $E_1 k_1$, $E_2 k_2$, $E_3 k_3$ gezogen, machte er für die Lage des Punktes k_2 irgend eine ihm plausibel erscheinende Annahme, — mass dann in seiner Figur, welcher er auch $E_2 V$ entnehmen konnte, $E_2 k_2$ und $S k_2$ ab, — berechnete mit Hilfe der gegebenen Breite β_2 die Grössen $K_2 k_2 = E_2 k_2 \cdot Tg\,\beta_2$ und $S K_2 = \sqrt{S k_2^2 + K_2 k_2^2}$, und sodann aus der Proportion



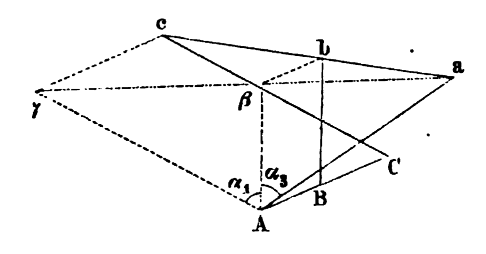
$$E_2 V : k_2 e = S K_2^3 : S E_2^2 \cdot S k_2 \qquad 1$$

den Wert von $k_2 e$, welcher ihm den Punkt e ergab, durch welchen er nunmehr die Gerade $k_1 k_3$ so legte, dass der Proportion

$$k_1 e : e k_3 = (t_2 - t_1) : (t_3 - t_2) \qquad 2$$

Genüge geleistet war, — mass nun $E_1 k_1$ und $E_3 k_3$ ab, — berechnete daraus $K_1 k_1 = E_1 k_1 \cdot Tg\,\beta_1$ und $K_3 k_3 = E_3 k_3 \cdot Tg\,\beta_3$, — und legte schliesslich von dem Brennpunkte S aus durch die so erhaltenen Punkte K_1 und K_3 eine Parabel, welche für ihn eine erste Annäherung an die Kometenbahn bildete. — Dass die 2 nahezu richtig ist, versteht sich wohl von selbst, und die Zulässigkeit der 1 kann in folgender Weise mit genügender Schärfe nachgewiesen werden: Da (484) die Erde in ihrer, als kreisförmig zu betrachtenden Bahn die Geschwindigkeit $f : \sqrt{r}$ besitzt, so braucht sie, um den Bogen $E_1 E_2$ zu durchlaufen, die Zeit $t = E_1 E_2 \cdot \sqrt{r} : f = 2 \cdot r^{3/2} \cdot Si\ {}^1/_2\,\alpha : f$. In dieser Zeit würde sie aber (111 : 2) mit der ihr nach dem Gravitationsgesetze zukommenden Beschleunigung $f^2 : r^2$ durch den Raum $^1/_2 \cdot (f^2 : r^2) \cdot t^2 = 2 r \cdot Si^2\ {}^1/_2\,\alpha$ fallen, d. h. durch den, falls die 2. Beobachtung nahe in der Mitte zwischen der 1. und 3. liegt, mit $E_2 V$ übereinstimmenden Pfeil. Ebenso würde der Komet nahezu in derselben Zeit, welche er zum Durchlaufen des Bogens $K_1 K_2$ braucht, durch $K_2 E$ fallen. Folglich muss, da nach dem Gravitationsgesetze sich die Fallräume in gleichen Zeiten umgekehrt wie die Quadrate der Abstände verhalten, die Proportion $K_2 E : E_2 V = E_2 S^2 : K_2 S^2$ wenigstens sehr nahe bestehen, und aus dieser geht, wenn man sie mit der aus der Figur folgenden $K_2 E : k_2 e = K_2 S : k_2 S$ verbindet, unsere 1 hervor, so dass nur noch die Frage offen bleibt, ob die eingangs getroffene Wahl des Punktes k_2 eine richtige war. Um auch noch diese zu beantworten, kann man z. B. aus den erhaltenen Radien vectoren $S K_1$, $S K_3$ und ihrem Winkel (76) die zwei entsprechenden wahren Anomalien, und aus diesen (491) die zum Durchlaufen des Parabelbogens $K_1 K_3$

nötige Zeit berechnen. Stimmt diese mit der wirklich gebrauchten Zeit $t_3 - t_1$ überein, so war die Annahme gut, — gegenteils macht man eine zweite Annahme, — führt für diese die ganze Operation nochmals durch, — bestimmt neuerdings den resultierenden Fehler, — sucht dann nach Vorschrift der Regula falsi eine bessere Annahme, etc., bis endlich eine befriedigende Übereinstimmung erzielt ist und somit die letzterhaltenen Resultate als gut angesehen werden dürfen. — Obschon obige Darstellung, gegenüber der von **Newton** selbst gegebenen, durch Weglassung verschiedener, an gewisse Eigenschaften der Parabel (wie z. B. die 76 : 17) anlehnende Subtilitäten ungemein vereinfacht wurde, bleibt diese Methode, sei es, dass man sie nach ihrem Autor konstruktiv behandelt, sei es, dass man mit **Halley** (vgl. Buch V der „Elementa" von Gregory und die Schrift von Barker in 491) die Konstruktion durch Rechnung ersetzt, ungemein mühsam, und es wird niemandem mehr einfallen, dieselbe zu benutzen; dagegen behält sie, teils als **erste** indirekte Methode, teils weil **Newton** sie an dem Kometen von 1680 erprobte, und ganz besonders weil **Halley** seine berühmte Kometentafel (575) mit Hilfe derselben erstellte, von hervorragendem historischem Interesse. — *b*. In seinem „Traité de la Comète qui a paru 1743 et 1744. Lausanne 1744 in 8." ging **Loys** für die Bahnbestimmung von folgender origineller Betrachtung aus: Bewegt sich ein Körper in den Zeiten t_3 und t_1 von A nach B und von B nach C, — ein anderer in denselben Zeiten von a nach b und von b nach c, und sind die beschriebenen Wege den Zeiten proportional, so werden (gleichviel ob A C und a c in derselben Ebene liegen oder nicht) **einerseits**, wenn man $b\beta \# AB$ und $c\gamma \# AC$ macht, die Punkte a, β, γ in einer Geraden liegen, und **anderseits** wird diese Gerade $a\gamma$ den Weg darstellen, welchen a scheinbar durchläuft, wenn man A in Gedanken festhält. Da nun nach den gemachten Annahmen

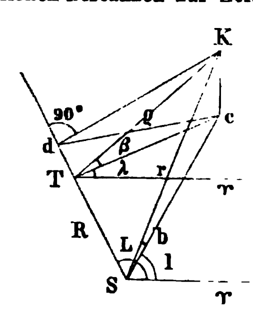


$$\frac{t_3}{t_1} = \frac{AB}{BC} = \frac{ab}{bc} = \frac{a\beta}{\beta\gamma} = \frac{\triangle aA\beta}{\triangle \beta A\gamma} = \frac{{}^1/_2\, aA \cdot \beta A \cdot Si\,\alpha_3}{{}^1/_2\, \beta A \cdot \gamma A \cdot Si\,\alpha_1}$$

so muss somit

$$aA : cC = (t_3 \cdot Si\,\alpha_1) : (t_1 \cdot Si\,\alpha_3) \qquad 3$$

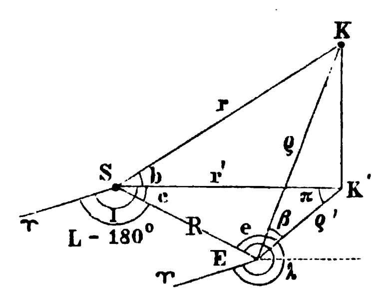
sein, und man kann daher aus den Zwischenzeiten der Beobachtungen und den von A aus gemessenen scheinbaren Distanzen das Verhältnis der wirklichen Distanzen zur Zeit der 1. und 3. Beobachtung berechnen. **Loys** brachte nun, um der Krümmung der Erdbahn Rechnung zu tragen oder gewissermassen die 2. Beobachtung in die der 1. und 3. entsprechende Sehne zu verlegen, an die beobachtete Länge λ_2 eine unter plausibeln Annahmen bestimmte kleine Korrektion an, und fand sodann nach 3, dass, wenn er $\varrho_1 = 10000$ annehme, $\varrho_3 = 9511$ sei, während nach den Sonnentafeln, sofern $R_1 = 10000$ gesetzt werde, sich $R_3 = 9994$ ergebe. **Versuchsweise** annehmend, dass die beiden eingeführten Einheiten gleich seien, konnte er nunmehr (vgl. die beistehende Figur, in welcher S, T, K der Reihe

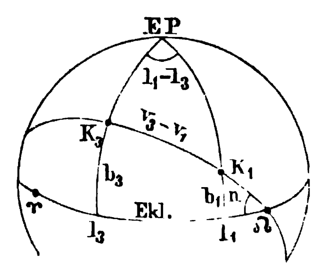


nach Sonne, Erde und Komet bezeichnen) durch leichte trigonometrische Rechnung die heliocentrischen Coordinaten $r_1 b_1 l_1$ und $r_3 b_3 l_3$ des Kometen berechnen, sodann successive auch den Winkel (r_1, r_3), die Bahnsehne $k = K_1 K_3$, und das Verhältnis der Fläche F des zwischen r_1 und r_3 liegenden Parabelsectors zur Wurzel aus dem doppelten Parameter 2 q finden. Für letzteres Verhältnis erhielt **Loys** nach der ihm (vgl. 498) eigentümlichen Formel

$$F : \sqrt{4q} = {}^1/_4 \, k \cdot \sqrt[4]{r_1 \cdot r_3} \qquad 4$$

den Wert $\overline{5{,}08442}$, während er für das entsprechende Verhältnis bei der Erde (unter Benutzung jener R_1 und R_3, aber in sonst nicht näher dargelegter Weise) den merklich kleinern Wert $\overline{5{,}07318}$ fand, — also nicht die von dem Newton'schen Gesetze in 484 geforderte Gleichheit. Er zog aus diesem Fehlbetrage von 1124 logarithmischen Einheiten den richtigen Schluss, dass R_1 mehr als 10000 der für die ϱ benutzten Einheiten halten müsse, — setzte nun in **zweiter Annahme** $R_1 = 11000$, — wiederholte damit die frühere Rechnung, die nunmehr einen Überschuss von 544 log. Einheiten ergab, — und fand sodann mit Hilfe der Regula falsi, dass $R_1 \fallingdotseq 10674$ sei, womit für ihn die Distanzenbestimmung in ganz hübscher Weise erledigt war. — Fast zu derselben Zeit, wo Loys die soeben besprochene Arbeit ausführte, löste **Lacaille** (wie Lalande mitteilt infolge einer durch Maraldi erhaltenen Anregung) in seiner Abhandlung „Sur les observations et la théorie des comètes qui ont paru depuis le commencement de ce siècle (Mém. Par. 1746)", unter Anwendung auf den Kometen von 1742, die Aufgabe, aus drei Beobachtungen der geocentrischen Länge λ und Breite β eines Kometen eine Parabel zu bestimmen, welche folgenden vier Bedingungen genüge: 1) „Ihr Brennpunkt soll in der Sonne liegen. 2) Sie soll durch die zwei Punkte gehen, welche durch die zwei äussersten Beobachtungen bestimmt werden. 3) Sie soll so beschaffen sein, dass der durch jene zwei Punkte begrenzte Parabelbogen in der Zwischenzeit durch einen Kometen wirklich durchlaufen werden konnte. 4) Sie soll auch durch den der mittlern Beobachtung entsprechenden Punkt führen." Da er nun aus Betrachtung der beistehenden Figur ersah, dass er sich für jede der Beobachtungen successive durch die Dreiecke SEK', KEK' und KSK' durcharbeiten könnte, wenn er den bekannten Grössen R, β und $e = L - \lambda$ noch r' beizufügen hätte, so machte er in Berücksichtigung der speciellen Erscheinung des Kometen von 1742 und der „par un premier calcul d'approximation" erhaltenen Ergebnisse, die **erste Annahme**, es möchte $r_1' = 0{,}879$ und $r_3' = 0{,}957$ sein, — berechnete nun die heliocentrischen Coordinaten $l_1 b_1 r_1$ und $l_3 b_3 r_3$, — mit ihrer Hilfe die der Differenz der wahren Anomalien v_1 und v_3 entsprechende Distanz $K_1 K_3$, — und endlich successive nach den unsern 76 : 9, 1, 4; 483 : 1 und 491 : 5 entsprechenden Formeln





$$\text{Tg}\ {}^1\!/_4 (v_3 + v_1) = \text{Tg}(x - 45^0) \cdot \text{Ct}\ {}^1\!/_4 (v_3 - v_1) \quad \text{wo} \quad \text{Tg}\, x = \sqrt{r_3 : r_1}$$
$$q = r \cdot \text{Co}^2\ {}^1\!/_2 v \qquad t = (\text{Tg}\ {}^1\!/_2 v + {}^1\!/_3 \text{Tg}^3\ {}^1\!/_2 v) \cdot q \cdot \sqrt{2\,q} : f \qquad 5$$

noch die $(v_3 + v_1)$, v_3, v_1, die Periheldistanz q und die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossenen Zeiten t_1 und t_3. Da **Lacaille** durch diese Rechnung $t_3 - t_1 = 50^d,762$ fand, während die betreffenden Beobachtungszeiten um $50^d,72859$ differierten, so hatte er zu schliessen, dass zwar seine erste Annahme nicht übel, aber der Überschuss von nahe $0^d,035$ denn doch zu gross sei, um die dritte Bedingung als erfüllt betrachten zu dürfen. Er unternahm nun, um sich zu orientieren, zwei Versuche: Bei dem ersten verminderte er sein r_3', bei dem zweiten dagegen sein r_1', je um $^1/_{1000}$, und erhielt nun bei Revision seiner Rechnung im ersten Falle für $t_3 - t_1$ einen um $0^d,168$, im zweiten aber einen um $0^d,048$ kleinern Wert. Er konnte somit jenen Überschuss sowohl los werden, indem er sein r_3' um $0,0335 : 0,1680 \risingdotseq 0,2$, als indem er sein r_1' um $0,0335 : 0,0480 \risingdotseq 0,7$ solcher Tausendstel verminderte. Entsprechend diesen beiden Möglichkeiten einer **zweiten Annahme** $r_1' = 0,8790$ und $r_3' = 0,9568$ eine **dritte Annahme** $r_1' = 0,8783$ und $r_3' = 0,9570$ coordinierend, erhielt er nun wirklich in beiden Fällen eine mit der Beobachtung vollständig übereinstimmende Zeitdifferenz; aber die q fielen etwas verschieden aus, und als er nun auch noch unter beiden Annahmen die n, ☊, P und die Zeit des Durchganges durch das Perihel berechnete, ergaben sich ebenfalls etwelche Differenzen. Als er ferner mit Hilfe jedes dieser beiden Elementensysteme durch Lösung der Kepler'schen Aufgabe für das Datum der zweiten Beobachtung die geocentrische Länge des Kometen berechnete, erhielt er im erstern Falle gegenüber der Beobachtung einen Fehlbetrag von 88″, im zweiten sogar einen solchen von 451″, so dass die Erfüllung der 4. Bedingung noch ausstand, aber allerdings eine etwelche Grundlage für dieselbe geschaffen war. Letztere ausnutzend wurde er darauf geführt, r_1' etwas zu erhöhen und dafür, um nicht in neuen Konflikt mit der 3. Bedingung zu kommen, r_3' etwas zu vermindern, nämlich die **vierte Annahme** $r_1' = 0,879235$ und $r_3' = 0,956735$ zu machen, welche ihm dann wirklich nach allen Richtungen befriedigende Resultate ergab, so dass er die damit erhaltenen Elemente, also auch die Methode selbst als brauchbar bezeichnen konnte.

498. Die Euler'sche Formel und die Lambert'sche Reihe. — Die Folgezeit hat diese Methoden, wie wir alsbald (500 u. f.) sehen werden, noch durch wesentlich vollkommenere ersetzt, indem sie namentlich von verschiedenen Beziehungen Gebrauch machte, welche ihr die Euler und Lambert, die Lagrange und Duséjour, etc., an die Hand gaben, und mit welchen wir uns nun unter der gegenwärtigen und der folgenden Nummer bekannt zu machen haben. — Es zeigte nämlich schon **Euler**, dass unter Voraussetzung einer parabolischen Bahn die merkwürdige Formel

$$g \cdot \vartheta_2 = {}^1\!/_6 (m^{3/2} - n^{3/2}) \quad \text{wo} \quad m = r_1 + r_3 + k \qquad n = r_1 + r_3 - k \qquad 1$$

bestehe, in welcher r_1 und r_3 die Radien vectoren zweier Positionen, k die durch letztere bestimmte Sehne, ϑ_2 die Zwischenzeit und g die früher (482) eingeführte Konstante bezeichnen [a], — und einige

Decennien später bewies **Lambert**, dass für die Kegelschnitte überhaupt die, jene Formel als Specialfall involvierende, Reihe

$$g \cdot \vartheta_2 = {}^1/_6 (m^{3/2} - n^{3/2}) + {}^1/_{80} (m^{5/2} - n^{5/2}) : a + \\ + {}^3/_{1792} \cdot (m^{7/2} - n^{7/2}) : a^2 + \ldots \qquad 2$$

bestehe, wo a die halbe grosse Axe sei [b], — weiterer betreffender Leistungen dieser beiden grossen Geometer nur beiläufig zu gedenken [c].

Zu 498: *a.* **Euler** leitete seinen Satz in der Abhandlung „Determinatio orbitæ Cometæ A. 1742 observati (Misc. Berol. VII von 1743)", und dann wieder in seiner klassischen Schrift „Theoria motuum Planetarum et Cometarum. Berolini 1744 in 4." wesentlich in folgender Weise ab: Nach 76:1 hat man

$$r_1 = q \cdot \mathrm{Se}^2\, {}^1/_2 v_1 \qquad r_3 = q \cdot \mathrm{Se}^2\, {}^1/_2 v_3 \qquad 1$$

woraus durch Elimination von q und Einführung von $w = v_3 - v_1$

$$\mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v_1 = \left[\mathrm{Co}\, {}^1/_2 w - \sqrt{r_1 : r_3}\right] \mathrm{Cs}\, {}^1/_2 w \qquad 2$$

folgt. Da nun trigonometrisch, falls $2s = r_1 + r_3 + k$,

$$\mathrm{Si}\, {}^1/_2 w = \sqrt{(s - r_1) \cdot (s - r_3) : r_1 \cdot r_3} \qquad \mathrm{Co}\, {}^1/_2 w = \sqrt{s \cdot (s - k) : r_1 r_3} \qquad 3$$

so erhält man nach 2 und 1 successive

$$\mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v_1 = \left[\sqrt{s \cdot (s - k)} - r_1\right] : \sqrt{(s - r_1) \cdot (s - r_3)} \qquad 4$$

$$q = (s - r_1) \cdot (s - r_3) : \left[r_1 + r_3 - 2\sqrt{s \cdot (s - k)}\right] \qquad 5$$

$$\mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v_3 = \left[r_3 - \sqrt{s \cdot (s - k)}\right] : \sqrt{(s - r_1) \cdot (s - r_3)} \qquad 6$$

Setzt man aber $\mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v_1 = t$ und $\mathrm{Tg}\, {}^1/_2 v_3 = u$, so hat man offenbar nach 491 : 1, 5 (wenn das Euler'sche μ entsprechend 483 durch $g : \sqrt{2}$ ersetzt wird)

$$g \cdot \vartheta_2 = q \cdot \sqrt{2q}\, \left[(u + {}^1/_3 u^3) - (t + {}^1/_3 t^3)\right] = \\ = q \cdot \sqrt{2q} \cdot (u - t) \cdot [1 + {}^1/_3 (u^2 + u \cdot t + t^2)] \qquad 7$$

und da somit nach 6 und 4

$$u - t = i : h \quad \text{wo} \quad i = r_1 + r_3 - 2\sqrt{s \cdot (s - k)} \qquad h^2 = (s - r_1) \cdot (s - r_3) \qquad 8$$

sowie

$$1 + u^2 = i \cdot r_3 : h^2 \qquad 1 + u \cdot t = i \cdot \sqrt{s \cdot (s - k)} : h^2 \qquad 1 + t^2 = i \cdot r_1 : h^2$$

oder also

$$1 + {}^1/_3 (u^2 + ut + t^2) = {}^1/_3\, i \cdot \left[r_1 + r_3 + \sqrt{s \cdot (s - k)}\right] : h^2 \qquad 9$$

so geht 7, wenn zugleich aus 5 der Wert von q eingeführt wird, in

$$g \cdot \vartheta_2 = {}^1/_3 \cdot \sqrt{2i}\, \left(r_1 + r_3 + \sqrt{s \cdot (s - k)}\right) \qquad 10$$

oder, wenn momentan $\sqrt{s} = p$ und $\sqrt{s - k} = q$, also $r_1 + r_3 + k = 2p^2$ und $r_1 + r_3 - k = 2q^2$, oder $r_1 + r_3 = p^2 + q^2$ und $i = (p - q)^2$ gesetzt werden, in

$$g \cdot \vartheta_2 = {}^1/_3 \cdot \sqrt{2} \cdot (p - q)(p^2 + q^2 + pq) = {}^1/_3 \cdot \sqrt{2} \cdot (p^3 - q^3) \\ = {}^1/_6 \left[(r_1 + r_3 + k)^{3/2} - (r_1 + r_3 - k)^{3/2}\right] \qquad 11$$

über, welche mit unserer 1 identisch ist. — Führt man in 11 den Hilfswinkel φ durch

$$\mathrm{Si}\, \varphi = k : (r_1 + r_3) \qquad 12$$

ein, so geht sie mit Hilfe goniometrischer Beziehungen in die Form

$$\begin{aligned} 6g \cdot \vartheta_2 : \sqrt{r_1 + r_3} &= (r_1 + r_3) \cdot [(1 + \mathrm{Si}\,\varphi)^{3/2} - (1 - \mathrm{Si}\,\varphi)^{3/2}] = \\ &= 2^{3/2} \cdot (r_1 + r_3)\,[\mathrm{Co}^3 (45^0 - {}^1/_2\,\varphi) - \mathrm{Si}^3 (45^0 - {}^1/_2\,\varphi)] = \\ &= k \cdot (2 + \mathrm{Co}\,\varphi) \cdot \mathrm{Se}\,{}^1/_2\,\varphi \end{aligned} \qquad \mathbf{13}$$

über, aus welcher die schon durch **Duséjour** in seinem „Mémoire" von 1778 gegebene, dann wieder vergessene und erst 1833 durch **Encke** (vgl. Berl. Jahrb.) neuerdings aufgestellte Formel

$$k = \frac{2g \cdot \vartheta_2}{\sqrt{r_1 + r_3}} \cdot \mu \quad \text{wo} \quad \mu = \frac{3 \cdot \mathrm{Co}\,{}^1/_2\,\varphi}{2 + \mathrm{Co}\,\varphi} = 1 + \frac{1}{24}\varphi^2 - \frac{5}{1152} \cdot \varphi^4 + \ldots \qquad \mathbf{14}$$

folgt, welche weit bequemer als 11 ist, wenn es sich darum handelt, k aus ϑ_2 zu berechnen: Da μ immer der Einheit nahe, so rechnet man in diesem Falle erst k für $\mu = 1$, — dann mit diesem provisorischen Werte φ, μ, k, — macht nachher allfällig noch einen zweiten Gang, — etc. — Die 497 : 4 habe ich mich vergeblich bemüht, aus den gleichaltrigen Euler'schen Beziehungen abzuleiten, und muss sie für eine durch **Loys** aufgestellte Näherungsformel halten. — *b.* Schon **Euler** wusste seinen Satz auch dem Falle einer langgestreckten Ellipse zu accommodieren; aber sein Verfahren wurde dann allerdings weit überholt, als **Lambert** in seiner überhaupt so inhaltsreichen Schrift „Insigniores orbitæ Cometarum proprietates. Aug. Vind. 1761 in 8." die oben als 2 mitgeteilte Reihe gab, welche sodann auch in den Abhandlungen „**Lagrange**, Sur une manière particulière d'exprimer le temps dans les sections coniques (Mém. Berl. 1778), — **Lexell**, Disquisitio de theoremati Lamberti (Acta nova Petr. I von 1783, ausg. 1787), — etc." besprochen, jedoch wohl bis jetzt am einfachsten durch **Oppolzer** in seinem „Lehrbuch der Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Leipzig 1870—80, 2 Bde. in 8." in folgender Weise abgeleitet wurde: Nach 484 hat man

$$\begin{gathered} r = a\,(1 - e \cdot \mathrm{Co}\,u) \qquad r \cdot \mathrm{Co}\,v = a\,(\mathrm{Co}\,u - e) \\ r \cdot \mathrm{Si}\,v = a \cdot \mathrm{Si}\,u \cdot \mathrm{Co}\,\varphi \qquad \text{wo} \qquad e = \mathrm{Si}\,\varphi \end{gathered} \qquad \mathbf{15}$$

und daher, wenn k die durch die Punkte (r_1, v_1) und (r_3, v_3) bestimmte Sehne bezeichnet,

$$\begin{aligned} k^2 &= (r_1 \cdot \mathrm{Co}\,v_1 - r_3 \cdot \mathrm{Co}\,v_3)^2 + (r_1 \cdot \mathrm{Si}\,v_1 - r_3\,\mathrm{Si}\,v_3)^2 = \\ &= a^2\,[(\mathrm{Co}\,u_3 - \mathrm{Co}\,u_1)^2 + (\mathrm{Si}\,u_3 - \mathrm{Si}\,u_1)^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\varphi] \end{aligned}$$

oder, wenn man

$$g = {}^1/_2\,(u_3 - u_1) \qquad G = {}^1/_2\,(u_3 + u_1) \qquad \mathrm{Co}\,h = e \cdot \mathrm{Co}\,G \qquad \mathbf{16}$$

setzt,

$$k^2 = 4a^2 \cdot [\mathrm{Si}^2 g \cdot \mathrm{Si}^2 G + \mathrm{Si}^2 g \cdot \mathrm{Co}^2 G \cdot (1 - e^2)] \quad \text{oder} \quad k = 2a \cdot \mathrm{Si}\,g \cdot \mathrm{Si}\,h \qquad \mathbf{17}$$

Ferner ergiebt sich

$$r_1 + r_3 = a \cdot (1 - e \cdot \mathrm{Co}\,u_1) + a \cdot (1 - e \cdot \mathrm{Co}\,u_3) = 2a \cdot (1 - \mathrm{Co}\,g \cdot \mathrm{Co}\,h) \qquad \mathbf{18}$$

und wenn daher noch

$$h - g = \delta \qquad h + g = \varepsilon \qquad \text{oder} \qquad 2h = \varepsilon + \delta \qquad 2g = \varepsilon - \delta \qquad \mathbf{19}$$

eingeführt werden, so erhält man

$$r_1 + r_3 + k = 4a \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,\varepsilon \qquad r_1 + r_3 - k = 4a \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,\delta \qquad \mathbf{20}$$

Bezeichnet m die mittlere Anomalie zur Zeit t, wo m und t vom Perihel aus gezählt werden, und T die Umlaufszeit, so hat man (483—84)

$$m : 2\pi = t : T \qquad T = 2\pi \cdot a^{3/2} : g \qquad g \cdot t : a^{3/2} = m = u - e \cdot \mathrm{Si}\,u$$

und also

$$g \cdot \vartheta_2 : a^{3/2} = u_2 - e \cdot \mathrm{Si}\, u_2 - (u_1 - e \cdot \mathrm{Si}\, u_1) = \varepsilon - \mathrm{Si}\, \varepsilon - (\delta - \mathrm{Si}\, \delta) \qquad 21$$

Man kann somit bei gegebenen Werten von r_1, r_2, k nach 20 die Hilfsgrössen ε und δ, und sodann nach 21 die Zeit berechnen, in welcher der von k abgeschnittene Bogen durchlaufen wird. — Setzt man

$$Q' = (\varepsilon - \mathrm{Si}\, \varepsilon) : 8\, \mathrm{Si}^3\, {}^1\!/_2\, \varepsilon \qquad Q'' = (\delta - \mathrm{Si}\, \delta) : 8\, \mathrm{Si}^3\, {}^1\!/_2\, \delta \qquad 22$$

so geht 21 mit Hilfe von 20 in

$$g \cdot \vartheta_2 = (r_1 + r_2 + k)^{3/2} \cdot Q' - (r_1 + r_2 - k)^{3/2} \cdot Q'' \qquad 23$$

über. Ist ferner

$$\mathrm{Si}^2\, {}^1\!/_2\, \alpha = A \quad \text{also} \quad \mathrm{Si}^2\, \alpha = 4\, A \cdot (1 - A) \qquad \mathrm{Si}^3\, \alpha : 8\, \mathrm{Si}^3\, {}^1\!/_2\, \alpha = (1 - A)^{3/2} \qquad 24$$

und berücksichtigt man 40 : 19, so erhält man

$$(\alpha - \mathrm{Si}\, \alpha) : 8\, \mathrm{Si}^3\, {}^1\!/_2\, \alpha = {}^1\!/_6 + {}^1\!/_{20}\, A + {}^3\!/_{112}\, A^2 + \ldots \qquad 25$$

Lässt man endlich in 25 successive α in ε oder δ, also nach 20 entsprechend A in $(r_1 + r_2 + k) : 4\, a$ oder $(r_1 + r_2 - k) : 4\, a$ übergehen, so ergiebt sich nach 23

$$\begin{aligned} g \cdot \vartheta_2 = (r_1 + r_2 + k)^{3/2} \cdot \left[{}^1\!/_6 + {}^1\!/_{20} \cdot \frac{r_1 + r_2 + k}{4\, a} + {}^3\!/_{112} \cdot \left(\frac{r_1 + r_2 + k}{4\, a} \right)^2 + \ldots \right] \\ - (r_1 + r_2 - k)^{3/2} \cdot \left[{}^1\!/_6 + {}^1\!/_{20} \cdot \frac{r_1 + r_2 - k}{4\, a} + {}^3\!/_{112} \cdot \left(\frac{r_1 + r_2 - k}{4\, a} \right)^2 + \ldots \right] \end{aligned} \qquad 26$$

d. h. die Reihe von Lambert. — *c.* Um noch ein Beispiel einer Arbeit von **Euler** zu geben, wollen wir nach dessen Schrift von 1744 die Aufgabe lösen, „aus dem Parameter p und der Periheldistanz q die Zeit T zu finden, in welcher in einem Kegelschnitte vom Perihel aus die Anomalie v erreicht wird". Bezeichnet A die vom Radius vector r in der Zeit T überstrichene Fläche, so ist (482—83)

$$A = {}^1\!/_2\, k \cdot T \qquad k = g \cdot \sqrt{a\,(1 - e^2)} = g \cdot \sqrt{p} \qquad T = 2\, A : g \cdot \sqrt{p} \qquad 27$$

und es reduziert sich also die Lösung der Aufgabe auf die Bestimmung von A. Da nun bekanntlich

$$r = p : [1 + e \cdot \mathrm{Co}\, v] \qquad p : q = 1 + e \qquad r = p \cdot q : [q + (p - q) \cdot \mathrm{Co}\, v] \qquad 28$$

so folgt, wenn wie früher

$$t = \mathrm{Tg}\, \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{Co}\, v}{1 + \mathrm{Co}\, v}} \qquad d\, v = \frac{2 \cdot d\, t}{1 + t^2} \qquad \mathrm{Co}\, v = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad 29$$

eingeführt wird,

$$A = {}^1\!/_2 \cdot \int r^2 \cdot d\, v = \int \frac{p^2 \cdot q^2 \cdot (1 + t^2) \cdot d\, t}{[p + (2\, q - p) \cdot t^2]^2} \qquad 30$$

Ist nun q = p (Kreis), so geht 30 in

$$A_1 = p^2 \int d\, t : (1 + t^2) = p^2 \cdot \mathrm{Atg}\, t = {}^1\!/_2\, p^2 \cdot v \qquad 31$$

über, wie schon bekannt ist. Wenn dagegen p = 2 q (Parabel), so erhält man nach 30

$$A_2 = q^2 \cdot \int (1 + t^2) \cdot d\, t = q^2\, (t + {}^1\!/_3\, t^3) = q^2\, (\mathrm{Tg}\, {}^1\!/_2\, v + {}^1\!/_3\, \mathrm{Tg}^3\, {}^1\!/_2\, v) \qquad 32$$

wie uns aus 76 : 5 ebenfalls bereits bekannt ist. Liegt aber p zwischen q und 2 q (Ellipse) oder ist p > 2 q (Hyperbel), so läuft die Integration nicht so glatt ab, und **Euler** wandte hiefür den Kunstgriff an,

$$A = \frac{\alpha \cdot t}{p + (2\, q - p) \cdot t^2} + \beta \cdot \int \frac{d\, t}{p + (2\, q - p) \cdot t^2} \qquad 33$$

zu setzen, wo α und β zwei unbestimmte Faktoren sind. Sollen nun 33 und 30 übereinstimmen, so muss

$$\frac{p^2 \cdot q^2 \cdot (1 + t^2) \cdot dt}{[p + (2q - p) \cdot t^2]^2} = d\left[\frac{\alpha \cdot t}{p + (2q - p) \cdot t^2}\right] + \frac{\beta \cdot dt}{p + (2q - p) \cdot t^2}$$

sein, und hieraus ergiebt sich, wenn man die angedeutete Differentiation ausführt,

$$p^2 \cdot q^2 + p^2 \cdot q^2 \cdot t^2 = (\beta + \alpha) \cdot p + (\beta - \alpha) \cdot (2q - p) \cdot t^2$$

Diese Bedingungsgleichung kann aber nur für jeden Wert bestehen, wenn

$$p^2 \cdot q^2 = (\beta + \alpha) \cdot p \qquad p^2 \cdot q^2 = (\beta - \alpha) \cdot (2q - p)$$

oder

$$\alpha = p \cdot q^2 \cdot (q - p) : (2q - p) \qquad \beta = p \cdot q^3 : (2q - p) \tag{34}$$

ist, für welche Werte 33 in

$$A = \frac{p \cdot q^2 \cdot (q - p) \cdot t}{(2q - p) \cdot [p + (2q - p) \cdot t^2]} + \frac{p \cdot q^3}{2q - p} \cdot \int \frac{dt}{p + (2q - p) \cdot t^2} \tag{35}$$

übergeht. Hieraus folgt aber im ersten Falle (Ellipse) nach 46 : 3, wenn

$$\mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, w = \mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, v \cdot \sqrt{(2q - p) : p} \qquad \text{oder} \qquad t = \mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, w \cdot \sqrt{p : (2q - p)} \tag{36}$$

gesetzt wird,

$$A_3 = \frac{q^3 \cdot \sqrt{p}}{2\,(2q - p)^{3/2}} \cdot \left[w - \frac{p - q}{q} \cdot \mathrm{Si}\, w\right] \tag{37}$$

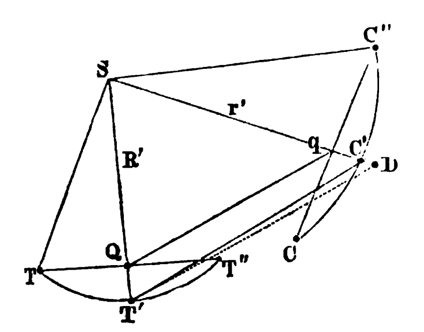
und im zweiten Falle (Hyperbel) nach 46 : 2, wenn

$$\mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, w = \mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, v \cdot \sqrt{(p - 2q) : p} \qquad \text{oder} \qquad t = \mathrm{Tg}\,{}^1\!/\!_2\, w \cdot \sqrt{p : (p - 2q)} \tag{38}$$

gesetzt wird,

$$A_4 = \frac{q^3 \cdot \sqrt{p}}{2\,(p - 2q)^{3/2}} \cdot \left[\frac{p - q}{p} \cdot \mathrm{Tg}\, w - \mathrm{Ltg}\left(45^0 + \frac{w}{2}\right)\right] \tag{39}$$

womit nun unsere Aufgabe in allen Fällen vollständig gelöst ist. — In Beziehung auf **Lambert** endlich will ich noch beifügen, dass er in seinen „Observations sur l'orbite apparente des Comètes (Mém. Berl. 1771, ausg. 1773)" einen sehr interessanten und praktisch wertvollen Satz ungefähr in folgender Weise ableitete: Sind C, C', C'' und T, T', T'' die den Zeiten t, t', t'' entsprechenden Lagen eines Kometen und der Erde, ferner S die Sonne, so hat man (484 : 12) sehr angenähert



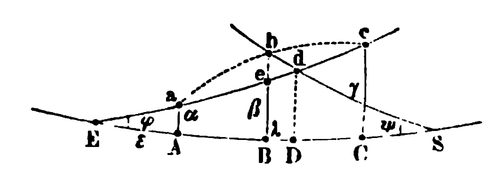
$$q\,C' = {}^1\!/\!_2\, f^2 \cdot (t' - t) \cdot (t'' - t') : r'^2$$
$$Q\,T' = {}^1\!/\!_2\, f^2 \cdot (t' - t) \cdot (t'' - t') : R'^2$$

also

$$q\,C' : Q\,T' = R'^2 : r'^2 \tag{40}$$

Ist demnach $r' = R'$, so ist auch $q\,C' = Q\,T'$ und es fällt somit, wenn $T'D \parallel Qq$ ist, $T'C'$ mit dieser $T'D$ zusammen, während sie für $r' \gtrless R'$ und also $q\,C' \lesseqgtr Q\,T'$ einem $\left\{\begin{matrix}\text{kleinern}\\ \text{grössern}\end{matrix}\right\}$ scheinbaren Abstande von der Sonne entspricht. Da nun nach Konstruktion D notwendig dem grössten Kreise angehört, welcher C'' und C auf der scheinbaren Himmelskugel verbindet, so liegt daher das scheinbare Bahnstück von diesem grössten Kreise gegen die Sonne zu oder von ihr ab, je nachdem $r' > R'$ oder $r' < R'$ ist. Hierin besteht aber der von **Lambert** auf-

gestellte und später von ihm in seinen „Beyträgen (III 252)“ wie folgt formulierte Satz: „Man zeichne die beobachtete scheinbare Bahn des Cometen auf der Himmelskugel oder auf einer Himmelscharte. Letztere sind hiezu am bequemsten, wenn sie (wie bei der centralen Projection, vgl. 105) so entworfen sind, dass alle grössten Circul der Sphære darauf durch gerade Linien vorgestellt werden. Auf der gezeichneten scheinbaren Bahn wähle man zween beliebige Punkte, und durch diese ziehe man einen grössten Circul, so wird die Bahn zwischen diesen Punkten von dem gezogenen grössten Circul abweichen, und zwar entweder gegen den Ort der Sonne, oder gegen die von dem Orte der Sonne weggekehrte Seite. Geschieht das Erste, so ist der Comet von der Sonne weiter entfernt als die Erde; geschieht aber das letztere, so ist der Comet näher bei der Sonne als die Erde.“ **Lambert** sah übrigens ganz wohl ein, dass praktisch in den meisten Fällen nur in sehr grossem Massstabe ausgeführte Zeichnungen ein etwas sicheres Resultat ergeben dürften, und fügte darum noch folgendes Rechnungsverfahren bei: Ist ES die Ekliptik, Eac der durch den ersten und dritten Ort führende grösste Kreis, ferner S die dem mittlern Orte b entsprechende Lage der Sonne, und sind die geocentrischen Ekliptikcoordinaten A, α, B, β, C, γ (folglich auch λ), sowie die Länge S der Sonne gegeben, so hat man



$$\mathrm{Ct}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\varepsilon = \mathrm{Ct}\,\varphi = \mathrm{Ct}\,\gamma \cdot \mathrm{Si}\,(\lambda + \varepsilon) \qquad 41$$

also

$$\frac{\mathrm{Si}\,(\lambda + \varepsilon)}{\mathrm{Si}\,\varepsilon} = \frac{\mathrm{Tg}\,\gamma}{\mathrm{Tg}\,\alpha} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{Si}\,(\lambda + \varepsilon) + \mathrm{Si}\,\varepsilon}{\mathrm{Si}\,(\lambda + \varepsilon) - \mathrm{Si}\,\varepsilon} = \frac{\mathrm{Tg}\,\gamma + \mathrm{Tg}\,\alpha}{\mathrm{Tg}\,\gamma - \mathrm{Tg}\,\alpha}$$

und hieraus folgt

$$\mathrm{Tg}\left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon\right) = \frac{\mathrm{Si}\,(\gamma + \alpha)}{\mathrm{Si}\,(\gamma - \alpha)} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{\lambda}{2} \qquad 42$$

so dass man ε und sodann nach 41 auch φ berechnen kann. Ferner hat man

$$\mathrm{Ct}\,\psi = \mathrm{Ct}\,\beta \cdot \mathrm{Si}\,(S - B) \qquad \mathrm{Co}\,bS = \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}\,(S - B) \qquad 43$$

kann somit auch ψ und bS bestimmen. Sodann folgt

$$\mathrm{Tg}\,\varphi \cdot \mathrm{Si}\,ED = \mathrm{Tg}\,dD = \mathrm{Tg}\,\psi \cdot \mathrm{Si}\,DS$$

also

$$\frac{\mathrm{Si}\,ED}{\mathrm{Si}\,DS} = \frac{\mathrm{Tg}\,\psi}{\mathrm{Tg}\,\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{Si}\,ED - \mathrm{Si}\,DS}{\mathrm{Si}\,ED + \mathrm{Si}\,DS} = \frac{\mathrm{Tg}\,\psi - \mathrm{Tg}\,\varphi}{\mathrm{Tg}\,\psi + \mathrm{Tg}\,\varphi}$$

und hieraus

$$\mathrm{Tg}\,\frac{ED - DS}{2} = \frac{\mathrm{Si}\,(\psi - \varphi)}{\mathrm{Si}\,(\psi + \varphi)} \cdot \mathrm{Tg}\,\frac{ES}{2} \qquad 44$$

so dass $DS = \frac{1}{2}\,ES - \frac{1}{2}\,(ED - DS)$ gefunden werden kann. Endlich kann man nach

$$\mathrm{Ct}\,dS = \mathrm{Ct}\,DS \cdot \mathrm{Co}\,\psi \qquad 45$$

noch dS finden und mit bS vergleichen, woraus sich nun das gewünschte Kriterium mit aller Sicherheit ergiebt. Vgl. für die Verwendung dieses Satzes z. B. „H. **Bruns**, Der Lambert'sche Satz (A. N. 2824 von 1888)“.

499. Die Beziehungen von Lagrange und Duséjour. — Anderseits leiteten **Lagrange** und **Duséjour** sehr wertvolle Beziehungen zwischen den geocentrischen Polarcoordinaten dreier Positionen und

den Flächen der durch letztere mit dem Brennpunkte bestimmten Sehnendreiecke ab [a], aus welchen sich z. B. ergab, dass unter Voraussetzung, es seien die Zeitunterschiede ϑ_3 (zwischen der 1. und 2.) und ϑ_1 (zwischen der 2. und 3. Beobachtung) klein und nicht sehr verschieden, und unter der Annahme, es repräsentieren δ_1 und δ_3 die auf die Ekliptik projizierten oder **kurtierten** geocentrischen Distanzen bei der 1. und 3. Beobachtung, sehr nahe die Proportion

$$\delta_3 : \delta_1 = C_2 \cdot \vartheta_1 : A_2 \cdot \vartheta_3 \qquad \mathbf{1}$$

bestehe, wo C_2 und A_2 aus den Beobachtungen berechnete Zahlen bezeichnen [b]. Diese Beziehung macht es unter anderm, wie **Duséjour** richtig herausfühlte, möglich, die in der Euler'schen Formel rechts erscheinenden drei Grössen r_1, r_3, k unter Annahme eines beliebigen Wertes für δ_1 zu berechnen und somit auch den dieser Annahme entsprechenden Wert von ϑ_2 zu erhalten. In der Regel wird dieser Wert von dem beobachteten Zeitintervalle abweichen und somit eine andere Annahme für δ_1 bedingen, mit welcher die Rechnung neuerdings durchgeführt werden muss, damit aber zugleich der Weg eröffnet wird mit Hilfe der Regula falsi successive immer bessere Annahmen und schliesslich die einer parabolischen Bahn bestentsprechenden Distanzen zu erhalten [c].

Zu 499: *a.* In der von 1778 datierenden zweiten seiner drei Abhandlungen „Sur le problème de la détermination des orbites des Comètes d'après trois observations (Mém. Berl. 1778—83)" veröffentlichte **Lagrange** einige sehr wichtige Grundbeziehungen, welche sich unter Mitbenutzung einer dadurch veranlassten (in Mém. Par. 1779 enthaltenen) Arbeit von Achille-Pierre **Dionis du Séjour** (Paris 1734 — Fontainebleau 1794; Parlamentsrat und Akad. Paris) in folgender Weise entwickeln lassen: Eliminiert man aus den drei Gleichungen

$$z_1 = a \cdot x_1 + b \cdot y_1 \qquad z_2 = a \cdot x_2 + b \cdot y_2 \qquad z_3 = a \cdot x_3 + b \cdot y_3$$

einer durch den Anfangspunkt und drei Punkte x, y, z gehenden Ebene die Konstanten a und b, so erhält man, je nachdem man nach x, oder nach y, oder nach z ordnet,

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2 (y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= y_1 (z_2 x_3 - z_3 x_2) + y_2 (z_3 x_1 - z_1 x_3) + y_3 (z_1 x_2 - z_2 x_1) \qquad \mathbf{2} \\ &= z_1 (x_2 y_3 - x_3 y_2) + z_2 (x_3 y_1 - x_1 y_3) + z_3 (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned}$$

wo (vgl. 482:7) die Koeffizienten, wie schon **Duséjour** (nicht aber Lagrange) bemerkte, nichts anderes als die Doppelflächen der Projektionen der von den Radien vectoren $r_2 r_3$, $r_3 r_1$ und $r_1 r_2$ bestimmten Sehnendreiecke f_1, f_2 und f_3 auf die drei Coordinatenebenen sind. Man kann somit die 2 durch

$$0 = f_1 x_1 - f_2 x_2 + f_3 x_3 = f_1 y_1 - f_2 y_2 + f_3 y_3 = f_1 z_1 - f_2 z_2 + f_3 z_3 \qquad \mathbf{3}$$

oder, wenn man (entsprechend 493) mit Hilfe der Beziehungen

$$x = R \cdot \mathrm{Co}\, L + \delta \cdot \mathrm{Co}\, \lambda \qquad y = R \cdot \mathrm{Si}\, L + \delta \cdot \mathrm{Si}\, \lambda \qquad z = \delta \cdot \mathrm{Tg}\, \beta \qquad \mathbf{4}$$

die rechtwinkligen heliocentrischen Coordinaten mit geocentrischen Polar-

coordinaten vertauscht, durch die merkwürdigen Relationen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\delta_1 \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_1 + R_1 \cdot \mathrm{Co}\,L_1) - f_2(\delta_2 \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_2 + R_2 \cdot \mathrm{Co}\,L_2) + f_3(\delta_3 \cdot \mathrm{Co}\,\lambda_3 + R_3 \cdot \mathrm{Co}\,L_3) \\ &= f_1(\delta_1 \cdot \mathrm{Si}\,\lambda_1 + R_1 \cdot \mathrm{Si}\,L_1) - f_2(\delta_2 \cdot \mathrm{Si}\,\lambda_2 + R_2 \cdot \mathrm{Si}\,L_2) + f_3(\delta_3 \cdot \mathrm{Si}\,\lambda_3 + R_3 \cdot \mathrm{Si}\,L_3) \\ &= f_1 \cdot \delta_1 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_1 - f_2 \cdot \delta_2 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_2 + f_3 \cdot \delta_3 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_3 \end{aligned} \quad \mathbf{5}$$

ersetzen. Multipliziert man aber diese letztern der Reihe nach mit

$$\mathrm{Si}\,\lambda_h \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_k - \mathrm{Si}\,\lambda_k \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_h \qquad \mathrm{Co}\,\lambda_k \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_h - \mathrm{Co}\,\lambda_h \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_k \qquad \mathrm{Co}\,\lambda_h \cdot \mathrm{Si}\,\lambda_k - \mathrm{Co}\,\lambda_k \cdot \mathrm{Si}\,\lambda_h$$

addiert die Produkte und führt die Hilfsgrössen

$$\alpha = \mathrm{Tg}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(\lambda_3 - \lambda_2) + \mathrm{Tg}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,(\lambda_1 - \lambda_3) + \mathrm{Tg}\,\beta_3 \cdot \mathrm{Si}\,(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \mathbf{6}$$

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{Tg}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_3) - \mathrm{Tg}\,\beta_3 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_2) \\ B &= \mathrm{Tg}\,\beta_3 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_1) - \mathrm{Tg}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_3) \\ C &= \mathrm{Tg}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_2) - \mathrm{Tg}\,\beta_2 \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda_1) \end{aligned} \quad \mathbf{7}$$

ein, wo die A, B, C mit L die Zeiger 1, 2, 3 anzunehmen haben, so erhält man, je nachdem man h und k die Werte 2 und 3, oder 3 und 1, oder 1 und 2 beilegt, für die drei δ die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= f_1 \cdot (\alpha \cdot \delta_1 + A_1 \cdot R_1) - f_2 \cdot A_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot A_3 \cdot R_3 \\ &= f_1 \cdot B_1 \cdot R_1 - f_2 \cdot (\alpha \cdot \delta_2 + B_2 \cdot R_2) + f_3 \cdot B_3 \cdot R_3 \\ &= f_1 \cdot C_1 \cdot R_1 - f_2 \cdot C_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot (\alpha \cdot \delta_3 + C_3 \cdot R_3) \end{aligned} \quad \mathbf{8}$$

so dass diese berechnet werden könnten, sofern man die Verhältnisse der f kennen würde. — *b.* Da sich nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze zwei Sectoren genau, und daher zwei Sehnendreiecke um so annähernder wie die Beschreibungszeiten verhalten, je kleiner letztere sind, so kann man die Verhältnisse der f, wenn die Beobachtungen nicht weit auseinander liegen, mit grosser Annäherung durch die bekannten Verhältnisse der Zwischenzeiten ersetzen, und somit die obige Berechnung ermöglichen; aber dabei ist nicht zu übersehen, dass unter der soeben gemachten Voraussetzung und ganz besonders wenn die mittlere Beobachtung nahezu in die Mitte fällt oder $\lambda_2 \fallingdotseq \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_3)$ ist, nach 6 die Hilfsgrösse

$$\alpha \fallingdotseq \tfrac{1}{2}(2\,\mathrm{Tg}\,\beta_2 - \mathrm{Tg}\,\beta_1 - \mathrm{Tg}\,\beta_3) \cdot (\lambda_1 - \lambda_3) \cdot \mathrm{Si}\,1''$$

oder sehr klein wird, was etwas bedenklich ist, da sie bei Berechnung der δ nach 8 in den Nenner fällt. Wesentlich besser gestaltet sich dagegen die Sache, wenn man die 8 nicht zur absoluten Bestimmung der δ, sondern nur zur Ermittlung ihrer Verhältnisse benutzt, so z. B.

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = -\frac{f_2}{f_1} \cdot \left[\frac{A_2}{B_2} + \frac{f_1 R_1 (A_1 B_2 - A_2 B_1) - f_3 R_3 (A_2 B_3 - A_3 B_2)}{B_2 (f_1 B_1 R_1 - f_2 B_2 R_2 + f_3 B_3 R_3)}\right] \quad \mathbf{9}$$

setzt. Nicht nur fällt in diesem Falle α ganz ausser Rechnung, sondern da für die Annahmen

$$\lambda_1 = \lambda_2 - \Delta\lambda \qquad \lambda_3 = \lambda_2 + \Delta\lambda \qquad L_1 = L_2 - \Delta L \qquad L_3 = L_2 + \Delta L$$
$$R_1 = R_2 = R_3 \qquad f_1 = f_3 \qquad f_2 = 2 f_1 - \Delta f$$

nach 7, wenn man $\Delta\lambda$, ΔL und Δf als kleine Grössen behandelt und die Glieder mit $\mathrm{Si}^2\,1''$ wegwirft,

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 = 0 \qquad f_1 B_1 R_1 - f_2 B_2 R_2 + f_3 B_3 R_3 = -B_2{}^2 \cdot R_2 \cdot \Delta f$$

wird, so darf man das Restglied vernachlässigen, so dass man nach 9 und den ihr analogen Beziehungen

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = -\frac{A_2 f_2}{B_2 f_1} \qquad \frac{\delta_2}{\delta_3} = -\frac{B_2 f_3}{C_2 f_2} \qquad \frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{C_2 f_1}{A_2 f_3} \quad \mathbf{10}$$

oder also unter anderm unsere 1 erhält. — *c.* Mit Hilfe von 4 erhält man nämlich einerseits die Formel

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2R \cdot \delta \cdot \mathrm{Co}(\lambda - L) + \delta^2 \cdot \mathrm{Se}^2 \beta \qquad 11$$

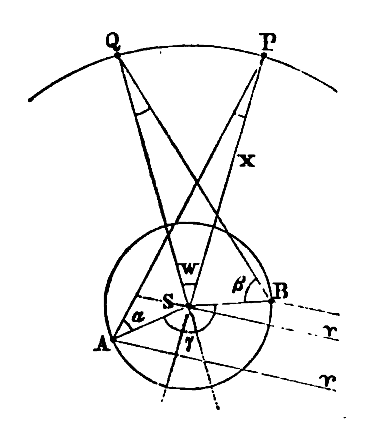
nach welcher unter Benutzung von 1 die jeder Annahme für δ_1 entsprechenden Werte von r_1 und r_3 berechnet werden können, — und anderseits

$$k^2 = (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2(x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3)$$
$$= r_1^2 + r_3^2 - 2R_1 \cdot R_2 \cdot \mathrm{Co}(L_1 - L_3) - 2m \cdot \delta_1^2 [\mathrm{Co}(\lambda_1 - \lambda_3) + \mathrm{Tg}\,\beta_1 \cdot \mathrm{Tg}\,\beta_3]$$
$$- 2\delta_1 [m \cdot R_1 \cdot \mathrm{Co}(L_1 - \lambda_3) + R_3 \cdot \mathrm{Co}(L_3 - \lambda_1)] \qquad 12$$

wo m an die Stelle von $C_2 \cdot \vartheta_1 : A_2 \cdot \vartheta_3$ gesetzt wurde.

500. Die Bestimmung von Kreiselementen. — Während man sich früher fast ausschliesslich mit Berechnung von Kometenbahnen befasst hatte, entstand nach Entdeckung des Uranus (557) die neue Aufgabe, **aus zwei geocentrischen Positionen unter Voraussetzung einer Kreisbahn diese letztere zu bestimmen,** und es gelang alsbald verschiedenen Geometern, dieselbe, wenn auch unter Vernachlässigung der Neigung, zu lösen [a]. Später erschien jedoch diese Vernachlässigung nicht mehr thunlich, und nun zeigte sich, dass auch ohne diese die Distanzbestimmung, in ähnlicher Weise wie oben bei der Parabel, vorgenommen werden könne, und sodann die Bestimmung der übrigen Elemente keine Schwierigkeit mehr darbiete [b].

Zu 500: *a.* Einer der Ersten, die sich mit der neuen Aufgabe beschäftigten, war Sim. **Klügel**, und zwar löste er dieselbe in seiner Abhandlung „Wie man aus zwey geocentrischen Örtern eines entfernten obern Planeten seine Bahn nahe bestimmen könne (Berl. Jahrb. 1785, ausg. 1782; Nachtrag 1783)“ in folgender Weise: Ist S die Sonne und sind P und Q die den Erdörtern A und B entsprechenden Planetenörter, — bezeichnen ferner a und b die Erddistanzen AS und BS (die mittlere Distanz Sonne-Erde als Einheit genommen), x den Radius der Planetenbahn, T und T' die siderischen Umlaufszeiten von Erde und Planet, t die Zwischenzeit der beiden Beobachtungen, und τ die Zeit, in welcher die Erde bei gleichförmiger Bewegung den Winkel γ beschreiben würde, so hat man nach den gemachten Voraussetzungen und dem dritten Kepler'schen Gesetze



$$\gamma : 360^0 = \tau : T \qquad 360^0 : w = T' : t$$
$$1 : x^{3/2} = T : T'$$

also durch Multiplikation

$$\gamma : (w \cdot x^{3/2}) = \tau : t \quad \text{oder} \quad w = t \cdot \gamma : (\tau \cdot x^{3/2}) \qquad 1$$

Anderseits folgt aus den Dreiecken PSA und QSB

$$\mathrm{Si}\,P = a \cdot \mathrm{Si}\,\alpha : x \qquad \mathrm{Si}\,Q = b \cdot \mathrm{Si}\,\beta : x \qquad w = \gamma - \alpha - \beta - P - Q \qquad 2$$

und somit $\gamma \cdot t : (\tau \cdot x^{3/2}) = \gamma - \alpha - \beta - (a \cdot Si\, \alpha + b \cdot Si\, \beta) : x \cdot Si\, 1''$ **3**

oder, wenn $x = y^2$ gesetzt wird,

$$y^3 - \frac{a \cdot Si\, \alpha + b \cdot Si\, \beta}{(\gamma - \alpha - \beta) \cdot Si\, 1''} \cdot y = \frac{\gamma \cdot t}{(\gamma - \alpha - \beta) \cdot \tau} \qquad 4$$

wonach ein vorläufiger Wert von y und damit von $x = y^2$ berechnet werden kann. Da jedoch bei dieser ersten Rechnung für P und Q ihre Sinus genommen wurden, so ist in 3 die Seite rechts etwas zu gross, — also auch die Seite links, — also ist das gefundene x zu klein; man hat somit dasselbe noch so weit zu vergrössern, dass das nach 2 ohne jene Annäherung berechnete w mit dem aus 1 folgenden übereinstimmt, was durch Versuch leicht zu erreichen ist. — Für eine andere Methode vgl. „Walter **Minto** (Schottland 1753 — Princeton in Newjersey 1796; Prof. math. et phys. Princeton, aber 1781 während einiger Zeit in Pisa beobachtend), Researches into some parts of the Theory of the Planets, in which is solved the problem: To determine the circular orbit of a Planet by two observations, exemplified in the new Planet. (Edinburgh?) 1783 in 8., — und: Joseph Anton **Slop** von Cadenberg (Caden bei Triest 1740 — Pisa 1805; Prof. astr. Pisa), Novi planetæ observationes et theoria. Pisis 1782 in 4." — *b.* Die noch jetzt meist gebräuchliche und die Neigung nicht vernachlässigende Methode besteht in folgendem: Bezeichnet a den Radius der Kreisbahn und löst man die für $\delta = \varrho \cdot Co\, \beta$ der 499 : 11 entsprechende Beziehung

$$a^2 = R^2 + \varrho^2 + 2 R \varrho \cdot Co\, \beta \cdot Co\, (\lambda - L)$$

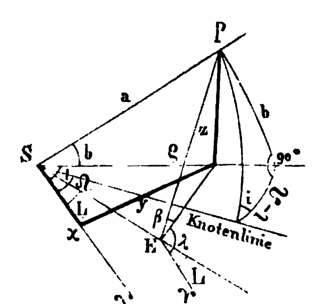
nach ϱ auf, so erhält man für zwei um t Tage voneinander abstehende Beobachtungen die zwei Gleichungen

$$\varrho_1 = \sqrt{a^2 - R_1^2 + E_1^2} - E_1 \quad \text{wo} \quad E_1 = R_1 \cdot Co\, \beta_1 \cdot Co\, (\lambda_1 - L_1) \qquad 5$$

$$\varrho_2 = \sqrt{a^2 - R_2^2 + E_2^2} - E_2 \qquad E_2 = R_2 \cdot Co\, \beta_2 \cdot Co\, (\lambda_2 - L_2) \qquad 6$$

während, wenn k die durch die beiden Positionen bestimmte Kreissehne bezeichnet, entsprechend 499 : 12

$$k^2 = 2 a^2 - 2 R_1 R_2 \cdot Co\, (L_1 - L_2) - 2 R_1 \varrho_2 \cdot Co\, \beta_2 \cdot Co\, (L_1 - \lambda_2) -$$
$$- 2 R_2 \varrho_1 \cdot Co\, \beta_1 \cdot Co\, (L_2 - \lambda_1) - 2 \varrho_1 \varrho_2 \cdot [Co\, \beta_1 \cdot Co\, \beta_2 \cdot Co\, (\lambda_1 - \lambda_2) + Si\, \beta_1 \cdot Si\, \beta_2] \qquad 7$$



ist. Bezeichnet endlich F die Fläche des der Sehne k entsprechenden Kreissectors, so hat man einerseits geometrisch

$$F = \frac{a^2 \cdot \pi}{360 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 2\, Asi \frac{k}{2a} = a^2 \cdot Asi \frac{k}{2a} \cdot Si\, 1''$$

und anderseits nach 482 : 8, 14 und 483

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{a} \cdot g \cdot t = \tfrac{1}{2} t \cdot \sqrt{a} \cdot 3548'',1877 \cdot Si\, 1''$$

so dass aus Gleichsetzung beider Werte die der Euler'schen Formel equivalente vierte Gleichung

$$2 \cdot a^{3/2} \cdot Asi \frac{k}{2a} = 3548'',1877 \cdot t \qquad 8$$

hervorgeht und die Distanzenbestimmung in analoger Weise wie bei der Parabel (499, 501) ermöglicht wird. Nachher kann man nach den sich aus der Figur leicht ergebenden Beziehungen

$$a \cdot Si\, b = \varrho \cdot Si\, \beta \qquad \varrho \cdot Co\, \beta : a \cdot Co\, b = Si\, (l - L) : Si\, (\lambda - L) \qquad 9$$

für beide Beobachtungen aus den geocentrischen Coordinaten β und λ die heliocentrischen b und l berechnen, und endlich, da

$$\mathrm{Tg\,b} = \mathrm{Tg\,i} \cdot \mathrm{Si}\,(l - \Omega)$$

also

$$\frac{\mathrm{Tg\,b_1}}{\mathrm{Tg\,b_2}} = \frac{\mathrm{Si}\,(l_1 - \Omega)}{\mathrm{Si}\,[(l_2 - l_1) + (l_1 - \Omega)]} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Tg}\,(l_1 - \Omega) = \frac{\mathrm{Tg\,b_1} \cdot \mathrm{Si}\,(l_2 - l_1)}{\mathrm{Tg\,b_2} - \mathrm{Tg\,b_1} \cdot \mathrm{Co}\,(l_2 - l_1)} \qquad \mathbf{10}$$

ist, auch Ω und i finden, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist, da eine der beiden Beobachtungszeiten als Epoche dienen kann.

501. Die Bestimmung von parabolischen Elementen. — Bei Kometen wurde natürlich die Übung beibehalten, aus den Beobachtungen zunächst parabolische Elemente abzuleiten, jedoch kamen zu Ende des vorigen Jahrhunderts die frühern Verfahren (497) ausser Gebrauch, da man es nach dem Vorgange von **Olbers** bequemer fand, zur Distanzbestimmung die bereits (499) besprochene Methode von **Duséjour** in Anwendung zu bringen [a], worauf sich sodann die eigentlichen Elemente, unter Benutzung trigonometrischer Formeln und der früher (491) nach **Halley** entwickelten Beziehungen, ohne weitere Schwierigkeit ergaben [b].

Zu 501: *a.* Schon während er in Göttingen Medizin studierte, hatte sich **Olbers** für die Kometen interessiert, denjenigen von 1779 beobachtet, und sodann (vgl. Berl. Jahrb. 1782) für denselben während einer Nacht, „da er bei einem Kranken wachte", durch ein konstruktives Verfahren, dann auch nach der Euler'schen Methode (498) durch Rechnung, Elemente bestimmt. Später machte er sich in eingehender Weise mit der betreffenden Litteratur und so unter anderm auch mit Duséjours Mémoire von 1779 bekannt, ohne jedoch die darin (499) aufgestellte neue Methode der Distanzbestimmung besonders zu beachten. Erst in der Folge keimte der damals fast unbewusst in sich aufgenommene Same, und so wurde Olbers zweiter Erfinder dieses auch von andern kaum beachteten Verfahrens, das er sodann nicht nur weiter entwickelte und mit grossem Geschicke auf viele Kometen anwandte, sondern auch durch seine Schrift „Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar 1797 in 8. (2. A. durch Encke 1847; auch 1820 durch Young in engl. Übers. in seine „Astron. and Naut. Collections" aufgenommen)" in allgemeinen Gebrauch einführte. — Schreibt man die 499 : 11, 12 und 498 : 1 beispielsweise für die korrespondierenden Beobachtungen und Tafelwerte:

Mittl. Zeit Par.	Geoc. Coord. d. Kom.		Helioc. Coord. d. Erde	
	λ	β	L	R
h m s	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	
1799 VIII 30, 11 9 42	125 48 39,3	41 53 52,2	337 29 8,7	1,0087218
IX 2, 10 36 8	132 53 48,5	45 54 48,1	340 22 26,9	1,0079991
- 4, 10 7 51	138 56 31,2	48 32 27,8	342 17 47,8	1,0074854

des durch **Méchain** entdeckten Kometen 1799 I auf, so erhält man unter Benutzung der sich nach 499 : 7, 1 ergebenden Hilfsgrössen

$$A_2 = 0{,}1450302 \qquad C_2 = 0{,}1717403 \qquad \mathrm{Lg}\,m = 9{,}8964242$$

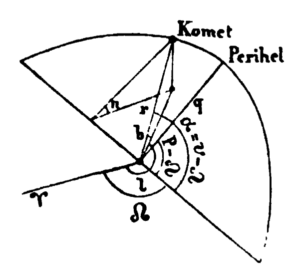
die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1^2 &= 1{,}017520 - 1{,}716929 \cdot \delta_1 + 1{,}804938 \cdot \delta_1^2 \\ r_3^2 &= 1{,}015027 - 1{,}457365 \cdot \delta_1 + 1{,}415869 \cdot \delta_1^2 \\ k^2 &= 0{,}007162 - 0{,}047393 \cdot \delta_1 + 0{,}086249 \cdot \delta_1^2 \\ 0 &= (r_1 + r_3 + k)^{3/2} - (r_1 + r_3 - k)^{3/2} - 0{,}5116307 \end{aligned} \qquad 1$$

und diesen entsprechen folgende Annahmen, Werte und Fehler:

Annahmen für δ_1	r_1	r_3	k	Fehler
* 0,5	0,781210	0,800195	0,070908	— 0,244145
* 1,0	1,051449	0,986677	0,214518	0,406476
0,69	0,831966	0,826765	0,124595	— 0,030341
* 0,730	0,852063	0,840040	0,136014	0,019009
0,714592 . . .	0,843973	0,834630	0,131670	0,000014
0,714581 . . .	0,843967	0,834626	0,131670	0,000000

wo die mit * bezeichneten Annahmen ausgewählte Versuchswerte, die übrigen aber je mit Hilfe der Regula falsi aus ihnen und den resultierenden Fehlern abgeleitet sind. Die letzten Werte von δ_1, r_1 und r_3 sind als definitive zu betrachten und involvieren $\delta_3 = 0{,}562958$. — *b.* Nach durchgeführter Distanzbestimmung geht man sodann in folgender Weise vor: Man berechnet zuerst nach den sich aus 493 : 2 für B = 0 und $\varrho \cdot \mathrm{Co}\,\beta = \delta$ ergebenden Formeln



$$\begin{aligned} r \cdot \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Si}\,(L - l) &= \delta \cdot \mathrm{Si}\,(L - \lambda) \\ r \cdot \mathrm{Co}\,b \cdot \mathrm{Co}\,(L - l) &= R + \delta \cdot \mathrm{Co}\,(L - \lambda) \\ r \cdot \mathrm{Si}\,b &= \delta \cdot \mathrm{Tg}\,\beta \end{aligned} \qquad 2$$

die heliocentrischen Längen l und Breiten b zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung, — sodann nach den der beistehenden Figur entnommenen und 76 : 1 entsprechenden Beziehungen

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tg}\,n \cdot \mathrm{Si}\,(l_1 - \Omega) = \mathrm{Tg}\,b_1 \qquad \mathrm{Tg}\,n \cdot \mathrm{Si}\,(l_3 - \Omega) = \mathrm{Tg}\,b_3 \\ &\mathrm{Tg}\,n \cdot \mathrm{Co}\,(l_1 - \Omega) = [\mathrm{Tg}\,b_3 - \mathrm{Tg}\,b_1 \cdot \mathrm{Co}\,(l_3 - l_1)] : \mathrm{Si}\,(l_3 - l_1) \end{aligned} \qquad 3$$

$$\mathrm{Tg}\,\alpha_1 = \mathrm{Tg}\,(l_1 - \Omega) \cdot \mathrm{Se}\,n \qquad \mathrm{Tg}\,\alpha_3 = \mathrm{Tg}\,(l_3 - \Omega) \cdot \mathrm{Se}\,n \qquad 4$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{Co}\,\tfrac{1}{2}(v_1 - P) : \sqrt{q} = 1 : \sqrt{r_1} \qquad \mathrm{Co}\,\tfrac{1}{2}(v_3 - P) : \sqrt{q} = 1 : \sqrt{r_3} \\ &\mathrm{Si}\,\tfrac{1}{2}(v_1 - P) : \sqrt{q} = \mathrm{Ct}\,\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1) : \sqrt{r_1} - \mathrm{Cs}\,\tfrac{1}{2}(v_3 - v_1) : \sqrt{r_3} \end{aligned} \qquad 5$$

successive die Länge Ω des Knotens und die Neigung n der Bahnebene gegen die Ekliptik, — das mit $(l - \Omega)$ immer im gleichen Quadranten liegende sog. **Argument der Breite** α und die sog. **Länge in der Bahn** $v = \alpha + \Omega$, — sowie die Länge P des Perihels und die Periheldistanz q, — endlich nach der 491 zu entnehmenden Formel

$$T = t_1 \mp [\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}(v_1 - P) + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tg}^3\,\tfrac{1}{2}(v_1 - P)] \cdot \sqrt{2q^3} : g \qquad 6$$

wo t_1 die Zeit der ersten Beobachtung bezeichnet und das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem der Komet rechtläufig oder rückläufig ist, die Durchgangszeit T durch das Perihel. So z. B. ergeben sich in dieser

Weise für den Kometen 1799 I successive die Werte

$l_1 = 20^\circ\ 36'\ 48'',9$	$b_1 = 49^\circ\ 25'\ 55'',7$	$\Omega = 100^\circ\ 50'\ 52'',3$
$l_3 = 6\ \ 45\ \ 16,5$	$b_3 = 49\ \ 46\ \ 21,7$	$n = 180^\circ - 49^\circ\ 50'\ 41'',4$
$P = 4\ \ 34\ \ 12,4$	$q = 0,833790$	$T = 1799\ \text{IX}\ 6,\ 9^h\ 49^m\ 42^s$

502. Die Bestimmung von elliptischen Elementen. — Nachdem sich gezeigt hatte, dass wenigstens einzelne Kometen periodisch wiederkehren, also geschlossene und somit elliptische Bahnen durchlaufen, lag die Aufgabe vor, die Elementenbestimmung auch auf solche auszudehnen, und es gelang bereits **Euler**, dieselbe, unter Voraussetzung einer langgestreckten Ellipse und unter Anwendung auf den Kometen von 1742, wenn auch nur in einer ihn selbst noch nicht vollständig befriedigenden Weise, zu lösen [a]. Die ihm folgenden Geometer nahmen sodann unter verschiedenen vereinfachenden Annahmen dasselbe Problem, speciell die immer in erster Linie stehende Distanzenbestimmung, wiederholt in Angriff, und es mag beispielsweise angeführt werden, dass **Lagrange** unter anderm einen Weg fand, diese letztere auf die Lösung Einer Gleichung vom 7. Grade zu reduzieren [b].

Zu 502: *a.* Da **Euler** seine zwar scharfsinnige, aber nicht rentable Methode später selbst fallen liess, so glaube ich hier nicht näher auf dieselbe eintreten zu sollen, zumal da mehrere der von ihm zu Gunsten derselben ausgeführte und noch für die Gegenwart wichtige Entwicklungen schon im vorhergehenden (491, 498) besprochen wurden. — *b.* Schon **Lambert** hatte sich in seinen „Observations“ von 1771 die Aufgabe gestellt, die Distanzenbestimmung auf die Auflösung Einer Gleichung mit Einer Unbekannten zurückzuführen, und **Lagrange** sodann dieselbe in seinem „Mémoire“ von 1783 in folgender Weise gelöst: Nach 499:8 hat man für den Wandelstern

$$f_1 \cdot B_1 \cdot R_1 - f_2 \cdot B_2 \cdot R_2 + f_3 \cdot B_3 \cdot R_3 = \alpha \cdot f_2 \cdot \delta_2 \qquad 1$$

während für die Erde, wenn die von ihren Radien vectoren bestimmten Sehnendreiecke mit F bezeichnet werden, bei ganz entsprechender Entwicklung die Beziehung

$$F_1 \cdot B_1 \cdot R_1 - F_2 \cdot B_2 \cdot R_2 + F_3 \cdot B_3 \cdot R_3 = 0 \qquad 2$$

erhalten wird. Sind aber ϑ_3, ϑ_2, ϑ_1 die Zwischenzeiten der $1 \cdot 2$, $1 \cdot 3$ und $2 \cdot 3$ Beobachtung, so hat man unter Beihilfe des Taylor'schen Lehrsatzes und bei Vernachlässigung der 4. Potenzen der ϑ entsprechend 499

$$2 f_3 \cdot \mathrm{Co}\,a = x_2 \cdot \left[y_2 - \frac{\vartheta_3}{1} \cdot \frac{dy_2}{dt} + \frac{\vartheta_3^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{\vartheta_3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y_2}{dt^3}\right] -$$
$$- y_2 \cdot \left[x_2 - \frac{\vartheta_3}{1} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\vartheta_3^2}{1 \cdot 2} \cdot \frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{\vartheta_3^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3x_2}{dt^3}\right]$$

oder, wenn man

$$y_2 \cdot dx_2 - x_2 \cdot dy_2 = p \qquad 3$$

und (482:1) unter Vernachlässigung der Masse des Wandelsternes

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{f^2 \cdot x_2}{r_2^3} \qquad \frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{f^2 \cdot y_2}{r_2^3} \qquad \text{wo} \qquad f^2 = \overline{6{,}4711629}$$

also

$$\frac{d^3x_2}{dt^3} = -\frac{f^2}{r_2^3} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{3 f^2 \cdot x_2}{r_2^4} \cdot \frac{dr_2}{dt} \qquad \frac{d^3y_2}{dt^3} = -\frac{f^2}{r_2^3} \cdot \frac{dy_2}{dt} + \frac{3 f^2 \cdot y_2}{r_2^4} \cdot \frac{dr_2}{dt}$$

setzt, und entsprechend auch mit f_2 und f_1 vorgeht,

$$2 f_3 \cdot \mathrm{Co}\, a = \frac{p \cdot \vartheta_3}{dt}\left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_3^2}{6 \cdot r_2^3}\right] \qquad 2 f_2 \cdot \mathrm{Co}\, a = \frac{p \cdot \vartheta_2}{dt}\left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_2^2}{6 \cdot r_2^3}\right]$$

$$2 f_1 \cdot \mathrm{Co}\, a = \frac{p \cdot \vartheta_1}{dt}\left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_1^2}{6 \cdot r_2^3}\right] \qquad 4$$

Substituiert man letztere Werte in 1, so erhält man

$$\alpha \cdot \delta_2 \cdot \vartheta_2 \cdot \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_2^2}{6 \cdot r_2^3}\right] = B_1 \cdot R_1 \cdot \vartheta_1 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_1^2}{6 \cdot r_2^3}\right] -$$

$$- B_2 \cdot R_2 \cdot \vartheta_2 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_2^2}{6 \cdot r_2^3}\right] + B_3 \cdot R_3 \cdot \vartheta_3 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_3^2}{6 \cdot r_2^3}\right] \qquad 5$$

und für analoge Werte der F geht 2 in

$$0 = B_1 \cdot R_1 \cdot \vartheta_1 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_1^2}{6 \cdot R_2^3}\right] - B_2 \cdot R_2 \cdot \vartheta_2 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_2^2}{6 \cdot R_2^3}\right] + B_3 \cdot R_3 \cdot \vartheta_3 \left[1 - \frac{f^2 \cdot \vartheta_3^2}{6 \cdot R_2^3}\right] \qquad 6$$

über. Bedenkt man nun, dass (499) α eine sehr kleine Grösse ist, also in 5 das zweite Glied in der Klammer links, als ein Glied von höherer Ordnung als alle übrigen, weggelassen werden darf, — zieht 6 von der so modifizierten 5 ab, und führt die Hilfsgrösse

$$T = f^2 \cdot [B_1 R_1 \vartheta_1^3 - B_2 R_2 \vartheta_2^3 + B_3 R_3 \vartheta_3^3] : 6 \alpha \cdot \vartheta_2 \qquad 7$$

ein, so erhält man

$$\delta_2 = T \cdot [(1 : R_2^3) - (1 : r_2^3)] \qquad 8$$

während nach 499 : 11

$$0 = r_2^2 - R_2^2 - 2 R_2 \cdot \delta_2 \cdot \mathrm{Co}\,(\lambda_2 - L_2) - \delta_2^2 \cdot \mathrm{Se}^2 \beta_2 \qquad 9$$

ist. Substituiert man aber aus 8 in 9, schafft die Nenner weg, dividiert die ganze Gleichung durch $r_2 - R_2$, und setzt noch

$$E = -2 T \cdot R_2^4 \cdot \mathrm{Co}\,(L_2 - \lambda_2) - T^2 \cdot \mathrm{Se}^2 \beta_2 \qquad F = T^2 \cdot R_2^3 \cdot \mathrm{Se}^2 \beta_2 \qquad 10$$

so erhält man zur Bestimmung von r_2 mit **Lagrange** die Gleichung 7. Grades

$$0 = r_2^7 \cdot R_2^6 + r_2^6 \cdot R_2^7 + r_2^5 \cdot E + r_2^4 \cdot R_2 \cdot E +$$

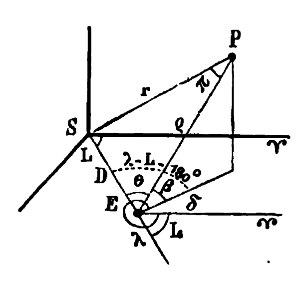
$$+ r_2^3 \cdot R_2^2 \cdot E + r_2^2 \cdot F + r_2 \cdot R_2 \cdot F + R_2^2 \cdot F \qquad 11$$

und es ist somit die gestellte Aufgabe in einer theoretisch befriedigenden Weise gelöst, — während allerdings für die praktische Anwendung wieder der Umstand, dass α in 7 im Nenner erscheint, einen ungünstigen Einfluss ausübt.

503. Die Theoria motus von Gauss. — Als man zu Anfang unsers Jahrhunderts für den zwischen Mars und Jupiter aufgefundenen kleinen Planeten elliptische Elemente berechnen wollte, ergab sich (544) alsbald, dass die bisherigen Methoden für Bahnen von etwas starker Neigung und Excentricität nicht ausreichen, und es war so von hoher Bedeutung, dass es damals **Gauss** gelang, neue und auch für solche Verhältnisse genügende Hilfsmittel aufzufinden, aus deren weiterer Entwicklung binnen kurzem seine „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Hamburgi 1809 in 4." hervorging [a], — ein kapitales Werk, dessen erstes Buch die auch im vorhergehenden in gedrängter Kürze behandelten grundlegenden Beziehungen zwischen den Positionen und

Elementen entwickelt, während in einem zweiten Buche jene neuen Rechnungsverfahren in allem Detail auseinandergesetzt und durch Beispiele illustriert werden [b].

Zu 503: *a.* Die Urschrift der „Theoria motus" war, wie z. B. aus einem 1809 XII 14 von **Gauss** an Schumacher geschriebenen Briefe hervorgeht, in deutscher Sprache abgefasst und erst auf ausdrückliches Verlangen des Verlegers ins Lateinische übertragen worden, um dann aus diesem durch Davis (Boston 1857) ins Englische, durch Dubois (Paris 1864) ins Französische, und durch Haase (Hannover 1865) wieder rückwärts ins Deutsche übersetzt zu werden. In demselben Briefe ist auch von dem „ärgerlichen Schreibfehler" auf der ersten Seite der Theoria (wo **inversa** anstatt **composita** steht) die Rede, und es ist bemerkenswert, in welch feiner Form Gauss seinen Freund zurechtwies. — *b.* Auch **Gauss** ging, wie Lagrange, von der Beziehung 499 : 8 aus, führte aber (abgesehen davon, dass er der Symmetrie wegen die R durch D ersetzte), unter Benutzung der aus der beistehenden Figur folgenden Beziehungen



$$\text{Co}\,\theta_2 = -\text{Co}\,\beta_2 \cdot \text{Co}\,(\lambda_2 - L_2) \quad r_2 = D_2\,\text{Si}\,\theta_2 : \text{Si}\,\pi_2$$
$$\varrho_2 = D_2 \cdot \text{Si}\,(\theta_2 + \pi_2) : \text{Si}\,\pi_2 \qquad \mathbf{1}$$
$$\delta_2 = D_2 \cdot \text{Si}\,(\theta_2 + \pi_2) \cdot \text{Co}\,\beta_2 : \text{Si}\,\pi_2$$

in dieselbe successive die Hilfsgrössen

$$P = f_1 : f_3 \qquad Q = 2\,r_2^3 \cdot (f_1 + f_3 - f_2) : f_2 \qquad \mathbf{2}$$

$$\text{Tg}\,\psi = -\alpha \cdot \text{Co}\,\beta_2 \cdot \text{Si}\,\theta_2 : (B_2 + \alpha \cdot \text{Co}\,\beta_2 \cdot \text{Co}\,\theta_2) \qquad \mathbf{3}$$

$$\varepsilon = \frac{D_2 \cdot (B_2 + \alpha \cdot \text{Co}\,\beta_2 \cdot \text{Co}\,\theta)_2}{B_1 \cdot D_1 \cdot \text{Co}\,\psi} \qquad \eta = \frac{1}{2\,D_2^3 \cdot \text{Si}^3\,\theta_2 \cdot \text{Si}\,\psi} \qquad \mathbf{4}$$

$$\zeta \cdot \left(P + \frac{B_2\,D_2}{B_1\,D_1}\right) = \varepsilon\,(1 + P) \qquad \text{Tg}\,\omega = \frac{\text{Si}\,\psi}{\zeta - \text{Co}\,\psi} \qquad \zeta = \frac{\text{Si}\,(\psi + \omega)}{\text{Si}\,\omega} \qquad \mathbf{5}$$

ein, und erhielt so statt ihr die Gleichung

$$\eta \cdot Q \cdot \text{Si}^4\,\pi_2 \cdot \text{Si}\,\omega = \text{Si}\,(\pi_2 - \psi - \omega) \qquad \mathbf{6}$$

Die Formeln 1, 3, 4 erlauben nun θ_2, ψ, ε, η direkt zu berechnen, so dass dieselben als bekannte Grössen betrachtet werden dürfen; um dagegen ω und π_2 nach 5 und 6, und sodann r_2 und δ_2 nach 1 bestimmen zu können, hat man auch P und Q notwendig, und zur Ermittlung dieser Grössen ging **Gauss** in folgender Weise vor: Da die Flächen der Sehnendreiecke sich nahe wie die Beschreibungszeiten verhalten, so setzte er in erster Annäherung

$$P = \vartheta_1 : \vartheta_3 \qquad \mathbf{7}$$

Sodann führte er für die Differenzen $v_3 - v_2$, $v_3 - v_1$ und $v_2 - v_1$ der wahren Anomalien die Bezeichnungen $2\,h_1$, $2\,h_2$ und $2\,h_3$ ein, so dass er

$$f_3 = {}^1\!/_2\,r_1 \cdot r_2 \cdot \text{Si}\,2\,h_3 \qquad f_2 = {}^1\!/_2\,r_1 \cdot r_3 \cdot \text{Si}\,2\,h_2 \qquad f_1 = {}^1\!/_2\,r_2 \cdot r_3 \cdot \text{Si}\,2\,h_1 \qquad \mathbf{8}$$

zu setzen hatte, während anderseits nach 74 : 1 die Gleichungen

$$p = r_1\,(1 + e \cdot \text{Co}\,v_1) = r_2\,(1 + e \cdot \text{Co}\,v_2) = r_3\,(1 + e \cdot \text{Co}\,v_3) \qquad \mathbf{9}$$

bestanden. Multipliziert man letztere der Reihe nach mit $\text{Si}\,2\,h_1$, $-\text{Si}\,2\,h_2$ und $\text{Si}\,2\,h_3$, und addiert die Produkte, so erhält man mit Benutzung von 8 und der nach 62 : 4 leicht zu verifizierenden goniometrischen Beziehung

$$\text{Si}\,2\,h_1 - \text{Si}\,2\,h_2 + \text{Si}\,2\,h_3 = 4\,\text{Si}\,h_1 \cdot \text{Si}\,h_2 \cdot \text{Si}\,h_3$$

ohne Schwierigkeit statt 2''

$$Q = 4\,r_2^4 \cdot \mathrm{Si}\,h_1 \cdot \mathrm{Si}\,h_3 : (p \cdot \mathrm{Co}\,h_2) \qquad 10$$

Bezeichnet s den in der Zeit ϑ beschriebenen Ellipsensector, so ist nach 482 : 14 und 74 : 2

$$s = {}^1/_2\,k \cdot \vartheta = {}^1/_2\,g \cdot \vartheta \cdot \sqrt{p} \qquad 11$$

so dass, wenn y das Verhältnis des Sectors zum Sehnendreiecke bezeichnet, mit Hilfe von 8

$$y_1 \cdot y_3 = \frac{s_1}{f_1} \cdot \frac{s_3}{f_3} = \frac{\vartheta_1 \cdot \vartheta_3 \cdot p \cdot g^2}{r_1 \cdot r_2^2 \cdot r_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_1 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_3}$$

folgt. Setzt man aber den hieraus für p folgenden Wert in 10 ein, so ergiebt sich

$$Q = g^2 \cdot r_2^2 \cdot \vartheta_1 \cdot \vartheta_3 : (r_1 \cdot r_3 \cdot y_1 \cdot y_3 \cdot \mathrm{Co}\,h_1 \cdot \mathrm{Co}\,h_2 \cdot \mathrm{Co}\,h_3) \qquad 12$$

so dass in erster Annäherung für kleine und nahe gleiche Werte von ϑ_1 und ϑ_3

$$Q = g^2 \cdot \vartheta_1 \cdot \vartheta_3 \qquad 13$$

gesetzt werden darf. Mit den aus 7 und 13 erhaltenen Näherungswerten für P und Q berechnet man nun auf die bereits angegebene Weise provisorische Werte von ω, π_2, r_2, δ_2, — aus letztern mit Hilfe der 499 : 10, 11 ebensolche für δ_1, δ_3, r_1, r_3, — hieraus nach den 8 entnommenen approximativen Formeln

$$\vartheta_1 : \vartheta_2 = r_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_1 : (r_1 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_2) \qquad \vartheta_3 : \vartheta_2 = r_1 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_3 : (r_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\,h_2) \qquad 14$$

in Verbindung mit $h_1 + h_3 = h_2$ durch Näherung die h, — endlich nach 8 noch die f. Mit Hilfe letzterer Werte berechnet man sodann nach 2 bessere Werte von P und Q, — wiederholt mit diesen die Rechnung, — etc., bis keine erheblichen Veränderungen mehr erfolgen. — Aus den so bekannt gewordenen r und h kann man sodann nach **Gauss** die eigentlichen Elemente in folgender Weise finden: Setzt man die Differenz der excentrischen Anomalien $u_2 - u_1 = 2\,g_3$, so hat man nach 484 : 3

$$r_2 + r_1 = 2\,a\,[1 - e \cdot \mathrm{Co}\,g_3 \cdot \mathrm{Co}\,{}^1/_2\,(u_2 + u_1)] \qquad 15$$

ferner, da nach 484 : 4

$$\mathrm{Si}\,{}^1/_2\,v = \mathrm{Si}\,{}^1/_2\,u \cdot \sqrt{a\,(1+e) : r} \qquad \mathrm{Co}\,{}^1/_2\,v = \mathrm{Co}\,{}^1/_2\,u \cdot \sqrt{a\,(1-e) : r}$$

ist,

$$\mathrm{Co}\,h_3 = a \cdot [\mathrm{Co}\,g_3 - e \cdot \mathrm{Co}\,{}^1/_2\,(u_2 + u_1)] : \sqrt{r_1 \cdot r_2} \qquad 16$$

und, wenn man aus 15 und 16 die Grösse $\mathrm{Co}\,{}^1/_2\,(u_2 + u_1)$ eliminiert,

$$a = [r_2 + r_1 - 2 \cdot \mathrm{Co}\,g_3 \cdot \mathrm{Co}\,h_3 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}\,] : 2 \cdot \mathrm{Si}^2\,g_3 \qquad 17$$

Ferner erhält man nach 484 : 6, 7

$$g \cdot \vartheta_3 : a^{3/2} = 2\,g_3 - \mathrm{Si}\,2\,g_3 + 2\,\mathrm{Si}\,g_3 \cdot \mathrm{Co}\,h_3 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2} : a$$

oder, wenn man für a aus 17 substituiert und die Hilfsgrössen l, m, x, X durch

$$(r_2 + r_1) : 2 \cdot \left(\mathrm{Co}\,h_3 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}\right) = 1 + 2\,l \qquad g \cdot \vartheta_3 : (2\,\mathrm{Co}\,h_3 \cdot \sqrt{r \cdot r_2}\,)^{3/2} = m \qquad 18$$

$$x = \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2\,g_3 \qquad X = (2\,g_3 - \mathrm{Si}\,2\,g_3) : \mathrm{Si}^3\,g_3 \qquad 19$$

einführt,

$$m = (l + x)^{1/2} + (l + x)^{3/2} \cdot X \qquad 20$$

eine Gleichung, welche nur die Unbekannte g_3 enthält, also dieselbe durch ein Näherungsverfahren (sei es das von Gauss vorgeschlagene, auf das ich der Raumersparnis wegen hier nicht eintrete, oder ein anderes) leicht zu bestimmen erlaubt. Sodann kann man nach der aus 17 mit Hilfe von 18 und 19 folgenden Formel

$$a = 2\,(l + x) \cdot \mathrm{Co}\,h_3 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2} : \mathrm{Si}^2\,g_3 \qquad 21$$

e halbe grosse Axe berechnen, — ferner, wenn $\varphi = \text{Asi}\, e$ ist, nach

$$\frac{\text{Si}\, h_3}{\text{Si}\, g_3} = \frac{\text{Si}\, {}^1/_2\,(v_2 - v_1)}{\text{Si}\, {}^1/_2\,(u_2 - u_1)} = \frac{a \cdot \text{Co}\, \varphi}{\sqrt{r_1 \cdot r_2}} \quad \text{oder} \quad \text{Co}\, \varphi = \frac{\text{Si}\, h_3 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2}}{a \cdot \text{Si}\, g_3} \qquad \mathbf{22}$$

auch die Excentricität. Aus 15 kennt man bereits $\text{Co}\, {}^1/_2\,(u_2 + u_1)$, und aus der entsprechend 15 gebildeten Gleichung

$$r_2 - r_1 = 2\, a \cdot e \cdot \text{Si}\, g_3 \cdot \text{Si}\, {}^1/_2\,(u_2 + u_1) \qquad \mathbf{23}$$

ebenso $\text{Si}\, {}^1/_2\,(u_2 + u)$, also kann man, da $h = {}^1/_2\,(v_2 - v_1)$ schon bekannt ist, nach

$$\text{Tg}\, {}^1/_2\,(v_2 + v_1) = \text{Co}\, \varphi \cdot \text{Si}\, {}^1/_2\,(u_2 + u_1) : [\text{Co}\, {}^1/_2\,(u_2 + u_1) - \text{Si}\, \varphi \cdot \text{Co}\, g_3] \qquad \mathbf{24}$$

die v_2 und v_1, — aus diesen die u_2 und u_1, — und endlich nach

$$g \cdot t = (u - e \cdot \text{Si}\, u) \cdot a^{3/2} \qquad \mathbf{25}$$

die bei jeder der beiden Beobachtungen seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit t berechnen, also auch die Zeit dieses Durchganges selbst. Die heliocentrischen Coordinaten l und b, die Länge ☊ des aufsteigenden Knotens, die Neigung n der Bahn, und die, in Verbindung mit v und ☊, die Länge P des Perihels ergebenden Argumente α der Breite lassen sich nach 501 : 2—4 ermitteln, — und wenn die gewählte Epoche nicht mit dem Durchgange durch das Perihel zusammenfällt, so wird schliesslich die mittlere Länge M zur Epoche erhalten, indem man P für jeden Tag Zeitunterschied um die mittlere tägliche Bewegung $g : a^{3/2}$ vermehrt.

504. Die neuern Arbeiten. — Wenn auch anfänglich durch die bereits kurz besprochenen Arbeiten und ganz besonders durch die Theoria motus von **Gauss**, aus der ich bei zureichendem Raume gerne noch einige spätere Abschnitte über die Benutzung einer grössern Anzahl von Beobachtungen und die Berücksichtigung störender Einflüsse besprochen hätte, die Lehre von den Bahnbestimmungen abgeschlossen schien, so wären nichts destoweniger noch manche seitherige Leistungen aufzuführen. Ich muss mich jedoch, abgesehen von einigen bereits beiläufig erwähnten Einzelnheiten, darauf beschränken, unten noch eine kurze Übersicht der neuern betreffenden Litteratur beizufügen [a].

Zu 504: *a.* Aus der grossen Anzahl der auf diesem Gebiete gelieferten Arbeiten glaube ich z. B. noch folgende erwähnen zu sollen: „**Encke**, Über die Olbers'sche Methode zur Bestimmung der Cometenbahnen (Berl. Jahrb. 1833), und: Über den Ausnahmefall einer doppelten Bahnbestimmung aus denselben drei geocentrischen Oertern (Berl. Abh. 1848), — B. **Valz**, De la recherche immédiate des orbites des Comètes (Conn. d. t. 1835), — **Airy**, On the determination of the orbits of Comets from observations (Mem. Astr. Soc. 1839), — **Plantamour**, Disquisitio de methodis traditis ad Cometarum orbitas determinandas. Regiomonti 1839 in 4., — Yvon **Villarceau**, Méthode de correction des éléments approchés des orbites des Comètes au moyen de trois observations (Auszug in Compt. rend. 1845; das für die Sav. étr. bestimmte Mémoire selbst scheint nie erschienen zu sein), und: Méthodes pour la détermination des orbites des planètes et des comètes (Ann. de l'observ. 1857), — **Cauchy**, Mémoire sur la détermination des orbites des planètes et comètes (Compt. rend. 1846—48), — El. **Ritter**, Sur la détermination des élémens de

l'orbite d'une comète ou d'une planète. Genève 1851 in 4., und: Nouvelle méthode pour déterminer les élémens de l'orbite des astres. Genève 1855 in 4., — **Perrey**, Sur la détermination de l'orbite des planètes et comètes (Conn. d. t. 1853), — **Galle**, Über die Verbesserung der Planeten-Elemente aus beobachteten Oppositionen. Breslau 1858 in 4., — **Klinkerfues**, Über Bahnbestimmungen von Planeten und Cometen aus verschiedenen Combinationen von Beobachtungen. Göttingen 1862 in 4., und: Theoretische Astronomie. Braunschweig 1871 in 8., — Friedrich **Tietjen** (Westerstede in Holstein 1834 geb.; Dir. Recheninstitut Sternw. Berlin), De methodis ad orbitas cometarum determinandas adhibitis. Berolini 1864 in 4., und: Zusammenstellung aller für die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen erforderlichen Formeln nebst Rechnungsschema (Berl. Jahrb. 1879), — J. C. **Watson**, Theoretical Astronomy. Philadelphia 1868 in 8., — Johannes **Frischauf** (Wien 1837 geb.; Prof. math. Graz), Theorie der Bewegung der Himmelskörper um die Sonne nebst deren Bahnbestimmung in elementarer Darstellung. Graz 1868 in 8., — **Oppolzer**, Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Leipzig 1870—80, 2 Bde. in 8. (Bd. I in 2. Bearb. 1882; franz. von E. Pasquier, Paris 1886), — Maurice **Loewy** (Wien 1833 geb.; Subdir. Obs. Paris), Détermination des orbites des Comètes. Paris 1872 in 4., — **Radau**, Sur la détermination des orbites (Bull. astr. 1885), — **Schönfeld**, Über die Berechnung der Differentialformeln zur Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahnelemente für Planeten und Cometen. Mit Hülfstafeln (A. N. 2693—95 von 1885), — N. **Herz**, Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen. I. Leipzig 1887 in 8., — George M. **Searle**, On a method of computing an orbit from three observations (Astr. J. 162—64 von 1887), und: On a method of correcting a first parabolic orbit to represent a later observation (Astr. J. 218 von 1890), — J. Will. **Gibbs**, On the determination of elliptic orbits from three complete observations (Mem. Nat. Acad. IV; vgl. W. Fabritius in A. N. 3061 von 1891, und: Rob. Vogel in A. N. 3075 von 1892), — etc."

505. Einleitendes in die Theorie der sog. Störungen. — Wenn man in den Lagrange'schen Gleichungen (481) die Störungsfunktion auch nicht vernachlässigt, wie es bei Ableitung der Kepler-schen Gesetze (482) geschehen ist, so kann man dennoch in ganz entsprechender Weise progredieren und erhält sodann schliesslich das Resultat, dass auch noch in diesem Falle die Bahn in einer durch die Sonne gehenden Ebene liegt und eine Linie zweiten Grades ist, dass aber die bestimmenden Elemente sich mit der Zeit langsam zu verändern scheinen [a]. Um jedoch die Natur und den Betrag dieser Veränderungen, welche man von jeher als **Störungen** bezeichnet hat, genauer kennen zu lernen, sind eingehendere Rechnungen nötig, welche denn auch neben Lösung verwandter Aufgaben die grössten Geometer schon seit zwei Jahrhunderten in Anspruch genommen haben, und es liegt uns nunmehr ob, teils von den nach und nach behandelten Fragen, teils von den zu ihrer Beantwortung eingeschlagenen Wegen und den auf letztern erhaltenen Resultaten in gedrängter Kürze Kenntnis zu geben [b].

Zu 505: *a.* Bezeichnet man die Differentialquotienten der Coordinaten nach der Zeit, oder also die Geschwindigkeiten nach den Axen, mit x′, y′, z′, so erhält man aus den 481 : 2 ohne irgend welche Vernachlässigung

$$\sum f^2 \mu \left(x \cdot \frac{dR}{dy} - y \cdot \frac{dR}{dx}\right) = \frac{x \cdot d^2y - y \cdot d^2x}{dt^2} = \frac{d(x \cdot y' - y \cdot x')}{dt}$$

$$\sum f^2 \mu \left(z \cdot \frac{dR}{dx} - x \cdot \frac{dR}{dz}\right) = \frac{z \cdot d^2x - x \cdot d^2z}{dt^2} = \frac{d(z \cdot x' - x \cdot z')}{dt}$$

$$\sum f^2 \mu \left(y \cdot \frac{dR}{dz} - z \cdot \frac{dR}{dy}\right) = \frac{y \cdot d^2z - z \cdot d^2y}{dt^2} = \frac{d(y \cdot z' - z \cdot y')}{dt}$$

und hieraus, wenn man die Grössen links vom Gleichheitszeichen mit $dc' : dt$, $dc'' : dt$ und $dc''' : dt$ bezeichnet, sowie integriert, die der Form nach ganz mit 482 : 6 übereinstimmenden Gleichungen

$$x \cdot y' - y \cdot x' = c' \qquad z \cdot x' - x \cdot z' = c'' \qquad y \cdot z' - z \cdot y' = c''' \qquad \textbf{1}$$

woraus entsprechend 482 : 2

$$c' \cdot z + c'' \cdot y + c''' \cdot x = 0 \qquad \textbf{2}$$

folgt, jedoch der kapitale Unterschied statt hat, dass jetzt die c sich mit der Zeit verändern, also 2 eigentlich keine Ebene mehr repräsentiert, und nur annäherungsweise, weil die Massen der Planeten im Verhältnisse zur Sonnenmasse klein sind, als die Gleichung einer mit der Zeit langsam veränderlichen Ebene betrachtet werden darf. Geht man auch im weitern ganz entsprechend wie in 482 vor, dabei

$$\sum 2 f^2 \mu \left(\frac{dR}{dx} \cdot x' + \frac{dR}{dy} \cdot y' + \frac{dR}{dz} \cdot z'\right) = -\frac{dh}{dt} \qquad k^2 = c'^2 + c''^2 + c'''^2 \qquad \textbf{3}$$

setzend, so kömmt man ebenfalls auf

$$dv = k \cdot dr : \left[r \cdot \sqrt{2 f^2 \cdot (1 + m) \cdot r - h \cdot r^2 - k^2}\right] \qquad \textbf{4}$$

wo aber h und k mit der Zeit ebenfalls veränderlich sind. Sieht man vorerst hievon ab, so erhält man wie in 482 das Integral

$$r = a \cdot (1 - e^2) : [1 + e \cdot \mathrm{Co}\,(v - w)] \qquad \textbf{5}$$

wo a und e in durch 482 : 14 bestimmter Weise von h und k abhängen, folglich ebenfalls mit der Zeit veränderlich sind. Differentiert man aber 5 unter der Annahme, dass auch die sämtlichen, vorläufig als konstant betrachteten Grössen veränderlich seien, so ergiebt sich

$$d \cdot [a(1 - e^2)] = dr + e \cdot \mathrm{Co}\,(v - w) \cdot dr - r \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,(v - w) \cdot dv$$
$$+ r \cdot \mathrm{Co}\,(v - w) \cdot de + r \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,(v - w) \cdot dw$$

wo die obere Zeile rechts für sich als Differential einer bei der Integration als konstant angenommenen Grösse Null sein muss, und wenn daher die Relation

$$d[a \cdot (1 - e^2)] = r \cdot \mathrm{Co}\,(v - w) \cdot de + r \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,(v - w) \cdot dw \qquad \textbf{6}$$

besteht, so ist 5 auch noch für variable Werte von h und k das Integral von 4, d. h. es ist die Bahn noch eine Linie zweiten Grades, deren Elemente sich jedoch, in einer gewissen Abhängigkeit von einander, mit der Zeit langsam verändern werden. — *b.* Wir werden in 506—10 die historische Entwicklung der Störungstheorien verfolgen, und sodann in 511—14 auf einige Untersuchungen etwas näher eintreten.

506. Die Arbeiten von Newton und Halley. — Schon **Newton** sah ein, dass bei den geringen Massen und grossen Ent-

fernungen der Planeten ihre Gesamtwirkung durch die Summe ihrer Einzelnwirkungen ersetzt, also die Störungsrechnung als **Problem der drei Körper** aufgefasst werden könne, und unternahm bereits in diesem Sinne verschiedene Untersuchungen, — namentlich aber fasste er das bei der Bewegung des Erdmondes auftretende analoge Problem ins Auge und wusste die damals bekannten Hauptungleichheiten derselben, sowie die Präcession, als notwendige Folgen der allgemeinen Gravitation zu erweisen [a]. Auch sein grosser Parteigänger, der (269) schon um die Herausgabe der Principien hochverdiente **Halley**, ging in derselben Richtung vor und trug überdies zur weitern Entwicklung der Mechanik des Himmels dadurch bei, dass er in der von ihm aus alten Beobachtungen nachgewiesenen Acceleration der mittlern Bewegung des Mondes, sowie einer von ihm ebenso aufgefundenen eigentümlichen Ungleichheit in den Bewegungen von Jupiter und Saturn, unbestreitbare Thatsachen aufdeckte, an deren Erklärung sich die Leistungsfähigkeit der neuen Lehre erproben konnte [b].

Zu 506: *a.* Der für dieses ganze Gebiet grundlegenden „Principien“ von **Newton** und der in denselben mit so grossem Geschick in Angriff genommenen schwierigen Probleme ist schon wiederholt (269 und später) gedacht worden, und von den Methoden, die zu ihrer Lösung führen, ja mutmasslich (vgl. 269 : f) schon von dem alten Meister wenigstens teilweise benutzt wurden, wird im folgenden (511—14) noch mehrfach die Rede sein, so dass vorläufig das oben gesagte genügen dürfte. Ich will nur noch die Worte beifügen, mit welchen Newtons grosser Nachfolger in seiner „Exposition du système du monde“ den Standpunkt kennzeichnet, von welchem aus die Gegenwart jenes Werk zu betrachten hat. „La littérature a des limites qu'un homme de génie peut atteindre, lorsqu'il employe une langue perfectionnée“, sagt **Laplace**; „on le lit avec le même intérêt dans tous les âges, et le temps ne fait qu'ajouter à sa réputation par les vains efforts de ceux qui cherchent à l'imiter. Les sciences au contraire, sans bornes comme la nature, s'accroissent à l'infini par les travaux des générations successives: le plus parfait ouvrage, en les portant à une hauteur d'où elles ne peuvent désormais descendre, donne naissance à des découvertes qui les élèvent au dessus, et prépare ainsi des ouvrages qui doivent l'effacer. D'autres présenteront sous un point de vue plus général et plus simple, les théories exposées dans le livre des principes, et toutes les vérités qu'il a fait éclore; mais il restera comme un monument éternel de la profondeur du génie qui nous a révélé la plus grande loi de l'univers.“ — *b.* Schon als ganz junger Mann hatte **Halley** in seinem „Methodus investigandi excentricitates planetarum (Ph. Tr. 1676)“ nachgewiesen, dass sich die mittlere Bewegung Saturns fortwährend verzögere, während diejenige Jupiters gegenteils beschleunigt werde, — wie wenn sich Saturn von der Sonne entfernen, Jupiter sich derselben nähern würde, — ein Faktum, dessen nähere Präcisierung und Erklärung dann allerdings (508) erst ein volles Jahrhundert später Laplace gelang. Nachdem sodann **Halley** (vgl. den Anhang zu seinem Catal. stell. austr. von 1679 und die Ph. Tr. 1683) mehrere andere die Theorien der Wandelsterne

betreffende Untersuchungen veröffentlicht, und nach Erscheinen von Newtons Principien durch seinen „Discourse concerning gravity (Ph. Tr. 1686)“, sowie durch seine „Short analyse of Philosophiæ naturalis principia autore Is. Newton (Ph. Tr. 1687)“ wesentlich zur raschern Verbreitung der neuen Lehre beigetragen hatte, wies er in seinen „Emendationes ac notæ in vetustas Albatenii observationes astronomicas, cum restitutione tabularum lunisolarium (Ph. Tr. 1693)“ nach, dass die neuern Mondbeobachtungen und die aus den uns von den Alten zugekommenen Finsternissen folgenden Positionen nur in Einklang gebracht werden können, wenn man annehme, dass sich die mittlere Bewegung des Mondes beschleunige, und wenn es auch weder ihm noch **Newton**, der diese später durch Richard **Dunthorne** in seinen „Letters concerning the Moon's motion (Ph. Tr. 1747—49)“ zu mindestens 10″ normierte **sekuläre Acceleration** mit einer durch den Widerstand des Mittels veranlassten Annäherung des Mondes in Zusammenhang bringen wollte, gelang, dieselbe theoretisch zu begründen, ja es wieder Laplace (508) vorbehalten blieb, dies wenigstens bis zu einem gewissen Grade auszuführen, so war die dadurch gegebene Anregung nicht ohne grossen Einfluss auf die Ausbildung der Mechanik des Himmels.

507. Die Zeit von Clairaut, Euler und d'Alembert. — Nachdem sich auch noch bei einigen durch Preisaufgaben der Pariser Akademie veranlassten Untersuchungen die Vorzüglichkeit der Newton'schen Lehre bewährt hatte [a], triumphierte dieselbe vollständig, und auf ihrem Fundamente gelang es um die Mitte des vorigen Jahrhunderts dem Dreigestirne Clairaut, Euler und d'Alembert, in schönstem Wettkampfe den Ausbau der Mechanik des Himmels so zu fördern, dass der alte Meister bei noch etwas längerm Leben seine helle Freude daran gehabt hätte: Ich erinnere beispielsweise an die von **Clairaut** verfasste Preisschrift „Théorie de la lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionelle aux quarrés des distances. St-Pétersbourg 1752 in 4.“, in welcher die komplizierte Bewegung unsers Begleiters zum ersten Male systematisch abgehandelt wurde [b], — an die von **Euler** in den Jahren 1748, 1752 und 1756 der Pariser Akademie vorgelegten und jeweilen von ihr gekrönten „Recherches sur les inégalités du mouvement des planètes produites par leurs actions réciproques (Pièces de prix 6—8)“, in welchen er die planetarischen Störungen zum ersten Male umfassend in Betracht zog und dabei das fruchtbare Princip der „Variation der Constanten“ einführte [c], — und an die von **d'Alembert** ausgegebenen „Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre dans le système newtonien. Paris 1749 in 4.“, in welchen diese schwierigen Untersuchungen zum ersten Male in streng mathematischer Weise durchgeführt wurden [d].

Zu 507: *a.* Ich habe hier zunächst die bereits in 269:g besprochene Abhandlung Gabriel Cramers von 1730 im Auge, und sodann die von Dan. **Bernoulli** verfassten „Disquisitiones physico-astronomicæ problematis ab Academiâ

regiâ scientiarum propositi, quænam sit causa physica inclinationibus planorum in quibus planetæ orbitas suas describunt, ad planum æquatoris. Parisiis 1735 in 4. (gleichzeitig auch in franz. Übersetzung erschienen, die noch 1808 zum zweiten Mal ausgegeben wurde)", welche 1734 von der Pariser Akademie zugleich mit einer von dem berechnenden Vater in cartesianischem Geiste geschriebenen Abhandlung über denselben Gegenstand gekrönt wurden, — eine längere Diskussion zwischen Daniel und seinem damals noch zu Cartesius hinneigenden Freunde Euler veranlassten, — und wesentlich dazu beitrugen, letztern für die Gravitationstheorie zu gewinnen. — *b.* Da wir in 513 speciell auf die Theorie des Mondes eintreten werden, so mag es hier genügen anzuführen, dass **Clairaut** schon vor seiner oben erwähnten Preisschrift von 1752, welche 1765 zu Paris in zweiter und vermehrter Auflage erschien, sich sehr eingehend mit der Theorie des Mondes befasst und bereits (vgl. Mém. Par. 1743, 1745 und 1748) drei bemerkenswerte Abhandlungen über dieselbe ausgearbeitet, aber allerdings dabei grosse Schwierigkeiten zu überwinden gehabt hatte, so dass er oft fast daran verzweifelte, alle bekannten Ungleichheiten darstellen zu können. So ergaben ihm z. B., wie Bertrand 1869 in seiner Geschichte der Akademie erzählte, anfänglich seine Rechnungen für die Bewegung des Mond-Apogeums einen viel zu kleinen Wert. „Au lieu d'attribuer à l'imperfection de sa méthode ce désaccord avec les observations **Clairaut** préféra accuser l'insuffisance de la loi d'attraction, et ébranlant lui-même tout son édifice, crut avoir contraint les géomètres à ajouter un terme nouveau au terme simple donné par Newton. **Buffon** refusa avec raison de corrompre, par l'abandon si précipité du principe, la simplicité d'une théorie si grande et si belle. En étudiant d'ailleurs de nouveau la question avec autant de patience que de bonne foi, **Clairaut**, pour reconnaître son erreur, n'eut pas besoin de rectifier son calcul, mais de le continuer." Der 17. Mai 1749, an dem er der Akademie das Endresultat seiner betreffenden Rechnungen mitteilen konnte, gehört zu den Festtagen der Astronomen. — *c.* Auch **Euler** befasste sich vielfach und erfolgreich mit der Mondtheorie, wie uns z. B. seine schon Mitte der Vierzigerjahre vollendete „Theoria motuum Lunæ. Berolini 1753 in 4.", seine 1770 von der Pariser Akademie gekrönte „Théorie de la lune (Pièces de prix Vol. 9)", etc. zeigen, welchen noch eine ganze Reihe anderer betreffender Schriften und Abhandlungen beigefügt werden könnten; aber seine Hauptleistungen für die Mechanik des Himmels dürften doch durch die drei obenerwähnten Preisschriften, welche einzeln die Titel „Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, — Sur les dérangemens que Saturne et Jupiter se causent mutuellement principalement vers le temps de leur conjonction, — Sur les inégalités du mouvement des planètes produites par leurs actions réciproques" führen, repräsentiert werden, da die schon in der ersten entwickelten und sodann in den folgenden noch weiter ausgebildeten Principien, von welchen wir später (511) ebenfalls Gebrauch machen werden, für das ganze Gebiet von durchschlagendem Erfolge waren, — auch den Ruhm von **Euler** so erhöhten, dass die Pariser Akademie, welche vor und nach strenge an ihrer beschränkten Anzahl von acht auswärtigen Mitgliedern festhielt, sich 1755 von Louis XV. die Erlaubnis auswirkte, ihn als Surnuméraire aufzunehmen, — und noch lange nachher Laplace (vgl. Méc. cél. V) bei Erwähnung der Euler'schen Preisschrift von 1748 rühmte: „Euler a surmonté par son génie et par son profond savoir en analyse, des obstacles qui dès les premiers pas, auraient arrêté la plupart des géomètres". —

d. Auch **d'Alembert** gab eine bemerkenswerte „Théorie de la lune", welche den ersten Band seiner „Recherches sur différens points importans du système du monde. Paris 1754—56, 3 Vol. in 4." füllt, während die zwei folgenden Bände teils einer „Recherche de l'orbite des Planetes principales dans le système de l'attraction", teils verschiedenen Nachträgen zu seiner Mondtheorie und den obenerwähnten Recherches von 1749 gewidmet sind. Auf die Theorien der Präcession und Nutation werden wir in 514 etwas specieller eintreten.

508. Die Zeit von Lagrange, Lambert und Laplace. — Dem Triumphzuge des erwähnten Dreigestirnes schlossen sich alsbald auch die Lagrange, Lambert und Laplace durch entsprechende und ebenso folgewichtige Arbeiten an. Ich erinnere beispielsweise daran, dass **Lagrange** schon 1772 für Untersuchungen über die Mondtheorie mit Euler einen von der Pariser Akademie ausgesetzten Doppelpreis teilen konnte, in weiterer Verfolgung derselben (481) die Störungsfunktion einführte, und durch die „Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes (Mém. Par. 1774)" seinen Rivalen Laplace zu neuen Arbeiten anregte [a], — dass **Lambert** durch vielfache Abhandlungen und namentlich durch seine von Laplace ausgiebig benutzten „Recherches sur les irrégularités du mouvement de Saturne et de Jupiter (Mém. Berl. 1773 und 1779)" sich als vollkommen ebenbürtig erwies [b], — und dass endlich **Laplace** nicht nur schon in jüngern Jahren durch eine ganze Reihe von Specialarbeiten, wie z. B. seine die Constanz der grossen Axen erweisenden „Recherches sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent (Mém. sav. étr. 1776, gelesen 1773)", seine die Halley'sche Ungleichheit beleuchtende „Théorie de Jupiter et de Saturne (Mém. Par. 1785—86), und seine namentlich auch in Bezug auf die Frage wegen der **Unveränderlichkeit des Tages** wichtige „Observation sur l'équation séculaire de la lune (Mém. Par. 1786)" die Mechanik des Himmels ungemein förderte, sondern auch ein das ganze Gebiet umfassendes Werk von hervorragender Bedeutung schuf, welchem die folgende Nummer speciell gewidmet ist [c].

Zu 508: *a.* Von den spätern Arbeiten, welche die Mechanik des Himmels **Lagrange** verdankte, mögen noch speciell die drei Abhandlungen „Théorie des variations séculaires des éléments des planètes (Mém. Berl. 1781—82), — Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes (Mém. Berl. 1783—84), — und: Théorie géométrique du Mouvement des aphélies des planètes (Mém. Berl. 1786)" erwähnt werden. — *b.* Horner schrieb (vgl. Biogr. III 355) 1828 II 27 an Dan. Huber: „Plana ist ein grosser Verehrer Lambert's und behauptet, Laplace habe Manches in seiner Theorie des Jupiter und Saturn von **Lambert** entnommen ohne ihn zu nennen". — *c.* Auf die durch **Laplace** wenigstens bis zu einem gewissen Grade erwiesene Unveränderlichkeit der

grossen Axen und Umlaufszeiten werden wir später (511) zurückkommen; dagegen wollen wir jetzt schon etwas näher auf die scheinbar damit in einem gewissen Widerspruche stehende sog. grosse Ungleichheit zwischen Jupiter und Saturn eintreten, sowie auf die mit der Frage nach der Unveränderlichkeit des Tages in Zusammenhang stehende sekuläre Gleichung. — Was die erstere anbelangt, so hatte Halley das sie thatsächlich erweisende und früher (506 : b) mitgeteilte Resultat durch Vergleichung der neuern Bestimmungen mit denjenigen aus der Zeit Hipparchs erhalten, aber es war den Euler, Lagrange, etc. nicht gelungen, dasselbe aus den gegenseitigen Einwirkungen der beiden grossen Planeten aufeinander befriedigend zu erklären, und als nun noch **Lambert** durch Vergleichung der Tychonischen Beobachtungen mit den von ihm selbst angestellten das scheinbar widersprechende Resultat erhielt, dass wenigstens gegenwärtig die Bewegung Saturns beschleunigt, diejenige von Jupiter verzögert sei, so war man anfänglich ganz ratlos. Als es nun aber **Laplace** nachzuweisen gelang, dass die Umlaufszeiten der Planeten keine mit der Zeit fortschreitende oder sog. **sekuläre** Veränderungen erleiden, so leitete ihn in Verbindung mit diesem Ergebnis gerade der eben erwähnte Gegensatz in den Funden von Halley und Lambert zu der Annahme einer **periodischen** Veränderung, und als er sodann seine Störungsrechnungen noch auf bis dahin vernachlässigte Glieder ausdehnte; zeigte es sich, dass unter diesen solche vorkommen, welche gerade bei Jupiter und Saturn infolge ihrer sich sehr nahe wie 2 zu 5 verhaltenden Umlaufszeiten ganz erhebliche Werte annehmen, und zwar so, dass in circa 930 Jahren Saturn durch Einwirkung Jupiters um $\pm 2950''$ und Jupiter durch Einwirkung Saturns um $\mp 1200''$ aus seiner der mittlern Bewegung entsprechenden Stellung entfernt werden kann; gegen 1560 war die Bewegung Saturns am langsamsten, diejenige Jupiters am schnellsten, — nach 2020 wird sich dagegen Saturn am schnellsten, Jupiter am langsamsten bewegen. — Die (vgl. 506 : b) durch Halley aufgefundene Acceleration der mittlern Bewegung des Mondes wurde auch durch seine Nachfolger bestätigt; dagegen zeigten sich grosse Schwierigkeiten in der theoretischen Begründung dieser Anomalie, ja es gelang erst **Laplace**, in der oben erwähnten Abhandlung nachzuweisen, dass in dem Ausdrucke für die Winkelgeschwindigkeit des Mondes ein subtraktives und dem Quadrate der Excentricität der Erdbahn proportionales Glied vorkomme, also gegenwärtig, wo diese Excentricität sich vermindere, die Winkelgeschwindigkeit notwendig zunehme. Während aber Laplace annahm, dass er in solcher Weise den ganzen Betrag jener gegenwärtig in einem Jahrhundert etwa $12^1/_2''$ betragenden Anomalie erklären könne, und die **Hansen, Plana**, etc. ihm vollständig beipflichteten, so fanden dagegen die **Adams, Delaunay**, etc., dass auf diese Weise nur etwa die Hälfte des wirklichen Betrages darstellbar sei und bei 6″ auf einer andern Ursache beruhen müssen, — ja **Delaunay** glaubte diese in einer schon längst von andern vermuteten kleinen Retardation der Erdrotation zu finden. Würde nämlich eine solche Retardation den ersten Tag um a Sekunden, den zweiten noch einmal um a, den dritten also bereits um 3 a, etc. verlängern, so müsste dadurch in den 36525 Tagen eines Jahrhunderts eine Gesamtverspätung von $A = a \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 36525) = \frac{1}{2} \cdot 36525 \cdot 36526 \cdot a$ Sekunden entstehen, während sich der Mond in $1^h = 3600^s$ nahe um seinen etwa 1920″ betragenden Durchmesser verschiebt, also eine Verschiebung um 1″ etwa 3600 : 1920 Zeitsekunden erfordert. Wenn daher $6 \cdot 3600 : 1920 = A$ oder $a = {}^1/_{60\,000\,000}{}^s$ wäre, so würden sich die 6″ als notwendige Folge ergeben; aber wenn man sich

auch eine so minime Retardation allfällig mit **Kant** durch den beständigen Anschlag der Flutwellen oder mit Ch. **Dufour** durch eine mit dem Niederfallen von Meteoriten, etc. zusammenhängende successive Vermehrung der Erdmasse erklären wollte, so erregt doch, wie schon **Newcomb** hervorgehoben hat, eine solche Übertragung auf die Erde grosse Bedenken, da diese Retardation sich auch in andern scheinbaren Bewegungen zeigen müsste, und dies nicht der Fall zu sein scheint. Vgl. für diese Frage auch die von F. **Tisserand** in den Annuaire auf 1892 eingerückte „Notice sur la Lune et son accélération séculaire". — Anhangsweise mag noch erwähnt werden, dass die Berliner Akademie schon 1754 die Preisfrage stellte „Ob die Erde in ihrer Umdrehung um die Achse einige Veränderung seit den ersten Zeiten ihres Ursprungs erlitten habe", und sodann die verneinende Abhandlung „Paolo **Frisi** (Mailand 1728 — ebenda 1784; Barnabit; Prof. math. Pisa und Mailand; seine Voreltern sollen Fries aus Strassburg gewesen sein), De motu diurno terræ. Berolini 1756 in 4." krönte, — dass, als die Petersburger Akademie diese Frage für 1783 wiederholte, zwei zu demselben Resultate gelangte Abhandlungen von **Frisi** und Joh. Friedrich **Hennert** (Berlin 1733 — Utrecht 1813; Prof. math. et astr. Utrecht) eingingen, welche unter dem Titel „Dissertationes de uniformitate motus diurni Terræ, præmio coronatæ. Petropoli 1783 in 4." publiziert wurden, — und dass (vgl. Nova Acta Petr. I, ausg. 1787) **Rumovski** bei seinem betreffenden Referate die bemerkenswerte Ansicht aussprach, es möchte das sicherste Mittel, eine solche Veränderung zu konstatieren, darin bestehen, an demselben Orte zu verschiedenen Zeiten die Länge des Sekundenpendels mit möglichster Schärfe zu messen.

509. Die Mécanique céleste von Laplace. — Nachdem **Laplace** in seiner meisterhaft abgefassten „Exposition du système du monde. Paris 1796, 2 Vol. in 8." einen Prodromus ausgegeben hatte [a], publizierte er alsbald unter dem Titel „Mécanique céleste. Paris 1799—1825, 5 Vol. in 4." ein fundamentales Werk, in welchem er sowohl seine eigenen betreffenden Arbeiten, als diejenigen seiner Vorgänger und Zeitgenossen, einheitlich abhandelte [b]: **Die zwei ersten** (1799 erschienenen) **Bände** enthalten unter dem Titel „Théorie générale des mouvements et de la figure des corps célestes" den allgemeinen Teil, der hinwieder in fünf Bücher zerfällt, welche der Reihe nach die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung entwickeln, — das Gesetz der allgemeinen Schwere und die daraus folgenden Bewegungen der Schwerpunkte der Himmelskörper auseinandersetzen, wobei erst die elliptische Bewegung und die Bestimmung der Bahnelemente, dann die später noch einlässlicher zu berührende Theorie der Störungen durchgenommen wird, — die Figur der Himmelskörper behandeln, wobei speciell für die Erde die Ergebnisse der Gradmessungen in Betracht gezogen werden, — die Oscillationen des Meeres und der Atmosphäre untersuchen, wobei das Phänomen der Ebbe und Flut natürlich die Hauptrolle spielt, — und endlich die Bewegung der Himmelskörper um ihre Schwer-

punkte betrachten, wo bei der Erde speciell die Theorie der Präcession und Nutation, beim Monde diejenige der Libration abgehandelt wird. **Der dritte** (1801) **und der vierte** (1805 ausgegebene) **Band** geben sodann unter dem Titel „Théories particulières des mouvements célestes" in weitern vier Büchern die Specialtheorien der einzelnen Planeten, des Erdmondes, der übrigen Satelliten und der Kometen, und in einem fünften Buche werden anhangsweise noch die Refraktion, die Hypsometrie, der Einfluss eines widerstehenden Mittels, etc. behandelt. **Der fünfte** (1825 nachgelieferte) **Band** endlich enthält eine kurze Geschichte der Mechanik des Himmels und eine Reihe von, zum Teil ebenfalls historischen, Nachträgen zu den frühern Bänden. **Das ganze Werk** bildet noch jetzt den Ausgangspunkt für alle einschlagenden Untersuchungen und das schönste Denkmal für seinen Verfasser [c].

Zu 509: *a.* In demselben Jahre erschien dann auch noch eine Ausgabe in einem Quartbande, welche später vorzugsweise (noch 1835 in 6. A.) reproduziert und auch in die Gesamtausgaben aufgenommen wurde. Eine deutsche Übersetzung besorgte F. Hauff, Frankfurt 1797, 2 Bde. in 8., — eine englische J. Pond, London 1809. — *b.* Unmittelbar nach Erscheinen der zwei ersten Bände besorgte J. C. **Burckhardt** unter den Augen des Verfassers eine deutsche Übersetzung, welche 1800—2 zu Berlin in zwei Quartbänden erschien; die Erlaubnis, den neuen Massen und Einteilungen wenigstens in Klammern die alten Werte beizusetzen, wurde ihm von Laplace hartnäckig verweigert. Eine englische Ausgabe, welche H. Harte 1822 zu Dublin begann, blieb schon bei dem zweiten Buche stecken; dagegen besorgte **Bowditch** „Boston 1829—39, 4 Vol. in 4." eine solche unter Beifügung eines eingehenden Kommentars. — *c.* Die „Mécanique céleste" bildet eine der schwierigsten Lektüren, da **Laplace**, um sein Werk nicht über jedes erlaubte Mass auszudehnen, genötigt war, viele seiner Entwicklungen für den Druck einfach auszustreichen, und sehr oft ist es gerade da, wo man statt der weggelassenen Rechnung die so unschuldig scheinende Phrase „Il est aisé de voir" liest, gar nicht leicht, dieselbe herzustellen, — brauchte ja der Verfasser selbst einmal (wie sein Korrektor Biot in Bd. 1 der „Mélanges" erzählt) bei einer Stunde Zeit, um an einer solchen Stelle den Faden der Rechnung wieder aufzufinden.

510. Die Arbeiten der Neuzeit. — Dass der durch Laplace gesammelte Schatz von der Neuzeit nicht nur gehütet, sondern auch möglichst fruchtbar angelegt wurde, würde sich leicht durch viele Beispiele erweisen lassen; jedoch muss ich mich darauf beschränken, an die Neubearbeitungen zu erinnern, welche **Leverrier** in seinen „Recherches astronomiques (Ann. de l'Obs.: Mém. 1—11 von 1855—76)" in meisterhafter Weise durchgeführt, und **Tisserand** in seinem „Traité de mécanique céleste. Tome 1—2, Paris 1889 bis 1891 in 4." so vielversprechend begonnen hat [a], — an die, namentlich von **Gyldèn**, mit Erfolg unternommenen Versuche, die

ganze Entwicklung auf eine neue Basis zu stellen [b], — und an die grossen Anstrengungen der **Hansen, Plana** und **Delaunay**, die Mondtheorie zu vervollkommnen [c], — im übrigen auf die sehr ausgedehnte Speciallitteratur verweisend [d].

Zu 510: *a.* So vortrefflich Laplace für seine Zeit die Mechanik des Himmels abhandelte, so sind seither durch die Bessel, Cauchy, Gauss, Poisson, etc. teils die astronomischen Grundlagen, teils die analytischen Methoden so wesentlich vervollkommnet worden, dass eine neue Bearbeitung wünschbar wurde, und diese (wie uns die folgenden Nummern noch etwas näher legen werden) höchst schwierige Arbeit hat nun, unter Benutzung der eingehenden Studien von **Leverrier**, in der neuesten Zeit, wie bereits angedeutet wurde, **Tisserand** mit Glück an die Hand genommen, ja heute schon soweit absolviert, dass ihm ein grosses Verdienst um diese wichtigen Theorien zugeschrieben werden muss. — *b.* Schon in seiner Note „Über die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper (A. N. 2383 von 1881)" sprach sich **Gyldèn** dahin aus, dass die Mechanik des Himmels auf dem bisherigen Wege, die Lösung des Störungsproblemes durch successive Verbesserung der elliptischen Elemente zu suchen, keine wesentlichen Fortschritte mehr erhoffen dürfe: Er glaubt, es sei zu versuchen, „ob nicht die mechanischen Differentialgleichungen der Dynamik integriert werden können bei Hinzuziehung mehrerer Glieder aus der Kräftefunktion ausser dem einzigen welches von der Sonne herrührt", wodurch als erste Annäherung bereits ein näherer Anschluss an die wahre Bahn gefunden werden müsste als es die Kepler'sche Ellipse gewähren könne, — nennt diese neue erste Annäherung die **intermediäre** Bahn, — sagt, dass sie zwar keine in sich zurücklaufende Kurve, dagegen von zwei um den Centralkörper beschriebenen Kreisen eingeschlossen sei, — etc. Seither ist sowohl durch ihn selbst als durch andere sein Vorschlag weiter besprochen worden, wofür ich aber auf die A. N., die Astr. Viert., etc., verweisen muss. — *c.* Vgl. die Schriften „J. **Plana**, Théorie du mouvement de la Lune. Turin 1832, 3 Vol. in 4., — P. A. **Hansen**, Fundamenta nova investigationis orbitæ veræ quam Luna perlustrat. Gothæ 1838 in 4., ferner: Tables de la Lune, construites d'après le principe Newtonien de la gravitation universelle. London (auf engl. Kosten) 1857 in 4., und: Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Leipzig 1862—64 in 8., — und: Charles-Eugène **Delaunay** (Lusigny im Dép. de l'Aube 1816 — Cherbourg 1872, wo er bei einer Spazierfahrt auf dem Meere ertrank; Prof. math. und Dir. Obs. Par.; vgl. Thévenot: Troyes 1878 in 8.), Théorie du mouvement de la Lune. Paris 1860—67, 2 Vol. in 4. (ein dritter Band blieb unvollendet)". Immerhin machen die von ihnen zur Darstellung der Mondbewegung aufgestellten unabsehbaren Reihen, welche dem grossen Publikum imponieren mögen, auf den eigentlichen Forscher einen bemühenden Eindruck, so dass er mit **Plana** (vgl. dessen Brief an Gautier von 1829 II 9 in Notiz 376) klagen möchte: „Pourquoi ne peut-on pas tirer en peu de jours les admirables vérités, utiles et pratiques, qui sont cachées dans les trois équations différentielles du problème?", — ja es **Fonvielle** nicht verübeln kann, wenn er in seiner Schrift „L'astronomie moderne (vgl. 14 : w)" argwohnt „Le Soleil et la Lune servent, pour ainsi dire, de simple prétexte à enfiler d'interminables chapelets d'équations", — und es freudig begrüsst hätte, wenn es **Oppolzer** noch vergönnt gewesen wäre, die in seinem „Entwurf einer Mondtheorie (Wien. Sitz. 1885, A. N. 2709 von 1886)" in Aus-

sicht gestellte wesentliche Vereinfachung noch wirklich durchzuführen. — *d.* Aus der grossen Anzahl der betreffenden Schriften füge ich zur etwelchen Ergänzung der bereits gegebenen oder später nachzutragenden Litteratur noch folgende bei: „**Lalande**, Sur quelques phénomènes qui résultent de l'attraction que les planètes exercent sur la terre (Mém. Par. 1758; vgl. auch 1781—82), — **Condorcet**, Analyse de la solution du problème des trois corps (Mém. Par. 1767), — Tob. **Mayer**, Theoria Lunæ systema Newtonianum. Londini 1767 in 4., ferner: Tabulæ motuum Solis et Lunæ. Londini 1770 in 4., und: Lunar tables improved by Ch. Mason. London 1784 in 4., — Jacques-Antoine-Joseph **Cousin** (Paris 1739 — ebenda 1800; Prof. math. und Akad. Paris), Introduction à l'étude de l'astronomie physique. Paris 1787 in 4., — **Poisson**, Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes (Journ. éc. pol. 8 von 1808) und: Mémoire sur le mouvement de la Lune autour de la Terre (Mém. Par. 1835), — **Plana**, Memoria sulla teoria dell' attrazione degli sferoidi ellitici (Mem. Soc. ital. 15 von 1811), — **Damoiseau**, Tables de la lune formée par la seule théorie de l'attraction. Paris 1824 in 4. (Teilung in 400^d, dagegen 1828 in fol. in 360^0), und: Mémoire sur la théorie de la Lune (Mém. prés. I von 1827), — **Airy**, Mathematical tracts on physical astronomy. Cambridge 1826 in 8. (3. ed. 1842), und: An elementary explanation of the principal perturbations in the solar system. London 1834 in 8. (deutsch durch C. v. Littrow, Stuttgart 1839), — Gustave Doulcet de **Pontécoulant** (Schloss Pontécoulant in Calvados 1795 — ebenda 1874; Artillerie-Oberst und Pair), Théorie analytique du système du monde. Paris 1829—46, 4 Vol. in 8., — Michel **Ostrogradsky** (Paschenna bei Poltawa 1801 geb.; Akad. Petersburg), Cours de mécanique céleste. St-Pétersbourg 1831 in 4., — **Hansen**, Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831 in 4. (von Berl. Akad. gekrönt), und: Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung. Gotha 1843 in 4. (franz. durch Mauvais, Paris 1845), — **Lubbock**, On the theory of the Moon and the perturbations of the Planets. London 1834—50, 9 Part. in 4., — **Encke**, Über die Berechnung der speciellen Störungen (Berl. Jahrb. 1837, 38 und 58), — **Cauchy**, Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique (Journ. Liouville II von 1837), — **Möbius**, Elemente der Mechanik des Himmels. Leipzig 1843 in 8. (eigentümliche und bemerkenswerte Leistung), — **Leverrier**, Mémoire sur les variations séculaires des éléments des orbites pour les sept planètes principales. Paris 1845 in 8., — Benjamin **Peirce** (Salem in Massachusetts 1809 — Cambridge 1880; Schüler von Bowditch; Prof. math. et astron. Cambridge), Physical and celestial mechanics. Boston 1855 in 4., — **Résal**, Traité élémentaire de mécanique céleste. Paris 1865 in 8. (2 éd. 1884 in 4.), — Joh. August **Weiler** (Mainz 1827 geb.; Prof. math. Mannheim und Karlsruhe), Über das Problem der drei Körper im Allgemeinen, und insbesondere in seiner Anwendung auf die Theorie des Mondes. Leipzig 1866 in 4., und: Grundzüge einer neuen Störungstheorie und deren Anwendung auf die Theorie des Mondes. Leipzig 1872 in 4., — O. **Hesse**, Über das Problem der drei Körper. München 1871 in 4., — S. **Newcomb**, Researches on the motion of the Moon. I. Washington 1878 in 4., und mit John **Meier**: A transformation of Hansen's lunar theory compared with the theory of Delaunay. Washington 1880 in 4.; vgl. auch die von ihm und George **Hill** in dem 1891 ausg. Vol. III der Astron. Papers gegebenen Beiträge zur Mechanik des Himmels, — E. **Neison**, On a general method of treating the Lunar Theory (Mem. Astr. Soc. 44 von 1879), —

O. **Backlund**, Zur Entwicklung der Störungsfunction. Petersburg 1884 in 4., — Paul **Harzer**, Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problemes der drei Körper. Petersburg 1886 in 4., — Otto **Dziobek**, Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen. Leipzig 1888 in 8. (vgl. Seeliger in Astr. Viert. 23 von 1888), — Ch. **Cellérier**, Mémoire sur les variations des excentricités et des inclinaisons. Paris 1890 in 4., — Abel **Souchon**, Traité d'astronomie théorique. Paris 1891 in 8., — F. **Tisserand**, Note sur l'état actuel de la théorie de la Lune (Bull. astr. 1891), — H. **Poincaré**, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I. Paris 1892 in 8., — etc."

511. Die Theorien der Planeten. — Wenn man die früher (505) angedeuteten Rechnungen wirklich ausführt, so ergeben sich sowohl Glieder, in welchen die Zeit als Faktor, als auch solche, wo sie nur in dem Argumente einer Kreisfunktion auftritt, so dass man zwischen mit der Zeit fortschreitenden oder sog. **sekulären** und zwischen wiederkehrenden oder sog. **periodischen** Veränderungen der Elemente zu unterscheiden hat. Während nun letztere Störungen offenbar nur gewisse Oscillationen des Wandelsternes um eine mittlere Bahn bewirken, so sind dagegen die Bestimmungsstücke dieser letztern infolge der sekulären Störungen möglicherweise Veränderungen unterworfen, welche im Laufe der Zeiten zu weitgehenden Umgestaltungen oder sogar zu Katastrophen führen könnten [a]. Zum Glücke zeigt sich jedoch bei weiterer Entwicklung, dass diese Hauptstörungen die grosse Axe der Bahn gar nicht oder wenigstens nur in ganz minimer Weise beeinflussen, — dass Excentricität, Neigung und Länge des Knotens nur zwischen engen Grenzen schwanken, — und dass einzig das Perihel einem Kreislaufe unterliegt, welcher dasselbe jeweilen nach Ablauf von Jahrtausenden ebenfalls wieder zur alten Lage zurückführt: Es bildet also die Stabilität den Grundcharakter unsers Sonnensystemes [b].

Zu 511: *a.* Hat man ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d x'}{d t} = A + X \qquad \frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d y'}{d t} = B + Y \qquad \frac{d^2 z}{d t^2} = \frac{d z'}{d t} = C + Z \quad \mathbf{1}$$

welche man bei Vernachlässigung von X, Y, Z unter Einführung von sechs Integrationskonstanten a b c, e f g zu integrieren weiss, so kann man mittelst der durch **Euler** (507) eingeführten **Variation der Konstanten** auch den vollständigen Gleichungen in folgender Weise Genüge leisten: Ergeben sich durch Auflösung der sechs aufgefundenen Integralgleichungen die Werte

$$x = f(a, b, c, e, f, g) \qquad x' = f_1(a, b, c, e, f, g) \qquad y = f_2(a, b, c, e, f, g) \quad \text{etc.} \quad \mathbf{2}$$

und differenziert man diese unter der Voraussetzung, dass diese sog. Konstanten ebenfalls mit der ohnehin in den Funktionen f vorkommenden Zeit variieren, dabei durch (d x : d t), (d x' : d t), etc. diejenigen Teile der vollständigen Derivierten bezeichnend, welche der freien Zeit entsprechen, so erhält man

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots, \quad \frac{dx'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\right) + \frac{dx'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots, \text{ etc.}$$

Bestimmt man somit die sechs Grössen $da : dt$, $db : dt$, etc. durch die sechs Gleichungen

$$\frac{dx}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = 0 \qquad \frac{dy}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dy}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = 0$$
$$\frac{dz}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dz}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = 0 \qquad 3$$

$$\frac{dx'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dx'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = X \qquad \frac{dy'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dy'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = Y$$
$$\frac{dz'}{da} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dz'}{db} \cdot \frac{db}{dt} + \ldots = Z \qquad 4$$

so genügen die Werte 2 auch noch den vollständigen Gleichungen 1 vollkommen. Da nun x, y, etc. Funktionen von a, b, etc. sind, so hat man

$$dx = \frac{dx}{da} \cdot da + \frac{dx}{db} \cdot db + \ldots \qquad dy = \frac{dy}{da} \cdot da + \frac{dy}{db} \cdot db + \ldots \text{ etc.} \qquad 5$$

und ebenso, da auch a, b, etc. Funktionen von x, y, etc. sind,

$$da = \frac{da}{dx} \cdot dx + \frac{da}{dy} \cdot dy + \ldots \qquad db = \frac{db}{dx} \cdot dx + \frac{db}{dy} \cdot dy + \ldots \text{ etc.} \qquad 6$$

Substituiert man aus 5 in 6, so erhält man z. B.

$$da = \frac{da}{dx} \cdot \left(\frac{dx}{da} \cdot da + \frac{dx}{db} \cdot db + \ldots\right) + \frac{da}{dy} \cdot \left(\frac{dy}{da} \cdot da + \frac{dy}{db} \cdot db + \ldots\right) + \ldots$$

und diese Gleichung, welche notwendig für jede Werte von da, db, etc. bestehen muss, verlangt dass

$$1 = \frac{da}{dx} \cdot \frac{dx}{da} + \frac{da}{dy} \cdot \frac{dy}{da} + \ldots \qquad 0 = \frac{da}{dx} \cdot \frac{dx}{db} + \frac{da}{dy} \cdot \frac{dy}{db} + \ldots \text{ etc.} \qquad 7$$

sei. Multipliziert man aber die 3 der Reihe nach mit $da : dx$, $da : dy$, $da : dz$ und die 4 mit $da : dx'$, $da : dy'$, $da : dz'$, so giebt die Summe aller dieser Gleichungen mit Hilfe von 7

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dx'} \cdot X + \frac{da}{dy'} \cdot Y + \frac{da}{dz'} \cdot Z \qquad 8$$

und ähnliche Gleichungen kann man auch für $db : dt$, etc. aufschreiben, so dass es in relativ einfacher Weise gelingt, die aus 3 und 4 zu bestimmenden Grössen zu isolieren. — Da nun die 1 unsern frühern 481 : 2 vollständig konform sind, so lässt sich das soeben skizzierte Verfahren ohne weiteres auch auf letztere anwenden, wobei als Arbiträre erst die sechs durch die Operationen und Annahmen in 482—84 eingeführten Grössen anzuwenden und sodann schliesslich durch die in 485 eingeführten sechs Elemente Ω, i, P, a, $e = \text{Si}\,\varphi$ und M zu ersetzen sind. Man erhält so (wenn auch allerdings erst nach längerer Zwischenrechnung, für welche hier auf Specialschriften, wie z. B. auf die in 510 angeführten „Recherches" von Leverrier, verwiesen werden muss) für die Variationen der Bahnelemente die Werte

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\mu \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{1+m}} \cdot \frac{dR}{dM} \qquad 9 \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{a(1+m)} \cdot \text{Si}\, i \cdot \text{Co}\, \varphi} \cdot \frac{dR}{di} \qquad 10$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\mu \cdot \text{Co}\, \varphi}{e \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{dP} - \frac{e \cdot \mu \cdot \text{Ct}\, \varphi}{\text{Tg}\, {}^1\!/_2\, \varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{dM} \qquad 11$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\mu \cdot Co\,\varphi}{e \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{de} + \frac{\mu \cdot Tg\,{}^1/_2\,i}{Co\,\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{di} \qquad \mathbf{12}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\mu}{Si\,i \cdot Co\,\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{d\Omega} - \frac{\mu \cdot Tg\,{}^1/_2\,i}{Co\,\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \left(\frac{dR}{dP} + \frac{dR}{dM}\right) \qquad \mathbf{13}$$

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\mu \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{1+m}} \cdot \frac{dR}{da} + \frac{e \cdot \mu \cdot Ct\,\varphi}{Tg\,{}^1/_2\,\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{de} + \frac{\mu \cdot Tg\,{}^1/_2\,i}{Co\,\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR}{di} \qquad \mathbf{14}$$

wo m die Masse des gestörten Körpers und μ diejenige des störenden Körpers bezeichnet, und die Glieder rechts so oft zu wiederholen sind als störende Körper vorkommen. — Bezeichnen r' und ϱ' die Projektionen von r und ϱ auf die Ebene der XY, w und ω aber deren Winkel mit der Axe der X, so dass

$$x = r' \cdot Co\,w \qquad y = r' \cdot Si\,w \qquad \xi = \varrho' \cdot Co\,\omega \qquad v = \varrho' \cdot Si\,\omega \qquad \varrho^2 = \varrho'^2 + \zeta^2 \qquad \mathbf{15}$$

so erhält man nach 481 : 1, 4, 5

$$R = \frac{1}{\sqrt{\varrho'^2 + r'^2 - 2\varrho' \cdot r' \cdot Co(\omega - w) + (\zeta - z)^2}} - \frac{\varrho' \cdot r' \cdot Co(\omega - w) + \zeta \cdot z}{(\varrho'^2 + \zeta^2)^{3/2}} \qquad \mathbf{16}$$

wo ζ und z als kleine Grössen betrachtet werden dürfen, da in unserm Sonnensysteme namentlich bei den Hauptplaneten so geringe Neigungen vorkommen, dass die Ebene der XY immer so gelegt werden kann, um dies herbeizuführen. Setzt man ferner

$$r' = a(1+s) \qquad \varrho' = \alpha(1+\sigma) \qquad w = n \cdot t + M + g \qquad \omega = \nu \cdot t + \mathcal{M} + \gamma \qquad \mathbf{17}$$

wo a und α die mittlern Distanzen der m und μ von der Sonne bezeichnen, M und $\mathcal{M}$ ihre von der Axe der X aus gezählten mittlern Längen zur Epoche, n und ν aber deren Zunahme in derselben Zeiteinheit, in welcher die seit der Epoche verflossene Zeit t gegeben ist, so sind offenbar auch s, g, σ, γ (welche sich nach 492 bestimmen lassen) kleine, von der Excentricität und Neigung der Bahnen abhängige Grössen. Entwickelt man nun die beiden Glieder von 16 mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes nach den Potenzen von ζ und z, — substituiert nach 17, — vernachlässigt die Glieder, welche Produkte oder höhere Potenzen der als klein erfundenen Grössen enthalten, — führt

$$p = Tg\,i \cdot Si\,\Omega \qquad q = Tg\,i \cdot Co\,\Omega \qquad p' = Tg\,i' \cdot Si\,\Omega' \qquad q' = Tg\,i' \cdot Co\,\Omega' \qquad \mathbf{18}$$

ein, wo sich i' und Ω' auf den Körper μ beziehen, — setzt die Produkte von Sin. oder Cos. nach den bekannten goniometrischen Sätzen in Summen oder Differenzen, sowie die Quadrate von Sin. oder Cos. in Cos. des doppelten Winkels um, — und behält schliesslich nur diejenigen Glieder bei, welche die Zeit als freien Faktor enthalten, also den sekulären Störungen entsprechen, so erhält man

$$\begin{aligned} R_0 = & \left[(a^2 + \alpha^2) \cdot (a, \alpha) + 3a\alpha \cdot [a, \alpha]\right] : (a^2 - \alpha^2)^2 - \\ & - 3a\alpha\,[a, \alpha] \cdot \left[e^2 + \varepsilon^2 - (p - p')^2 - (q - q')^2\right] : 8\,(a^2 - \alpha^2)^2 + \\ & + 3e\varepsilon \cdot Co(P - \Pi) \cdot \left[a\alpha \cdot (a, \alpha) + (a^2 + \alpha^2) \cdot [a, \alpha]\right] : 2\,(a^2 - \alpha^2)^2 \end{aligned} \qquad \mathbf{19}$$

wo die Bedeutung der beiden Symbole aus

$$\begin{aligned} (a, \alpha) &= \alpha\,[1 + {}^1/_4\,(a:\alpha)^2 + {}^1/_{64}\,(a:\alpha)^4 + \ldots] \\ [a, \alpha] &= -\alpha\,[(a:\alpha) + {}^1/_8\,(a:\alpha)^3 - {}^1/_{64} \cdot (a:\alpha)^5 - \ldots] \end{aligned} \qquad \mathbf{20}$$

erhellt. Es geht hieraus hervor, dass R_0 das Element M nicht enthält, somit in unserm Falle in den 9—14 die Glieder mit dR : dM wegfallen, also, wenn überdies die durch den Faktor Tg $^1/_2$ i einer höhern Ordnung zugewiesenen Glieder weggelassen werden, in

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \mathbf{21} \qquad \frac{dM}{dt} = -\frac{2\mu \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{1+m}} \cdot \frac{dR_0}{da} + \frac{e \cdot \mu \cdot Ct\,\varphi}{Tg\,{}^1\!/_2\varphi \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR_0}{de} \quad \mathbf{22}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\mu}{\sqrt{a(1+m)} \cdot Si\,i \cdot Co\,\varphi} \cdot \frac{dR_0}{di} \quad \mathbf{23} \qquad \frac{dP}{dt} = \frac{\mu \cdot Co\,\varphi}{e \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR_0}{de} \quad \mathbf{24}$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\mu \cdot Co\,\varphi}{e \cdot \sqrt{a(1+m)}} \cdot \frac{dR_0}{dP} \quad \mathbf{25} \qquad \frac{di}{dt} = -\frac{\mu}{\sqrt{a(1+m)} \cdot Si\,i \cdot Co\,\varphi} \cdot \frac{dR_0}{d\Omega} \quad \mathbf{26}$$

übergehen. — *b.* Aus 21 geht ohne weiteres das schon früher (508) besprochene und oben wiederholte Resultat hervor, dass die sekulären Störungen auf die grosse Axe und also auch auf die Umlaufszeit keinen Einfluss ausüben, und es ist die vorstehende Entwicklung zunächst durchgeführt worden, um diese 21 und damit die Begründung jenes merkwürdigen Laplace'schen Gesetzes zu erhalten; es ist jedoch allerdings beizufügen, dass dasselbe nur ein **Annäherungsgesetz** ist, indem in der neuern Zeit Spiru C. **Haretu** in seiner überhaupt bemerkenswerten Abhandlung „Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires (Ann. Obs. Par.: Mém. 18 von 1885; schon Paris 1878 in 4. als These ausgegeben)" nachgewiesen hat, dass 21 nur bei Vernachlässigung der spätern Glieder besteht. Die 22—26 zeigen, dass dagegen auch bei dieser Vernachlässigung ein Einfluss auf die übrigen Elemente bestehen bleibt; ich muss aber für ihre weitere Diskussion, deren Resultate schon oben mitgeteilt wurden, auf die bereits erwähnten Specialschriften verweisen und kann zum Schlusse nur noch zeigen, dass sich schon aus 113 leicht einiges Sachbezügliche feststellen lässt: Bezeichnet man das bei einer elliptischen Bewegung in einem Zeitelemente dt beschriebene Flächenelement mit dF, so hat man nach 482 : 11, 14, wenn der Einfachheit wegen $g = 1$ gesetzt wird,

$$dF = {}^1\!/_2 \cdot \sqrt{a(1-e^2)} \cdot dt \qquad \mathbf{27}$$

und somit die in 113 eingeführten Flächenprojektionen

$$\Delta' = dF \cdot Co\,i \qquad \Delta'' = dF \cdot Si\,i \cdot Co\,\Omega \qquad \Delta''' = dF \cdot Si\,i \cdot Si\,\Omega$$

folglich nach dem durch 113 : 8 ausgedrückten Princip der Erhaltung der Flächen

$$\Sigma m \cdot \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Co\,i = c' \qquad \Sigma m \cdot \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Si\,i \cdot Co\,\Omega = c'' \qquad \mathbf{28}$$
$$\Sigma m \cdot \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Si\,i \cdot Si\,\Omega = c'''$$

und, wenn die ausserhalb des Summenzeichens stehenden Ω und i sich auf die unveränderliche Ebene beziehen, nach 113 : 16

$$Tg\,i \cdot Si\,\Omega = c''' : c' = \Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Si\,i \cdot Si\,\Omega : \Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Co\,i \qquad \mathbf{29}$$
$$Tg\,i \cdot Co\,\Omega = c'' : c' = \Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Si\,i \cdot Co\,\Omega : \Sigma m \sqrt{a(1-e^2)} \cdot Co\,i$$

womit die Lage dieser unveränderlichen Ebene bestimmt und somit die Möglichkeit der Laplace'schen Rechnung in 113 nachgewiesen ist. Sodann folgt aus 28', wenn man bei den zweiten Potenzen der e und i stehen bleibt, die Gleichheit

$$c' = \Sigma m \cdot \sqrt{a} \cdot (1-e^2)^{1/2} \cdot (1+Tg^2\,i)^{-1/2} = \Sigma m \cdot \sqrt{a}\,(1 - {}^1\!/_2\,e^2 - {}^1\!/_2\,Tg^2\,i) =$$
$$= \text{Constans} - {}^1\!/_2\,\Sigma m \cdot \sqrt{a} \cdot e^2 - {}^1\!/_2\,\Sigma m \cdot \sqrt{a} \cdot Tg^2\,i$$

welche bei der nach 25 und 26 unter denselben Bedingungen bestehenden Unabhängigkeit zwischen den sekulären Variationen von e und i nur bestehen kann, wenn je für sich

$$\Sigma m \cdot \sqrt{a} \cdot e^2 = \text{Const.} \qquad \text{und} \qquad \Sigma m \cdot \sqrt{a} \cdot Tg^2\,i = \text{Const.} \qquad \mathbf{30}$$

so dass, wenn in einem Systeme, wie dies noch gegenwärtig in unserm Sonnensysteme statt hat, jede dieser Summen einmal klein war, dieselbe auch klein bleiben muss: Es können also weder die Excentricitäten noch die Neigungen der einzelnen Bahnen fortwährend wachsen.

512. Die Theorien der Satelliten. — Natürlich bestehen auch für die Bewegungen der Satelliten um die Planeten entsprechende Beziehungen wie diejenigen, welche wir früher (481) für die Bewegungen der Planeten um die Sonne aufgestellt haben; aber während in letzterm Falle die Wirkung der Sonne auf den in Betracht gezogenen Planeten eine so überwiegende war, dass die Einflüsse der Nebenplaneten vorläufig vernachlässigt werden durften und sodann (482) gewisse Grundgesetze verhältnismässig leicht erhalten werden konnten, so darf man in ersterm Falle höchstens die übrigen Planeten und die allfällig vorhandenen Nebenmonde, keineswegs aber die Sonne, ignorieren, und es liegt also in demselben von vorneherein ein **Problem der drei Körper** vor, ja es ist dieses ebenso berühmte als schwierige Problem eigentlich zunächst beim Studium der Bewegung des Erdmondes gestellt und behandelt worden [a].

Zu 512: *a.* Sind μ, m, M der Reihe nach die Massen von Mond, Planet und Sonne, und führt man die 481:1 analoge Hilfsgrösse

$$R = f^2 \cdot \frac{m+\mu}{r} + f^2 \cdot M \cdot \left[\frac{1}{d} - \frac{x \cdot \xi + y \cdot v + z \cdot \zeta}{\varrho^3}\right] \qquad 1$$

ein, wo x y z die Lage des Mondes, $\xi\, v\, \zeta$ diejenige der Sonne gegen ein durch den Planeten gelegtes Coordinatensystem, r ϱ aber ihre Distanzen vom Planeten bezeichnen, und d die Distanz von Sonne und Mond ist, so erhält man, da

$$\frac{dR}{dx} = -f^2 \cdot \frac{m+\mu}{r^3} \cdot x + f^2 \cdot M \cdot \left[\frac{\xi - x}{d^3} - \frac{\xi}{\varrho^3}\right] \quad \text{etc.}$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = f^2 \cdot \frac{m+\mu}{r^3} \cdot \left[\frac{3x^2}{r^2} - 1\right] + f^2 \cdot \frac{M}{d^3} \cdot \left[\frac{3(\xi - x)^2}{d^2} - 1\right] \quad \text{etc.} \qquad 2$$

folgen, entsprechend 481 : 2, 8

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dR}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dR}{dy} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dR}{dz} \qquad 3$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{d^2R}{dy^2} + \frac{d^2R}{dz^2} = 0 \qquad 4$$

d. h. die zwei Gleichungen, von welchen **Laplace** in Band III seiner „Mécanique céleste“ zur Lösung des Problemes der drei Körper ausgegangen ist. Es würde jedoch zu weit führen, hier seinen weitern Entwicklungen im Detail folgen zu wollen und ich muss mich darauf beschränken, für dieselben auf das ebengenannte Werk, sowie auf die übrige in 510 verzeichnete Speciallitteratur, zu verweisen und unter der folgenden Nummer die durch Damoiseau auf Grundlage derselben für den Erdmond erhaltenen Hauptresultate aufzuführen.

513. Die Anomalien in der Bewegung des Erdmondes. — Die successiven Studien über die Bewegung des Erdmondes sind in den vorhergehenden Nummern wiederholt berührt, ja die hauptsächlichsten der betreffenden Anomalien schon früher (210, 240) mehrfach erwähnt worden, so dass hier nur noch übrig bleibt, teils im Anschlusse an die vorhergehende Nummer einige Mitteilungen über die erhaltenen Hauptresultate zu machen [a], teils anhangsweise auf die früher (240) nur beiläufig erwähnte **physische Libration** zurückzukommen [b].

Zu 513: *a.* Bezeichnen (wie in 210) l, L, m, M die mittlern Längen und Anomalien, welche Mond und Sonne t julianische Jahre nach der Epoche 1801 I 0 m. Z. Paris besitzen und ist ☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens zu eben derselben Zeit, so hat man nach **Damoiseau** (vgl. 510 : c), wenn $\tau = t:100$ ist und u die ganzen Umdrehungen zählt,

$$l = 111^0\,36'\,42'',8 + 13^u\,132^0\,40'\,43'',616 \cdot t + 10'',7232 \cdot \tau^2 + 0'',019361 \cdot \tau^3$$
$$m = 205^0\,29'\,58'',4 + 13^u\;\;91^0\,59'\,17'',950 \cdot t + 50'',4203 \cdot \tau^2 + 0'',091035 \cdot \tau^3$$
$$☊ = 13^0\,54'\,54'',0 - 19^0\,20'\,29'',975 \cdot t + 6'',5632 \cdot \tau^2 + 0{,}011850 \cdot \tau^3$$
$$L = 280^0\,9'\,32'',0 + (1^u + 27'',530) \cdot t, \quad M = 0^0\,39'\,7'',0 + (1^u - 34'',370) \cdot t$$

und sodann die wahre Länge des Mondes

$$\begin{aligned}\lambda = l &+ \mathbf{22640''} \cdot \mathbf{Si\,m} + \mathbf{769''} \cdot \mathbf{Si\,2\,m} + 37'' \cdot Si\,3\,m + \ldots\\ &- 122'' \cdot Si\,(l - L) + \mathbf{2370''} \cdot \mathbf{Si\,2\,(l - L)} + \ldots - \mathbf{674''} \cdot \mathbf{Si\,M} - \ldots\\ &- 412'' \cdot Si\,2\,(l - ☊) + 212'' \cdot Si\,2\,(l - L - m) + \ldots\\ &+ \mathbf{4590''} \cdot \mathbf{Si\,[2\,(l - L) - m]} + 192'' \cdot Si\,[2\,(l - L) + m] +\\ &+ 166'' \cdot Si\,[2\,(l - L) - M] + 207'' \cdot Si\,[2\,(l - L) - m - M] -\\ &- 109'' \cdot Si\,(m + M) + 148'' \cdot Si\,(m - M) + \ldots\end{aligned}$$

wo die fett gedruckten Glieder bis auf unbedeutende Differenzen mit den 210 : 2 übereinstimmen, ferner zu bemerken ist, dass Damoiseau ausser den hier gegebenen 14 Gliedern noch 66 weniger ergiebige hat, und Delaunay sogar im ganzen die schauerliche Anzahl von 1400 solchen Gliedern entwickelte, welche Fonvielle (510 : c) bei seiner Kritik wohl zunächst vorschwebte. Die Breite des Mondes wird durch

$$\begin{aligned}\beta = 18540'' &\cdot Si\,(\lambda - ☊) + 13'' \cdot Si\,2\,(\lambda - ☊) + 528'' \cdot Si\,(\lambda + ☊ - 2\,L) -\\ &- 14'' \cdot Si\,m + 26'' \cdot Si\,(2\,m + \lambda - ☊) - 16'' \cdot Si\,(l + ☊ - 2\,L - m) +\\ &+ 24'' \cdot Si\,(\lambda + M - ☊) + 25'' \cdot Si\,(\lambda - M - ☊) +\\ &+ 22'' \cdot Si\,(\lambda + ☊ - 2\,L - M) - 10'' \cdot Si\,(\lambda + ☊ - 2\,L + M) - \ldots\end{aligned}$$

gegeben, und endlich die Equatoreal-Horizontal-Parallaxe durch

$$\begin{aligned}\pi = 3421'' &+ 186'' \cdot Co\,m + 10'' \cdot Co\,2\,m + 28'' \cdot Co\,2\,(l - L) +\\ &+ 34'' \cdot Co\,[2\,(l - L) - m] + \ldots\end{aligned}$$

— *b.* Hat, wie dies (vgl. 238 : d) schon Lagrange in seiner berühmten Abhandlung von 1780 annahm, der Mond nicht die Gestalt einer Kugel, sind die seinen drei Hauptaxen entsprechenden Trägheitsmomente verschieden, ist sein Equator gegen die Ekliptik geneigt, etc., so muss die Anziehung der Erde bewirken, dass die nach ihr gerichtete Mondaxe kleine, pendelartige Schwankungen ausführt, welche, im Gegensatze zu den früher (240) besprochenen optischen Librationen, eine wahre oder **physische Libration** bedingen. Um jedoch diese kleinen Bewegungen praktisch zu konstatieren, bedarf es sehr ge-

nauer Bestimmungen, ansonst dieselben durch die Beobachtungsfehler verdeckt werden, — ja noch eine im Anfange dieses Jahrhunderts durch **Bouvard, Arago** und **Nicollet** ausgeführte Wiederholung der von Tob. Mayer (240) angestellten Messungen reichte nur teilweise hin, deren Existenz zu erweisen, und erst als 1841—43 auf Bessels Veranlassung sein Gehilfe Heinrich **Schlüter** (Hamburg 1815? — Königsberg 1844) das Königsberger Heliometer darauf anwandte, sodann nach dessen Tode M. **Wichmann** mit demselben und später E. **Hartwig** mit einem entsprechenden Instrumente analoge Messungen ausführten, waren so gut harmonierende Serien vorhanden, dass keine Zweifel mehr übrig blieben, und daraus mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden konnte, dass der nach der Erde gerichteten Hauptaxe ein Minimal-Trägheitsmoment entspreche, welches um etwa $^6/_{10000}$ kleiner als das der Umdrehungsaxe zukommende Maximum sei. Für genauern Detail verweise ich auf die früher (240 : d) verzeichnete Speciallitteratur, welcher noch der seither erschienene Band 38 der Königsberger Beobachtungen zuzufügen ist, da dieser eine von J. **Franz** durchgeführte nachträgliche Berechnung der Schlüter'schen Reihe enthält.

514. Die Theorien der Präcession und Nutation. — In Beziehung auf die schon früher (200—2) als Ergebnisse der Beobachtungen unter den Namen **Präcession** und **Nutation** kurz besprochenen Störungen der Erdbewegung wollen wir hier im Anschlusse an die bereits (namentlich in 507) gegebenen historischen Notizen noch eine Idee davon geben, wie dieselben durch mathematische Deduktionen aus der Erdgestalt und der allgemeinen Gravitation abgeleitet werden können [a], während die nötigen Mitteilungen über die betreffenden Konstanten besser später (609—10) im Zusammenhange mit dem Einflusse dieser Störungen auf die Sterncoordinaten folgen werden [b].

Zu 514: *a.* Denkt man sich mit „Michel **Jullien**, Mémoire sur le mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (A. N. 1030 von 1856)" durch den Schwerpunkt der Erde ein drei Hauptaxen (114) derselben entsprechendes Coordinatensystem so gelegt, dass X der Frühlingsnachtgleichenlinie und Z der Umdrehungsaxe entspricht, — und bezeichnen x' y' z' die darauf bezüglichen Coordinaten eines Elementes dm' der Erde, — x y z die Coordinaten des Schwerpunktes eines entfernten Körpers der Masse m : f², wo f die Gauss'sche Zahl ist, — r und r' aber die Distanzen des letztern Punktes vom Schwerpunkte der Erde und vom Punkte dm', so dass

$$\frac{1}{r'^3} = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-3/2} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\,\frac{xx' + yy' + zz'}{r^2}\right) \qquad 1$$

ist, so hat man entsprechend 481 die Komponenten der Anziehung des fernen Körpers auf die Erde

$$X = m \cdot \int \frac{x - x'}{r'^3} \cdot dm' \qquad Y = m \cdot \int \frac{y - y'}{r'^3} \cdot dm' \qquad Z = m \cdot \int \frac{z - z'}{r'^3} \cdot dm' \qquad 2$$

also, wenn L, M, N die dieser Anziehung entsprechenden Drehungsmomente um die Axen X, Y, Z bezeichnen, A = B und C aber die letztern entsprechenden Trägheitsmomente der Erde sind, da die Integrale von $x' \cdot dm'$, $y' \cdot dm'$ und $z' \cdot dm'$ (72) beim Zusammenfallen des Schwerpunktes mit dem

Anfangspunkte, und diejenigen von $x' \cdot y' \cdot dm'$, $x' \cdot z' \cdot dm'$ und $y' \cdot z' \cdot dm'$ (114 : 9) für die Hauptaxen verschwinden, nach 112 und 114 : 6

$$L = Z \cdot y - Y \cdot z = m \cdot z \cdot \int \frac{y'}{r'^3} \cdot dm' - m \cdot y \cdot \int \frac{z'}{r'^3} \cdot dm' = \frac{3 m \cdot y \cdot z}{r^5} \cdot \int (y'^2 - z'^2) \cdot dm'$$

$$= \frac{3 \cdot m \cdot y \cdot z}{r^5} \cdot (C - B) \qquad M = \frac{3 \cdot m \cdot z \cdot x}{r^5} \cdot (A - C) \qquad N = \frac{3 \cdot m \cdot x \cdot y}{r^5} \cdot (B - A) = 0 \quad \mathbf{3}$$

Am Ende der Zeit dt wirken also auf die Erde, ausser dem schon am Anfange derselben vorhandenen Drehungsmomente $G = C \cdot \varrho$ (wo ϱ die Rotationsgeschwindigkeit der Erde bezeichnet), um die wegen $C > A$ (vgl. 114) permanente Rotationsaxe Z, infolge der Einwirkung des äussern Körpers zwei neue Momente $L \cdot dt$ und $M \cdot dt$ um die Axen der X und Y. — Bezeichnet nun aber a den mittlern Abstand der Erde von der Sonne, e die Excentricität der Erdbahn, n die mittlere Bewegung der Erde in ihrer Bahn, ν die geocentrische Länge der Sonne, π die Länge des Perigeums und h das Verhältnis der Erdmasse zur Sonnenmasse, so hat man nach 482 : 5, 11, 14 und 484 : 6 unter den bisherigen Annahmen

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot Co(\nu - \pi)} \qquad r^2 \cdot d\nu = n \cdot a^2 \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot dt \qquad m(1 + h) = n^2 \cdot a^3 \quad \mathbf{4}$$

und somit nach 3

$$L \cdot dt = \frac{3 n \cdot (C - A)}{(1 + h) \cdot (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \frac{y \cdot z}{r^2} \cdot [1 + e \cdot Co(\nu - \pi)] \cdot d\nu$$

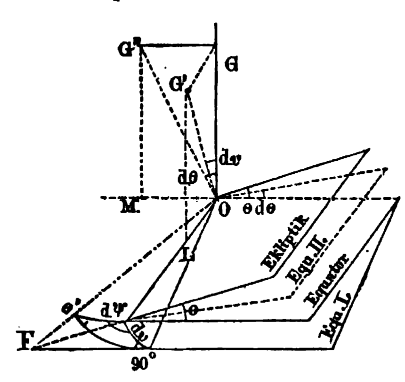
$$M \cdot dt = - \frac{3 n \cdot (C - A)}{(1 + h) \cdot (1 - e^2)^{3/2}} \cdot \frac{z \cdot x}{r^2} \cdot [1 + e \cdot Co(\nu - \pi)] \cdot d\nu \quad \mathbf{5}$$

wo, wenn θ die Schiefe der Ekliptik bezeichnet, also

$$x = r \cdot Co\,\nu \qquad y = r \cdot Si\,\nu \cdot Co\,\theta \qquad z = r \cdot Si\,\nu \cdot Si\,\theta$$

die Coordinaten der Sonne sind,

$$\frac{y \cdot z}{r^2} = {}^1/_2\, Si\,\theta \cdot Co\,\theta \cdot (1 - Co\,2\nu) \qquad \frac{z \cdot x}{r^2} = {}^1/_2\, Si\,\theta \cdot Si\,2\nu \quad \mathbf{6}$$



gesetzt werden können. — Trägt man von O aus auf die Axen Werte auf, welche $L \cdot dt$, $M \cdot dt$ und G proportional sind, und konstruiert z. B. zu $L \cdot dt$ und G die Resultierende OG', so stellt OG' die Lage dar, welche die Erdaxe unter ausschliesslicher Wirkung dieser Kräftenpaare annehmen würde, somit dv die dadurch bewirkte Drehung der Erdaxe, $d\psi$ die infolge davon entstehende Verschiebung der Frühlingsnachtgleichenlinie und θ' die neue Schiefe der Ekliptik. Aus dem in der Figur verzeichneten sphärischen Dreiecke, in welchem der von $d\psi$ und dv eingeschlossene Winkel gleich $90^0 - \theta$ ist, folgen mit Hilfe von Dreieck GOG'

$$d\psi \cdot Si\,\theta \fallingdotseq dv \fallingdotseq GG' : OG = L \cdot dt : G \qquad \theta' \fallingdotseq dv : d\psi \fallingdotseq Si\,\theta \fallingdotseq \theta$$

also mit Hilfe von 5 und 6

$$d\psi = H \cdot Co\,\theta \cdot (1 - Co\,2\nu) \cdot [1 + e \cdot Co(\nu - \pi)] \cdot d\nu$$

wo $$H = 3 \cdot n \cdot (C - A) : [2 C \cdot \varrho (1 + h) \cdot (1 - e^2)^{3/2}] \qquad 7$$

ist, oder durch Integration, wenn das Glied mit e vernachlässigt, das sich ergebende freie ν durch $n \cdot t$ ersetzt, und das seit der Epoche erfolgte Gesamtzurückgehen der Nachtgleichenlinie in der Ekliptik mit ψ bezeichnet wird,

$$\psi = H \cdot n \cdot Co\, \theta \cdot t - \tfrac{1}{2} H \cdot Co\, \theta \cdot Si\, 2\nu \qquad 8$$

Konstruiert man analog die Resultierende OG'' zu $M \cdot dt$ und G, so ergiebt sich daraus eine einfache Drehung des Equators um die Frühlingsnachtgleichenlinie oder eine Abnahme der Schiefe der Ekliptik

$$d\theta = M \cdot dt : G = - H \cdot Si\, \theta \cdot Si\, 2\nu \cdot [1 + e \cdot Co\, (\nu - \pi)] \cdot d\nu$$

und hieraus durch Integration, wenn die frühere Approximation beibehalten wird, die ganze Veränderung seit der Epoche

$$\Delta \theta = \tfrac{1}{2} H \cdot Si\, \theta \cdot Co\, 2\nu \qquad 9$$

In ähnlicher Weise die Wirkung des Mondes in Rechnung ziehend, auf welchen die 5 ohne weiteres übergetragen werden können, während die 6 durch

$$\frac{y_1 \cdot z_1}{r_1^2} = \tfrac{1}{2} Si\, 2\theta \cdot Si^2 \nu_1 + i \cdot Co\, 2\theta \cdot Si\, \nu_1 \cdot Si\, (\nu_1 - \lambda) - \\ - \tfrac{1}{2} i^2 \cdot Si\, 2\theta \cdot Si\, (\nu_1 - \lambda) \cdot (2\, Si\, \nu_1 \cdot Co\, \lambda - Co\, \nu_1 \cdot Si\, \lambda)$$

$$\frac{z_1 \cdot x_1}{r_1^2} = \tfrac{1}{2} Si\, \theta \cdot Si\, 2\nu_1 + i \cdot Co\, \theta \cdot Co\, \nu_1 \cdot Si\, (\nu_1 - \lambda) - \\ - \tfrac{1}{2} i^2 \cdot Si\, \theta \cdot Si\, (\nu_1 - \lambda) \cdot Co\, (\nu_1 + \lambda) \qquad 10$$

zu ersetzen sind, wo i die Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik und λ die Länge ihres aufsteigenden Knotens bezeichnet, erhielt **Jullien**, entsprechend 7

$$H_1 = 3 n_1 \cdot (C - A) : [2 C \cdot \varrho (1 + h_1) \cdot (1 - e_1^2)^{3/2}] \qquad 11$$

setzend und unter $-\alpha$ die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Mondknotens verstehend,

$$\psi' = H_1 \cdot [n_1 \cdot (1 - i^2) Co\, \theta \cdot t - \tfrac{1}{2} Co\, \theta \cdot Si\, 2\nu_1 - i \cdot \frac{n_1}{\alpha} \cdot \frac{Co\, 2\theta}{Si\, \theta} \cdot Si\, \lambda + \frac{i^2}{4} \cdot \frac{n_1}{\alpha} \cdot Co\, \theta \cdot Si\, 2\lambda]$$

$$\Delta \theta' = H_1 \cdot [\tfrac{1}{2} Si\, \theta \cdot Co\, 2\nu_1 + i \cdot \frac{n_1}{\alpha} \cdot Co\, \theta \cdot Co\, \lambda - \frac{i^2}{4} \cdot \frac{n_1}{\alpha} \cdot Si\, \theta \cdot Co\, 2\lambda] \qquad 12$$

Von den kleinen Veränderungen, welche die Schiefe der Ekliptik, und somit auch die Präcession, durch die Planeten erleidet, hier absehend, und auch die periodischen Glieder, von welchen die mit α behafteten die **Nutation** (vgl. 201 und 610) darstellen, nicht weiter beachtend, erhalten wir somit aus 8 und 12 mit Hilfe von 7 und 11 bei Vernachlässigung von e^2 und i^2 für die **Präcession** den Ausdruck

$$p = \left(\frac{n^2}{1 + h} + \frac{n_1^2}{1 + h_1}\right) \cdot N \cdot t \qquad \text{wo} \qquad N = \frac{3}{2\varrho} \cdot \frac{C - A}{C} \cdot Co\, \theta \qquad 13$$

Bezeichnet man nun die Drehaxe eines homogenen Rotationsellipsoides mit 2r, die beiden gleichen Axen mit 2a, die Abplattung mit μ, so dass

$$\mu = (a - r) : a \qquad \text{oder} \qquad r = a (1 - \mu) \qquad 14$$

ist, und das Gewicht einer Volumeneinheit mit D, so hat man nach 114 : 12

$$A = \tfrac{8}{15} \cdot a^5 \pi \cdot (1 - \mu) \cdot (1 - \mu + \tfrac{1}{2} \mu^2) \cdot D \qquad C = \tfrac{8}{15} \cdot a^5 \pi \cdot (1 - \mu) \cdot D \qquad 15$$

und somit für eine unendlich dünne Schichte

$$\frac{dA}{da} = \tfrac{8}{3} \cdot a^4 \pi \cdot (1 - \mu) \cdot (1 - \mu + \tfrac{1}{2} \mu^2) \cdot D \qquad \frac{dC}{da} = \tfrac{8}{3} \cdot a^4 \pi \cdot (1 - \mu) \cdot D$$

folglich für ein aus ähnlichen homogenen Schichten gebildetes Ellipsoid

$$A = (1-\mu)\cdot(1-\mu+{}^1/_2\,\mu^2)\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot\int_0^a D\cdot a^4\cdot da \qquad C = (1-\mu)\cdot\frac{8\pi}{3}\cdot\int_0^a D\cdot a^4\cdot da$$

also für jedes beliebige Gesetz, dem D unterliegt

$$(C-A):C = \mu\cdot(1-{}^1/_2\,\mu) \quad \text{oder nach 13} \quad N = {}^3/_2\,\mu\cdot(1-{}^1/_2\,\mu)\cdot \mathrm{Co}\,\theta : \varrho \qquad \mathbf{16}$$

Setzt man, um 13 und 16 auf die **Erde** anzuwenden, $t = 365{}^1/_4{}^d$, $\mu = {}^1/_{300}$, $\theta = 23{}^1/_2{}^0$, $n = 360\cdot 3600''$, $\varrho = 365{}^1/_4\cdot n''$, $h = {}^1/_{355000}$, $h_1 = 80$ und $n' = \varrho : 27{}^1/_2$, so erhält man ihre jährliche Präcession

$$p = 16'',24 + 35'',81 = 52'',05$$

während Bessel (609) durch strengere Rechnung allerdings nur 50",38 fand. Setzt man dagegen für **Jupiter** $t = 4432^d$, $\mu = {}^1/_{14}$, $\theta = 3^0$, $n = 360\cdot 3600''$, $n' = n\cdot 4432 : 1{,}77$, $n'' = n\cdot 4432 : 3{,}55$, $n''' = n\cdot 4432 : 7{,}17$, $n^{IV} = n\cdot 4432 : 16{,}73$, $h = {}^1/_{1048}$, $k = 1000000$, $h' = k:17$, $h'' = k:23$, $h''' = k:88$, $h^{IV} = k:43$, so erhält man für die einem Jupitersjahre entsprechende Präcession

$$p = 12'' + 1318'' + 443'' + 416'' + 37'' = 2226''$$

— *b.* Auf die von **Folie** befürwortete, von andern bezweifelte Existenz einer merklichen täglichen Nutation werde ich in 610 zurückkommen. Dagegen mag hier noch nachgetragen werden, dass schon **Newton** die Existenz der Nutation erkannte, dass sie aber vor Bradley (201) aus den Beobachtungen nicht nachgewiesen werden konnte.

515. Die Tafeln der Wandelsterne. — Die sog. Theorie eines Wandelsternes besteht in der Feststellung der zwischen seinen Coordinaten und der Zeit bestehenden Beziehungen, und wenn daher letztere sowie die darin vorkommenden Konstanten nach den im vorhergehenden besprochenen Methoden bestimmt sind, so ist es möglich, **Tafeln** zu konstruieren, welche alle nötigen Daten und Hilfsmittel enthalten, deren man zur wirklichen Berechnung jener Coordinaten für eine bestimmte Zeit bedarf [a].

Zu 515: *a.* Von solchen Tafeln älterer und neuerer Zeit füge ich den bereits früher gelegentlich erwähnten noch folgende bei: „**Alphonsi**, regis Castellæ, cœlestium motuum tabulæ. Venetiis 1483 in 4. (auch 1492, 1518, etc., ferner Aug. Vind. 1488, etc. aufgelegt; sie wurden 1252 durch das von Alfons gegründete astronomische Kollegium, in welchem der Jude Isaac Aben Said den Vorsitz führte, vollendet und Jahrhunderte lang hochgehalten; der spanische Arzt Alphonsus de Corduba gab als „Tabulæ astronomicæ Elisabethæ reginæ. Venetiis 1503 in 4." einen der Gemahlin Ferdinand des Katholischen gewidmeten Auszug aus denselben), — Joh. **Stöffler**, Tabulæ astronomicæ. Tubingæ 1514 in fol., — Joh. **Schoner**, Tabulæ astronomicæ. Norimbergæ 1536 in 4., — Er. **Reinhold**, Tabulæ prutenicæ coelestium motuum. Wittebergæ 1551 in 4. (auch 1585 und Tubingæ 1571; vgl. 260 : k), — Joh. **Kepler**, Tabulæ Rudolphinæ. Ulmæ 1627 in fol. (bei Erstellung dieser Kaiser Rudolf II. gewidmeten, für ihre Zeit ganz vortrefflichen Tafeln hatte Kepler an dem etwa 1592 zu Genf geborenen und 1622 daselbst verstorbenen Jean Gringallet von 1617—20 einen ganz vorzüglichen Gehilfen), — Philipp van Laensbergh oder **Lansberg** (Gent

1561 — Middelburg 1632; Arzt und Prediger zu Antwerpen; vgl. seine „Opera omnia. Middelburgi 1663 in fol."), Tabulæ motuum coelestium perpetuæ. Middelburgi 1632 in fol. (auch 1633 und 1653; diese Tafeln, die Frucht 40-jähriger Arbeit, waren von den Kepler'schen ganz unabhängig und hatten, wenn sie auch im ganzen hinter denselben weit zurückstanden, doch auch einige Vorzüge, vgl. 446), — Maria Cunitz oder **Cunitia** (Schweidnitz 1615? — Pitschen in Schlesien 1664; mit dem Arzte Elias von Löwen verheiratet), Urania propitia, sive tabulæ astronomicæ. Bicini Siles. 1650 in fol., — Ph. de **Lahire**, Tabulæ astronomicæ, Ludovici magni jussu et munificentia exaratæ. Parisiis 1702 in 4. (auch 1727 und Ingolstadii 1722; deutsch durch J. A. Klimm, Nürnberg 1725), — J. **Cassini**, Tables astronomiques du Soleil, de la Lune, des Planètes, des Etoiles et des Satellites. Paris 1740 in 4. (Beigabe zu den Elémens in 11 : x), — L. **Euler**, Tabulæ astronomicæ Solis et Lunæ (Op. var. arg. I von 1746), — E. **Halley**, Tabulæ astronomicæ. Londini 1749 in 4. (engl. London 1752, franz. durch Chappe d'Auteroche und Lalande, Paris 1754—59, 2 Vol. in 8.), — Tob. **Mayer**, Novæ tabulæ motuum Solis et Lunæ (Comm. Gott. 1753; vgl. 510 : d), — Ph. **Loys** de Cheseaux, Tables du Soleil et de la Lune (Mém. posth. 1754), — N. L. de **Lacaille**, Tabulæ solares. Parisiis 1758 in 4., — J. H. **Lambert**, Sammlung astronomischer Tafeln. Berlin 1776, 3 Bde. in 8. (er hatte Bode, Schulze und Lagrange zu Mitarbeitern), — Franz von Paula **Triesnecker** (Kirchberg in Östreich 1745 — Wien 1817; Jesuit; Prof. astr. und Dir. Obs. Wien; vgl. Abh. der böhm. Ges. von 1818), Tabulæ Mercurii, Martis, Veneris, Solis et Lunæ (Eph. Vindob. 1788—1806), — Fr. v. **Zach**, Tabulæ motuum Solis. Gothæ 1792 in 4., und: Tabulæ motuum Solis novæ et iterum correctæ ex theoriæ gravitatis Cl. de la Place. Gothæ 1804 in 4., sowie: Tables abrégées et portatives du Soleil et de la Lune. Florence 1809 in 8., — J. B. **Delambre**, Tables du Soleil. Paris 1806 in 4. (ihre gute Übereinstimmung mit Zachs Tafeln von 1804 wurde später von Arago in verwerflicher Weise benutzt, um Zach, von dem er sich beleidigt glaubte, zu verdächtigen; vgl. meine Mitth. 35 von 1874), — Joh. Tobias **Bürg** (Wien 1766 — Wiesenau bei Klagenfurt 1834; Prof. math. und Adj. Obs. Wien), Tables de la Lune. Paris 1806 in 4. (für Lösung einer damit zusammenhängenden Preisaufgabe der Pariser Akademie erhielten er und sein Konkurrent Bouvard jeder ein Kilogramm Gold), — B. v. **Lindenau**, Tabulæ Veneris, Martis et Mercurii. Gothæ 1810—13 in 4., — Fr. **Carlini**, Esposizione di un nuovo metodo di costruire le tavole astronomiche applicato alle tavole del Sole. Milano 1810 in 8., und: Nuove tavole dei moti apparenti del Sole (Eff. Mil. 1833), — J. C. **Burckhardt**, Tables de la Lune. Paris 1812 in 4. (stützen sich zum Teil auf die Preisarbeit von Bouvard), — Al. **Bouvard**, Tables de Jupiter, de Saturne et d'Uranus. Paris 1821 in 4. (vgl. Berichtigungen durch J. C. Adams in Mem. Astr. Soc. XVII und Naut. Alm. 1851), — Maximilian **Weisse** (Ladendorf in Nieder-Östreich 1798 — Krakau 1863; Prof. astr. und Dir. Obs. Krakau), Coordinatæ Mercurii, Veneris, Martis, Jovis, Saturni et Urani. Cracoviæ 1829 in 4., — P. **Hansen** und Ch. **Olufsen**, Tables du Soleil. Copenhague 1853 in 4., — B. **Peirce**, Tables of the Moon. Washington 1853 in 4., — Marian **Kowalski** (Dobrzyn 1822 — Kasan 1884; Prof. astr. Kasan), Recherches sur les mouvements de Neptune suivies des tables de cette planète. Kasan 1855 in 8., — S. **Newcomb**, An investigation of the orbit of Neptune, with general tables of its motion (Smiths. Contrib. 1865), — etc."

516. Die sog. Ephemeriden. — Führt man mit Hilfe der Tafeln der Wandelsterne die Berechnung der Coordinaten derselben für eine gewisse Folge von Zeiten wirklich aus, und stellt die Ergebnisse in zweckmässiger Weise zusammen, so hat man eine sog. **Ephemeride** konstruiert [a].

Zu 516: *a.* Abgesehen von den „Tabulas astronomicas et **Ephemerides ex illis deductas**", welche (vgl. Weidlers Hist. astr. 265) der um 1150 florierende Franzose Salomon **Jarchi** verfasst haben soll, und vielleicht noch einigen andern da oder dort in einer Bibliothek vergrabenen Manuskripten älterer Zeit, eröffneten die schon früher (319) eingehend besprochenen Ephemeriden, welche **Regiomontan** 1474 für die Jahre 1475—1506 herausgab, die Reihe betreffender Publikationen. An diese Ephemeriden schlossen sich sodann ebensolche an, die Joh. **Stöffler** und Jak. **Pflaum** von Ulm „Ulmæ 1489 in 4. (auch Venet. 1504 und später)" für 1501—1531 herausgaben, ferner ein von dem erstern derselben publiziertes „Ephemeridum opus a capite anni 1532 in alias 20 proxime subsequentes elaboratum. Tubingæ 1531 in 4.", welches später Pet. **Pitatus** in Verona „Tubingæ 1544 und 1553 in 4." bis 1562 fortführte. Als weitere Fortsetzungen sind die Werke „Johannes **Stadius** (Leonhout bei Antwerpen 1527 — Paris 1579; Prof. math. Löwen und Paris), Ephemerides ab A. 1554—1606. Coloniæ 1556—81 in 4., — Cyprian **Leovitius** (Leovicia in Böhmen 1524 — Lauingen 1574; Math. des Pfalzgrafen Otto Heinrich), Ephemeridum novum atque insigne opus ab A. 1556—1606 accuratissime supputatum. Aug. Vind. 1557 in fol., — Giovanni Antonio **Magini** (Padua 1555 — Bologna 1617; Prof. math., astron. et astrol. Bologna), Ephemerides coelestium motuum ab A. 1581 bis 1620. Venet. 1582 in 4., und: Ab A. 1608—30. Francof. 1610 in 4., — Joh. **Kepler**, Ephemerides novæ motuum coelestium ab A. 1617—36. Lincii 1617 — Sagani 1630 in 4., — Lorenz Eichstadt oder **Eichstadius** (Stettin 1596 — Danzig 1660; Prof. med. et math. Danzig), Ephemerides coelestium motuum ab A. 1636—1665. Stetini 1634 — Dantisci 1644 in 4., — Andr. **Argoli**, Ephemerides ab A. 1630—1700. Venetiis 1638—48, 4 Vol. in 4., — Johannes **Hecker** (Danzig 1635? — ebenda 1675; Patrizier und Vetter von Hevel), Ephemerides motuum coelestium ab A. 1666—80. Gedani 1662 in 4., — etc." zu betrachten, — vor allem aber die von D. de **Beaulieu** begründeten (successive von Desforges, Déplaces, Lacaille und Lalande fortgeführten) „Ephémerides des mouvemens célestes pour 1701—1800. Rouen 1700 — Paris 1792, 11 Vol. in 4." — Neben diesen, jeweilen für eine Reihe von Jahren zum voraus erscheinenden Ephemeriden, kamen später auch noch Jahr für Jahr, analog wie die bürgerlichen Kalender, herausgegebene astronomische Jahrbücher in Gebrauch: Das älteste derselben ist die 1678 von Jean **Picard** für das folgende Jahr aufgelegte „Connaissance des temps", welche von da bis auf die Gegenwart (erst successive durch die Lefébure, Lieutaud, Godin, Maraldi, Lalande, Jeaurat und Méchain, — dann durch das 1795/6 errichtete Bureau des longitudes), unter Beigabe sehr vieler wissenschaftlicher Beilagen, ununterbrochen fortgesetzt worden ist; sodann begann 1756 Max. **Hell** zu Wien „Ephemerides astronomicæ" herauszugeben, welche, ebenfalls unter Beigabe wertvoller Aufsätze (durch ihn, Triesnecker und Bürg), bis 1806 fortgeführt wurden; im Jahre 1766 veranlasste **Maskelyne** den Board of Longitude, in London einen „Nautical Almanac" herauszugeben, der seither ununterbrochen erschienen ist; im Jahre 1774 gab Giovanni Angelo **Cesaris** (Casale Pusterlengo 1749 — Mailand 1832;

Jesuit; Dir. Obs. Mailand) zu Mailand „Effemeridi astronomiche" heraus, welche sodann bis 1874 (durch Carlini, Brambilla, Cappelli, etc.) regelmässig, und ebenfalls unter Beigabe wissenschaftlicher Artikel, fortgeführt wurden, — und in demselben Jahre liess Elert **Bode** zu Berlin ein „Astronomisches Jahrbuch für 1776" erscheinen, welches nicht nur von dieser Zeit an bis jetzt (erst durch ihn, dann durch Encke und Förster, und seither durch ein eigenes Recheninstitut) jedes Jahr erschien, sondern (wenigstens anfänglich) durch zahlreiche Notizen aller Art auch den Mangel eines astronomischen Journales weniger fühlbar machte, so dass Lalande (vgl. Bibl. 539) bei Anzeige des ersten Jahrganges mit vollem Recht sagte: „C'est depuis ce temps-là que les astronomes sont obligés d'apprendre l'allemand; car on ne peut se passer de ce recueil". Ich führe zum Schlusse noch an, dass seit 1855 in Washington ein „American Ephemeris and Nautical Almanac", in San Fernando ein „Almanaque nautico" erscheint, — etc., und dass auch seit langem Jahr für Jahr dem grössern Publikum verschiedene astronomische Kalender und Annuaires angeboten werden, unter welchen namentlich der von **Littrow** gegründete, dann durch seinen Sohn und E. Weiss fortgeführte „Kalender für alle Stände", sowie der durch die „Notices" von **Arago** populär gewordene „Annuaire publié par le Bureau des longitudes" und der durch A. **Quetelet** ins Leben gerufene „Annuaire de l'Observatoire de Bruxelles" grosse Verbreitung gefunden haben.

XX. Die Sonne.

> **Tout écart décèle une cause inconnue et peut devenir la source d'une découverte.**
>
> *(Leverrier.)*

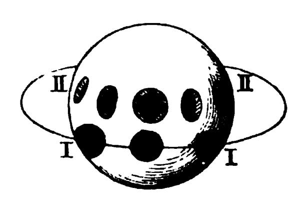
---

517. Die ältern Beobachtungen und Vermutungen. — Die Entdeckung der Sonnenflecken ist, inklusive der dadurch veranlassten ersten Untersuchungen auf diesem Gebiete, schon früher (273) einlässlich besprochen worden, und es bleibt somit nur nachzutragen, was die spätere Zeit den erstgewonnenen Kenntnissen beizufügen wusste. Zunächst ist zu erwähnen, dass, obschon der anfängliche Eifer bald erlosch und oft während ganzen Decennien die Erscheinungen auf der Sonne fast unbeachtet blieben, sich dennoch, infolge ehrenwerter Ausnahmen, die Detailkenntnisse nach und nach immer mehr anhäuften [a]. So wurde man sich bewusst, dass auf der Sonne immer wieder von Zeit zu Zeit einzelne isolierte Flecken, sog. **Kernflecken**, entstehen, die bei ziemlich scharfer, wenn auch selten ganz regelmässiger Begrenzung und einer an gewöhnliche Schlagschatten erinnernden Dunkelheit, meistens von einem bedeutend hellern und anders geformten sog. **Hofe** (Halbschatten) umgeben sind, auch zuweilen im Innern eine noch dunklere Stelle, ein sog. **Dawes'sches Centrum**, zeigen und, zumal wenn sie in der Nähe des Sonnenrandes stehen, sich häufig wie von einem eigentümlichen Lichtgewölke, sog. **Fackeln**, abzuheben scheinen. Viel häufiger ist übrigens, dass einem Kernflecken noch eine Anzahl dunkler Punkte folgt, oder dass ganze Gruppen von Flecken und Punkten vorhanden sind, welche sich oft so rasch umbilden, dass man sie an folgenden Tagen kaum mehr erkennt, oft aber auch längere Zeit denselben Bestand zeigen [b]. Zuweilen ist die Sonne ganz frei von Flecken, und andere Male wie übersäet mit solchen, jedoch auch in letzterm Falle so, dass die Flecken an zwei unsern Windstillen entsprechende **Zonen** zu beiden Seiten des Equators gebunden erscheinen [c]. — Über die Natur der Flecken, welche man bei

nur etwelcher Aufmerksamkeit nicht wohl für Trabanten halten konnte, sondern mit **Fabricius** der Sonne selbst zuteilen musste, standen sich am Ende des 17. und am Anfange des 18. Jahrhunderts zwei Ansichten gegenüber, indem sie die einen durch eine Art Ebbe und Flut in der die Sonne umgebenden Lichthülle, der sog. **Photosphäre**, entstehen und vergehen liessen, während die andern dieselben mit Sonnen-Vulkanen in Zusammenhang bringen wollten [d], und erst gegen das Ende des 18. Jahrhunderts gewann eine Modifikation der letztern Ansicht die Oberhand, indem man ziemlich allgemein annahm, es sei die Sonne ein dunkler und von einer transparenten Atmosphäre, auf welcher die wolkenartige Photosphäre schwimme, umgebener Körper, von welchem zuweilen Dämpfe aufsteigen und die Photosphäre zerreissen, so dass die Flecken eigentlich nur Öffnungen in dieser letztern seien und die umgebenden Höfe die tiefer liegenden Teile derselben zeigen [e]. Diese sog. **Herschel'sche Theorie**, welche in der That allen damals bekannten Erscheinungen so ziemlich genügte, befriedigte etwa ein halbes Jahrhundert hindurch vollständig, bis, wie wir bald hören werden, gewisse neue, zum Teil schon früher (147) besprochene, Thatsachen dieselbe plötzlich zu Falle brachten [f].

Zu 517: *a.* Ich erinnere beispielsweise an **Hevel**, der in einem Anhange zu seiner „Selenographia (vgl. 234)" eine, wenn auch nur die Jahre 1642—45 umfassende, sehr wertvolle Serie publizierte, — an **Eimmart**, dessen von seiner Tochter Clara und seinem Schüler Joh. Philipp **Wurtzelbauer** (Nürnberg 1651 — ebenda 1725; Kaufmann) sekundierten und fortgeführten Beobachtungen allerdings leider, wie die von Heinrich **Siverus** (1650? — 1690?; Prof. math. Hamburg) von 1675—1690 fortgeführte Reihe, spurlos verloren gingen, — etc. Einige andere Beobachter werden später (520) erwähnt werden. — *b.* Rasche Umbildungen auf der Sonne sind besonders an Stellen gar nicht selten, wo sich starke und ausgedehnte Fackeln zeigen, und so fand ich z. B. 1848 V 1 an einer solchen, wo ich am Tage zuvor nur ein paar kleine Flecken gesehen hatte, eine Fleckengruppe von etwa 180″ Länge mit zwei Hauptflecken von je 20″ Durchmesser, was keine Kleinigkeit ist, da 1″ in der Distanz der Sonne etwa 100 geographischen Meilen entspricht. — Während man bei Sonnenbeobachtungen in der Regel die Augen dadurch schützen muss, dass man entweder, nach dem von **Scheiner** auf Veranlassung von **Cysat** benutzten, aber spätestens durch **Apian** und **Fracastoro** ziemlich gleichzeitig gemachten Vorschlage, dem Auge ein dunkles (z. B. rauchschwarzes, nur nicht rotes) oder sog. **Blendglas** vorsetzt, oder das Licht durch ein **Helioskop** (vgl. 148) abschwächt, so bedarf man in Fällen, wo die Sonne hinter einer dünnen Nebelschichte steht, keines solchen Hilfsmittels und sieht dann die Flecken lange nicht absolut schwarz wie etwa den vorübergehenden Merkur, — die Höfe gleichen den Mondmeeren, — die Fackeln erscheinen als Silberstreifen: Entschiedene Färbungen (wie sich solche allerdings bei objektiven Bildern an den Rändern der Flecken, aber verräterischer Weise auch an mitabgebildeten Mikrometerfaden zeigen) sah ich nie; dagegen nahm **Schwabe** zuweilen rot-

braune Färbungen wahr, und **Secchi** sah wiederholt über grössern Flecken wie rote Schleier liegen. — *c.* Als Belege für den grossen Wechsel in der Fleckenhäufigkeit führe ich beispielsweise an, dass ich 1860 VI 28 auf der Sonne mit einem zweifüssigen Fernrohr 47 in 10 Gruppen abgeteilte Flecken und Punkte zählte, während ich 1855 VIII 14 bis X 1 sogar mit einem vierfüssigen Fernrohr nie das kleinste Pünktchen wahrgenommen hatte, — ja es könnten noch viel eclatantere Fälle aufgeführt werden; aber auch bei grösster Fleckenhäufigkeit kömmt es nie vor, dass man Flecken in der Nähe der Sonnenpole sieht, und nur äusserst selten, dass sich solche in der Nähe des Sonnenequators zeigen, — die grosse Mehrzahl der Flecken ist, wie schon oben angedeutet wurde, an zwei zu beiden Seiten des Equators liegende Zonen gebunden, welche zusammen die von **Scheiner** entdeckte „Via regia" konstituieren, mit deren Wanderungen wir uns noch später zu befassen haben werden. — *d.* Nachdem einmal (vgl. 272—3) die zunächst auf vorgefasster Meinung beruhende und zu der (nicht I, sondern II entsprechenden) Erscheinung der Flecken ganz unpassende Idee vorüberziehender fremder Körper überwunden war, und auch die von **Marius** und **Galilei** beliebten Schlacken und Wolken nicht recht mit derselben zu harmonieren schienen, so standen sich zunächst zwei Ansichten über die Natur der Flecken gegenüber: Zwar gingen beide von der Annahme aus, dass der an und für sich dunkle Sonnenkörper von einer leuchtenden Hülle umgeben sei; aber während die Anhänger der Einen der von Dom. **Cassini** aufgestellten Hypothese beipflichteten, dass die Photosphäre einer Art Ebbe und Flut unterworfen sei, und so für uns einzelne Sonnenberge, je nachdem sie mehr oder weniger abgedeckt oder wieder ganz überflutet werden, als Flecken von veränderlicher Grösse und Gestalt sichtbar werden oder wieder verschwinden, — so bekannten sich die der Andern zu der schon von **Scheiner** im Verlaufe seiner Beobachtungen aufgestellten und dann namentlich wieder von Leonh. **Rost** (vgl. dessen Handbuch) verfochtenen Hypothese, dass die von Sonnen-Vulkanen aufsteigenden Dämpfe zuweilen die Photosphäre zerreissen, wobei Teile des dunkeln Sonnenkörpers für uns als Flecken in Sicht kommen, wozu sie z. B. dadurch berechtigt schienen, dass (Mém. Par. 1720) von einem im December 1719 gesehenen Flecken mitgeteilt wurde: „Cette tache était si grosse que quand elle arriva au bord occidéntal, elle y fit une **échancrure** noire". — *e.* Nachdem längere Zeit die „Berge" und „Abgründe" miteinander konkurriert hatten, schien sich die Wage zu Gunsten dieser letztern zu neigen, als im Oktober 1771 Christoph **Schülen** (? 1722 — Essingen in Würtemberg 1790; Pfarrer zu Essingen) in den „Stuttgarter-Blättern" (später auch in seinem „Beitrag zur Dioptrik. Nördlingen 1782 in 8.") und bald darauf auch Alexander **Wilson** (St. Andrews 1714 — Glasgow 1786; successive Pharmaceut, Schriftgiesser und Prof. astr. Glasgow) in seinen „Observations on the Solar Spots (Ph. Tr. 1774; preisgekrönt von der Akademie zu Kopenhagen)" hervorhob, dass sich zuweilen (entsprechend II in obiger Figur) Flecken zeigen, welche in der Mitte der Sonne einen beidseitig gleich breiten Hof aufweisen, während derselbe **vor** oder **nach** der Mitte **links** oder **rechts** breiter erscheine, was nicht mit Bergen vereinbar, wohl aber bei Vertiefungen eine notwendige Folge sei. Auch Wilh. **Herschel** machte wiederholt entsprechende Beobachtungen und stellte sodann in seinen „Observations



tending to investigate the nature of the Sun (Ph. Tr. 1801)“ die schon oben mitgeteilte Theorie auf, welche alsbald fast allgemeinen Eingang fand und z. B. **Gruithuisen** die drollige Bemerkung erlaubte, es habe die Sonne 1821 V 8 bis VIII 7 „keine Öffnung“ gehabt. — Vgl. auch H. **Faye** in Compt. rend. 1865 und O. **Lohse** in A. N. 1976—77 von 1874. — *f.* Ich füge anhangsweise noch bei, dass **De la Rue**, Balfour **Stewart** und Benjamin **Loewy** in ihren „Researches on Solar Physics (Ph. Tr. 1865—70)“ aus zwölfjährigen Zeichnungen und Photographien nachwiesen, dass auf 100 gegen ihre Halbschatten excentrische Flecken bei 86 gegen das Centrum der Sonne hin stehen, — dass **Faye** (vgl. Compt. rend. 1865 XII 18) durch Berechnung von Beobachtungen Carringtons fand, dass die Flecken durchschnittlich bei 900 Meilen unter der Photosphäre liegen, und überdies erklärte, man könne die Vertiefungen jedermann zeigen, wenn man zwei etwa um zwei Tage voneinander abstehende photographische Aufnahmen eines Fleckens in ein Stereoskop einführe, — dass ich selbst in dem fleckenreichen Jahre 1848 mehrmals dem Bilden von Blasen in der Photosphäre und dem Sichtbarwerden von Flecken infolge Zerspringens solcher Blasen zuzusehen glaubte, — dass schon Luca **Valerio** (Neapel 1552? — Rom 1618; Prof. math. et phys. Rom) und **Scheiner** die nachmals auch durch **Bouguer** und Jean **Chacornac** (Lyon 1823 — Ville Urbanne 1873; Obs. Marseille und Paris) bestätigte und auf eine merkliche Sonnenatmosphäre hinweisende Ansicht äusserten, es sei der Sonnenrand bedeutend matter als die Sonnenmitte, ja **Secchi** sogar fand, es sei letztere so hell als die Fackeln am Rande, — etc.

518. Die systematischen Beobachtungen von Horrebow und Schwabe. — Während die ältern Beobachter den ihnen wohlbekannten Wechsel in der Häufigkeit der Sonnenflecken für gesetzlos hielten [a], gelangte allerdings schon etwa 1775 Christian **Horrebow** auf Grund langjähriger regelmässiger Beobachtungen zu der Vermutung, dass derselbe gegenteils an eine bestimmte Periode gebunden sein möchte [b]; aber da er versäumte, sich darüber öffentlich auszusprechen, so blieb das alte Dogma unerschüttert, ja gewann bald darauf durch die ihm nicht ungünstige Herschel'sche Lehre noch eher an Zutrauen, und so kam es, dass, als 1843 Heinrich **Schwabe** auf Grund einer 1826 von ihm begonnenen und höchst zweckmässig angelegten Beobachtungsreihe mitteilte, es scheine in dem Auftreten der Sonnenflecken eine Periode von circa 10 Jahren zu bestehen, ihm nur wenige mit vollem Interesse entgegenkamen, ja die grosse Mehrzahl in dieser angeblichen Periodicität nur etwas Zufälliges vermutete [c].

Zu 518: *a.* So liest man z. B. in den Pariser Memoiren von 1713: „Les temps de l'apparition des taches ne sont nullement réglés“, — in der 1740 von J. **Cassini** verfassten Astronomie nach Aufzählung einiger frühern Wahrnehmungen von Flecken: „Il est manifeste par ce que nous venons de rapporter qu'il n'y a point de règle certaine de leur formation, ni de leur nombre et de leur figure“, — in der von **Lemonnier** 1746 besorgten französischen Bearbeitung von Keills Institutionen: „Il semble que les taches ne suivent aucune loi dans leurs apparitions“, — etc.; dass die Unregelmässigkeit nicht in der

Erscheinung, sondern in der Beobachtung liegen möchte, scheint niemand beigefallen zu sein. — *b.* Nachdem Christian **Horrebow** von 1738 hinweg mehrere Decennien hindurch die Vorgänge auf der Sonne ziemlich regelmässig verfolgt hatte, fand er sich 1775/6 bemüssigt, in sein Diarium die Bemerkung einzutragen: „Obwohl sich aus den Beobachtungen ergiebt, dass die Veränderungen und Wechsel der Sonnenflecken häufig sind, so kann doch keine bestimmte Regel dafür gefunden werden, nach welcher Ordnung und nach wieviel Jahren dieser Wechsel sich vollzieht. Dieses kommt hauptsächlich davon her, dass die Astronomen sich bisher wenig bemühten, häufige Sonnenfleckenbeobachtungen zu machen, ohne Zweifel weil sie glaubten, es gehe daraus nichts hervor, das für die Astronomie oder Physik grosses Interesse hätte. Es ist indess zu hoffen, dass man durch eifriges Beobachten auch hier eine **Periode** auffinden werde wie in den Bewegungen der übrigen Himmelskörper; dann erst wird es Zeit sein, zu untersuchen, in welcher Weise die Körper, die von der Sonne getrieben und beleuchtet sind, durch die Sonnenflecken beeinflusst werden". Leider blieben jedoch diese gesunden Ansichten in dem besagten Diarium verborgen, bis 1859 Th. N. **Thiele** (vgl. A. N. 1185 und 1893), infolge eines von mir erlassenen Aufrufes, überall nach alten Sonnenfleckenbeobachtungen zu suchen, auch die bei dem Brande von 1807 geretteten Tagebücher Horrebows aus den Jahren 1767—76 durchging, — so dass sie erst zu einer Zeit bekannt wurden, wo das Gewünschte, wie wir sofort sehen werden, bereits geleistet war. — *c.* „I may compare myself to Saul, who went out to seek his father's asses, and found a kingdom" schrieb **Schwabe** 1859 (vgl. Monthly Not. 17) an Carrington, und in der That hatte er, als er 1826 auf Veranlassung von seinem Freunde Harding regelmässige Sonnenbeobachtungen begann, höchstens gehofft, einen intramerkuriellen Planeten bei seinem Durchgange durch die Sonne zu erwischen, und statt dessen, Dank konsequenter Aufzeichnung, binnen wenigen Jahren (vgl. A. N. 495 von 1844) die Reihe

Jahr	I	II	III	Jahr	I	II	III	Jahr	I	II	III
1826	285	118	25	1832	264	84	49	1838	203	282	0
27	298	161	2	33	257	33	**139**	39	205	162	0
28	292	**225**	0	34	275	52	120	40	263	152	3
29	261	199	0	35	239	173	18	41	283	102	15
30	214	190	1	36	190	272	0	42	306	68	64
31	251	149	0	37	170	**327**	0	43	309	34	**147**

erhalten, welche für jedes seiner Beobachtungsjahre die Anzahl (I) der Beobachtungstage, die Anzahl (II) der in demselben nach und nach sichtbar gewordenen Einzelflecken oder Fleckengruppen, sowie die Anzahl (III) der Tage zeigt, an welchen die Sonne fleckenfrei war, und auf den ersten Blick erkennen lässt, dass **an dem periodischen Wechsel der Fleckenhäufigkeit kaum zu zweifeln** ist. Diese wichtige Entdeckung wurde merkwürdigerweise anfänglich sehr kühl aufgenommen, ja es hielt die Mehrzahl der Astronomen, obschon **Schwabe** jedes folgende Jahr ein neues Belege für dieselbe liefern konnte, an dem alten Dogma fest.

519. Der eigentliche Nachweis der Periodicität. — Sogar als 1852 der demnächst (522) zu besprechende, höchst merk-

würdige und eine **kosmische Physik** begründende Parallelismus in dem Auftreten der Sonnenflecken und der erdmagnetischen Variationen erkannt wurde, wollten sich noch viele auf jenes alte Dogma stützen, um einen solchen, ihrer vermeintlichen Weisheit unbegreiflichen Zusammenhang in Frage zu stellen, und so wurde es zur Notwendigkeit, wo immer möglich, den Nachweis zu leisten, dass die durch Schwabe aus seiner, allerdings auch damals noch etwas kurzen Reihe, geschlossene Periodicität sich rückwärts bis zur Zeit der Entdeckung der Sonnenflecken verfolgen lasse und somit jenes Dogma irrig sei. Es gelang mir nun noch in demselben Jahre, diesen Nachweis mit ziemlicher Sicherheit zu erbringen, — zugleich die mittlere Länge der sich bei den Sonnenflecken zeigenden Häufigkeits-Periode auf

$$11^a,111 \pm 0^a,038 \risingdotseq 11^1/_9{}^a = 100 : 9$$

festzusetzen, — und für meine ziemlich mühevolle Arbeit nicht nur bei Schwabe, sondern überhaupt bei der Mehrzahl der Astronomen volle Anerkennung zu finden [a].

Zu 519: *a.* Um die wünschbare Untersuchung durchführen zu können, suchte ich zunächst aus vielen hundert Bänden der mir zugänglichen Bibliotheken alle die Sonnenflecken betreffenden Notizen und Beobachtungen zusammen, — zog so namentlich neben den bereits erwähnten Schriften der **Scheiner, Hevel** und **Rost** die Publikationen „Ludovico **Zucconi** (Venedig 1706? — ebenda 1783; Abáte in Venedig), De Heliometri structura et usu. Venetiis 1760 in 4., — Joh. Heinrich **Fritsch** (Quedlinburg 1772 — ebenda 1829; Superintendent in Quedlinburg), Beobachtungen über die Sonnenflecken (Berl. Jahrb. 1802—21), — und: Augustin **Stark**, Meteorologisches Jahrbuch. Augsburg 1815 bis 1836 in 4." zu Rate, — und konnte mich so unter Zuzug der Schwabe'schen Reihe überzeugen, dass mit der Unsicherheit von höchstens einem Jahre

1626,0 1717,5 1816,3 1829,5 1837,5 1848,6

Maxima der Fleckenhäufigkeit, und

1645,0 1755,5 1810,5 1823,2 1833,6 1844,0

Minima derselben stattgefunden hatten. Da nun je aus den vier letzten, unmittelbar aufeinander folgenden Epochen sich die Zeitdifferenzen

13,2	8,0	11,1	oder durchschnittlich	$10^a,77$
12,7	10,4	10,4	- -	11,17

ergeben, so muss die Länge einer allfälligen Periode den mittlern Wert von etwa 11^a besitzen, und somit auch die Differenz zweier entfernter Epochen ein Vielfaches einer 11 nahen Zahl sein. Vergleicht man aber jede der 2×4 letzten Epochen mit jeder der 2×2 frühern, so erhält man

$$1848,6 - 1626,0 = 222,6 = 19 \times 11,72 = 20 \times 11,13 = 21 \times 10,60$$
$$1848,6 - 1717,5 = 131,1 = 11 \times 11,92 = 12 \times 10,93 = 13 \times 10,08$$
$$1837,5 - 1626,0 = 211,5 = 18 \times 11,75 = 19 \times 11,13 = 20 \times 10,57$$

etc., d. h. jedes Mal einen der 11 nahen Wert: Man darf daher auf die wirkliche Existenz einer solchen Periode schliessen und derselben die im Mittel aus allen 16 Vergleichungen folgende, oben mitgeteilte durchschnittliche Länge

zuteilen, — und dies noch um so mehr, als, wie ich ebenfalls zeigen konnte, keine der mit dieser mittlern Periode abgeleiteten Epochen durch bekannte Beobachtungen ernstlichen Widerspruch erleidet. Ich durfte also wagen, mein Resultat, unter Beigabe einiger sekundärer Ergebnisse meiner Arbeit, auf die ich später zurückkommen werde, in dem Schriftchen „Neue Untersuchungen über die Periode der Sonnenflecken und ihre Bedeutung. Bern 1852 in 8. (Bern. Mitth. 1852)" öffentlich vorzulegen.

520. Die Einführung der Relativzahlen und die weitern Ergebnisse. — Da immerhin noch Einzelne meine Arbeit von 1852 bemängelten, so setzte ich auch später meine Sammlung von ältern Fleckenbeobachtungen fort und hatte das Glück, nach und nach unter Beihilfe von Freunden und Kollegen ein grosses Material zusammenzubringen [a], welches ich unter Einführung von sog. **Relativzahlen**, die sowohl den jeweiligen Fleckenstand der Sonne als die Art seiner Erhebung berücksichtigen [b], einheitlich bearbeitete und so schliesslich dazu gelangte, nicht nur meine frühern Angaben vollständig zu rechtfertigen, sondern für den ganzen Zeitraum von 1610 bis auf die neueste Zeit alle Minima und Maxima festzulegen, ja von 1749 hinweg für jeden Monat eine mittlere Relativzahl zu geben [c]. Aus den mit Hilfe dieser Zahlen erstellten Kurven ergiebt sich teils der charakteristische Verlauf des Phänomenes, teils die Notwendigkeit, der Periode von $11^1/_9$ Jahren wenigstens noch Eine grössere, etwa sechs der kleinern umfassende, jedoch gegenwärtig noch nicht mit Sicherheit bestimmbare Periode beizugeben [d]. Zum Schlusse mögen noch die von mir und andern gemachten Versuche erwähnt werden, die Coordinaten der Fleckenkurve durch Formeln darzustellen, oder den Verlauf der Erscheinung durch eine Art Rückwirkung der Planeten auf die Sonne zu erklären, obschon dieselben bis jetzt noch nicht zu ganz befriedigenden Resultaten geführt haben [e].

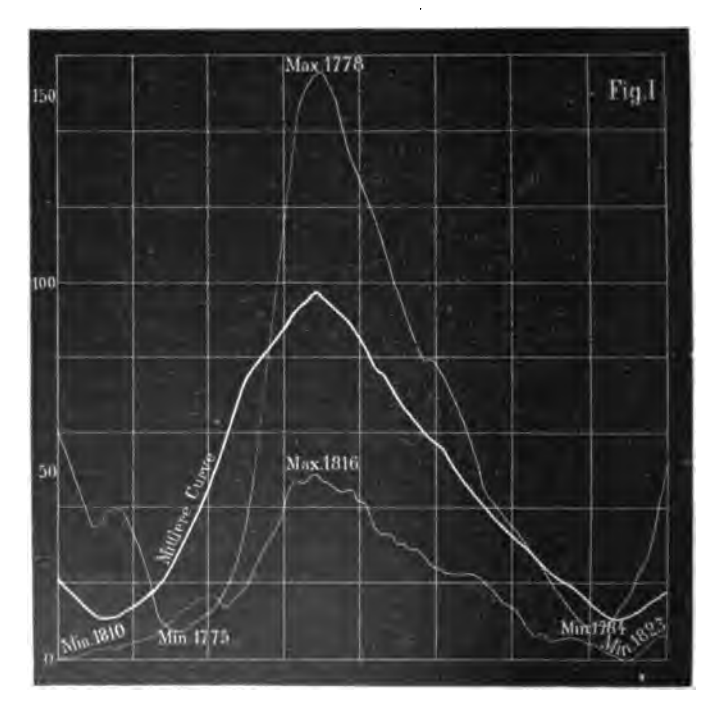
Zu 520: *a.* Für den Detail der ältern und neuern Beobachtungen auf die in meinen „Mittheilungen" enthaltene, bereits 660 Nummern zählende Sonnenfleckenlitteratur verweisend, führe ich hier beispielsweise die mir 1852 noch nicht bekannten Serien von Th. **Harriot** (Beob. 1611—1613; von Carrington für mich aus Mss. ausgezogen), von Gottfried **Kirch**, seiner Frau Margaretha **Winkelmann** (Panitsch 1670 — Berlin 1720; Schülerin von Chr. Arnold) und ihren Kindern Christfried (Guben 1694 — Berlin 1740; Nachfolger von Gottfried) und Christine (Guben 1696 — Berlin 1782; Tante von Bode) **Kirch** (Beob. 1700—48; mir von Schönfeld in Mss. zugesandt), François de **Plantade** (Montpellier 1670—1741, wo er am Pic du midi vom Schlage gerührt wurde; Generaladvokat in Montpellier; B. 1705—26; für mich von Legrand aus Mss. ausgezogen), L. **Rost** (B. 1718—20; von Heis für mich aus Samml. Bresl. Med. ausgezogen), F. **v. Hagen** (B. 1739—51; von Wagner für mich aus Mss. ausgezogen), Joh. Caspar **Staudach** (Nürnberg 1720? — ebenda 1800?; Zimmermeister in Nürnberg; B. 1749—99; von Eichhorn in Original zugesandt), Chr-

Horrebow (B. 1738—76: die geretteten Tagebücher von 1767—76 wurden mir von d'Arrest im Original zugesandt), Jacques-André **Mallet** (Genf 1740 — ebenda 1790; Prof. astr. Genf; vgl. Biogr. II; B. 1773—86; von mir in Genf aus Mss. ausgezogen), J. E. **Bode** (B. 1774—1821; mir von Schönfeld in Mss. zugesandt), Placidus **Heinrich** (Schierling in Bayern 1758 — Regensburg 1825; Benediktiner; Prof. phys. Ingolstadt und Regensburg; B. 1781—1818; von mir in Bogenhausen aus Mss. ausgezogen), Honoré **Flaugergues** (Viviers 1755 — ebenda 1835; Friedensrichter in Viviers; B. 1788—1830; mir von Laugier in Original zugesandt), C. **Tevel** (Middelburg 1763 — ebenda 1836?; Silberschmied; B. 1816 bis 1836; von Buys-Ballot für mich aus Mss. ausgezogen), Joh. Wilhelm **Pastorff** (Schwedt 1767 — Buchholz bei Frankfurt a./O. 1838; Gutsbesitzer; B. 1819 bis 1833; von Ranyard für mich aus Mss. ausgezogen), C. H. **Adams** of Edmonton (B. 1819—23; von Carrington für mich aus Mss. ausgezogen), Fr. **Arago** (B. 1822—30; von mir aus dessen Mém. scient. II ausgezogen), etc., an. — *b.* Um für die wechselnde Thätigkeit auf der Sonne behufs leichterer Vergleichungen ein bestimmtes Mass zu erhalten, führte ich schon 1850 (vgl. Bern. Mitth. 1851) für meine eigenen und sodann einige Jahre später (vgl. meine Mitth. 6 von 1858) auch für fremde Beobachtungen sog. **Relativzahlen** r ein, für deren Berechnung ich mich auf die Überlegung stützte, dass diese Thätigkeit zunächst der Anzahl g der gleichzeitig vorhandenen Gruppen proportional sein werde, in untergeordneter Weise aber auch in der Grösse der Gruppen ihren Ausdruck finde, welche durch die in Teilen der ganzen Sonnenfläche ausgedrückte Flächensumme f' sämtlicher Flecken oder die diese erfahrungsweise (wie ich in Mitth. 49 von 1879 und 62 von 1884 aus den Beobachtungen in Rom und Madrid nachträglich noch förmlich erwiesen habe) durchschnittlich nahezu ersetzende Anzahl f'' dieser Flecken repräsentiert werden könne. Durch einen glücklichen Griff schon 1850 für die Gewichte der g und f die Zahlen 10 und 1 wählend, erhielt ich so zur Berechnung der Relativzahlen die bequemen Formeln

$$r' = k' \cdot (10 \cdot g + f') \qquad \text{und} \qquad r'' = k'' \cdot (10 \cdot g + f'') \qquad \mathbf{1}$$

in welchen k ein mit Beobachter und Instrument wechselnder, aus korrespondierenden Beobachtungen zu bestimmender Faktor ist, welchen ich für mich und die Vergrösserung 64 eines Fraunhofer'schen Vierfüssers gleich der Einheit annahm. Da f' für die ältere Zeit ganz unbekannt ist und sogar für die neuere nur einzelnen Reihen entnommen werden kann, so ist es zur Erstellung einer möglichst homogenen längern Reihe angegeben, sich durchweg an die f'' zu halten, — jedenfalls aber darf man nicht, wie es einzelne gethan haben, den r einfach die f' substituieren und die viel wichtigern g ganz vernachlässigen. — *c.* Die unter a aufgezählten, sich zum Teil deckenden Reihen ermöglichten mir, die k rückwärts bis auf die Zeiten der Staudach, Zucconi und Horrebow mit ausreichender Sicherheit zu bestimmen, somit das ganze, die Zeit von 1749 bis auf die Gegenwart beschlagende Material in ziemlich homogene Relativzahlen umzusetzen, und aus diesen eine Reihe mittlerer monatlicher Relativzahlen zu bilden, welche ich (vgl. Mitth. 50 von 1880) für die Jahre 1749—1876 zusammengestellt und auch seither Jahr für Jahr publiziert habe. Da zur Bildung dieser Reihe, namentlich im Anfange unsers Jahrhunderts, einzelne kürzere Strecken graphisch überbrückt werden mussten, — überhaupt erst in der neuern Zeit, wo zu der Schwabe'schen Reihe noch die Serien von Jul. **Schmidt** (seit 1841, vgl. seine „Resultate aus elfjährigen Beobachtungen der Sonnenflecken. Wien 1857 in 4." und A. N.), von mir (seit 1847, vgl. Bern.

Mitth.), von Heinrich **Weber** (Wallenbrück bei Minden 1808 — Schiplage 1885; schwang sich vom Hirten zum Elementarlehrer in Peckeloh bei Versmold auf; seit 1863, vgl. Heis Wochenschrift), etc., hinzutraten, die Angaben eine gewisse Vollständigkeit erreichten, — und da es für manche Zwecke auch wünschbar schien, die allfällig mit kürzern Perioden (Sonnenrotation, Erdjahr, etc.) zusammenhängenden Anomalien zu eliminieren, so leitete ich aus dieser ersten eine zweite Reihe ab, in welcher jede Zahl das Mittel aus 12 sich folgenden Zahlen war, und aus dieser (um wieder auf die Monatmitten zu kommen) noch eine dritte, indem ich das Mittel aus je zwei sich folgenden Zahlen der zweiten bildete. Ich habe diese letztere, durch fast ein Viertel-jahrhundert angestrengter Arbeit erhaltene Reihe, welche ich als diejenige der **ausgeglichenen** Relativzahlen bezeichne und der ich wohl Andere bei Benutzung derselben **meinen** Namen beizulegen bitten darf, schon 1877 (vgl. Mitth. 42) publiziert, — seither unter Mitbenutzung der mir aus Palermo, Madrid, Paris, Haverford, Rom, O-Gyalla, Jena, etc. mitgeteilten Zählungen regelmässig fortgeführt, — und auch in Tab. VIII^{d}, nach Mitteilung der sämtlichen Epochen für Min. und Max., vollständig gegeben, und sodann noch in der mit R bezeichneten Kolumne die sich aus der ersten Reihe ergebenden Jahresmittel beigefügt. — *d.* Trägt man die Zahlen der einen oder andern der oben besprochenen Reihen an einer Zeitscale als Ordinaten auf, so erhält man Kurven,



welche den Verlauf des Sonnenfleckenphänomenes zur Anschauung bringen, wie dies in beistehender, mit Hilfe der ausgeglichenen Zahlen konstruierter Fig. I für die beiden, so ziemlich die extremen Fälle repräsentierenden Perioden 1775—84 und 1810—23 der Fall ist. Dieselbe Figur zeigt auch als **mittlere**

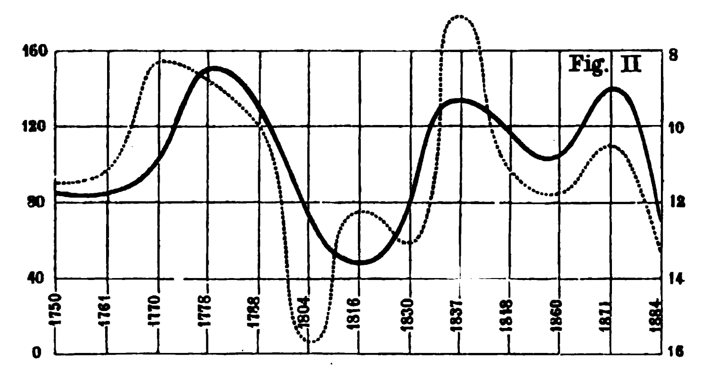
Kurve das Ergebnis, welches ich (vgl. Mitth. 42 von 1877) durch Kombination der 10 damals erstellbaren Einzelkurven erhielt, und durch dieselbe z. B. die charakteristische Eigenschaft der viel raschern Zunahme als Abnahme der Fleckenhäufigkeit. — Die gleichen Reihen und Kurven sind auch bei Erstellung der bereits erwähnten Epochentafel in VIII^d mitbenutzt worden, und ich füge bei, dass aus den in letztere aufgenommenen, offenbar den einzelnen Periodenlängen entsprechenden 2 × 24 Differenzen, wenn man denjenigen vor der Mitte des vorigen Jahrhunderts das Gewicht $^1/_2$, denjenigen von 1750—1850 das Gewicht 1, und endlich den seitherigen das Gewicht 2 beilegt, als **mittlere Länge der Periode**, je nachdem man die Minima oder die Maxima zu Grunde legt, die Werte

$$11^a,295 \pm 0^a,318 \qquad \text{oder} \qquad 11^a,284 \pm 0^a,439$$ **2**

hervorgehen, während für die durch den mittlern Fehler der einzelnen Bestimmung repräsentierte **mittlere Schwankung der Periodenlänge** die Werte

$$\pm 1^a,459 \qquad \text{oder} \qquad \pm 2^a,037$$ **3**

erhalten werden. — Da die Schwankung der Periode bei 15 % ihrer Länge beträgt, also (vgl. Mitth. 52 von 1881) jede neu hinzutretende Periode noch eine erhebliche Veränderung des Mittelwertes bewirken kann, und die 1852 erhaltene Periodenlänge von den soeben erhaltenen Zahlen lange nicht um deren Unsicherheit abweicht, so halte ich es nicht für opportun, jenen Wert schon jetzt abzuändern, sondern glaube, man sollte damit zuwarten, bis es gelungen sein wird, auch die **Länge der grossen Periode** zu ermitteln, welche jeweilen eine Anzahl von Einzelwellen zu umfassen scheint: Die von mir schon 1861 (vgl. Mitth. 12) vermutete Existenz einer solchen grossen Periode und einer



vielleicht damit zusammenhängenden, gewissermassen eine Constanz der Wellenfläche andeutenden **Beziehung zwischen Länge und Höhe jeder Einzelwelle** geht nämlich schon aus Fig. I, noch besser allerdings aus Fig. II hervor, in welch letzterer als Ordinaten der ganzen Linie die nach Tab. VIII^d den Maximalepochen entsprechenden R von unten, — als Ordinaten der gebrochenen Linie die vorgehenden Epochenlängen von oben aufgetragen wurden; ob aber die grosse Periode 5, 6 oder noch mehr Einzelwellen überspannt, — ob die früher von mir angenommenen $55^1/_2{}^a$ definitiv zu verwerfen sind, und wirklich nur noch (wie mir 1889 bei Benutzung chinesischer Angaben hervorzugehen schien) die Wahl zwischen $66^2/_3$ und $83^1/_3{}^a$ zu treffen bleibt, — etc., ist mir noch nicht mit voller Sicherheit zu ermitteln gelungen, trotzdem ich dafür die verschieden-

artigsten Wege eingeschlagen habe, wie aus der Folge meiner „Mittheilungen" hervorgeht, auf welche ich mich auch für den Nachweis berufe, dass mutmasslich neben der Hauptperiode von $11^1/_9$ Jahren noch Nebenperioden von $8^1/_3$ und 10 Jahren bestehen. Ich füge nur noch bei, dass zwischen den grossen Maxima, welche nach chinesischen Aufzeichnungen auf 371 und 1371 fielen, gerade

$$1000 = 12 \times 83^1/_3 = 15 \times 66^2/_3 = 90 \times 11^1/_9 = 100 \times 10 = 120 \times 8^1/_3$$

Jahre liegen, — dass 500 Jahre später das ausgezeichnete Maximum von 1871 eintraf, — und 83 Jahre vor diesem ebenfalls ein ungewöhnlich starkes Maximum zu verzeichnen war. — *e.* Dass mich schon 1852 die nahe Übereinstimmung der Fleckenperiode mit dem Jupitersjahre frappieren musste, ja dass ich bald darauf vor der Frage stand, ob nicht etwa das Fleckenphänomen in irgend einer Weise durch die Planeten influiert werde, ist fast selbstverständlich, und infolge davon stellte ich schon 1859 (vgl. Mitth. 8) eine Formel für die Fleckenkurve auf, deren 4 periodische Glieder den 4 Planeten Venus, Erde, Jupiter und Saturn entsprachen; da aber, wie mir scheint, weder dieser Versuch, noch mancher spätere, durch mich und andere angestellte, zu wirklich befriedigenden Resultaten führte, so begnüge ich mich hier, sowohl dafür, als überhaupt für weiteres auf die in den mehrerwähnten „Mittheilungen" enthaltenen Erörterungen und Referate, ferner auf meinen Vortrag „Die Sonne und ihre Flecken. Zürich 1861 in 8.", und mein „Mémoire sur la période commune à la fréquence des taches solaires et à la variation de la déclinaison magnétique (Mem. Astr. Soc. 1878)", sowie endlich auf den eingehenden Artikel „A. **Wolfer**, Compte rendu des travaux de M. le prof. R. Wolf de Zurich dans le domaine de la physique solaire (Archives de Genève 1891; deutsche Bearbeitung in Met. Zeitschr. 1892)" zu verweisen. Ich füge einzig noch als Kuriosum bei, dass Charles **Harrison** (vgl. Phil. Mag. 1889) fand, dass, wenn man in der Formel

$$P = (\Sigma p \cdot m : d^2) : (\Sigma m : d^2) \qquad 4$$

für p, m, d die Umlaufszeiten, Massen und mittlern Distanzen der acht Hauptplaneten einführe, $P = 11{,}29^a$ werde, d. h. mit der mittlern Länge der Fleckenperiode weit innerhalb ihrer Unsicherheit, mit den Werten 2 sogar ganz übereinstimme.

521. Die ältern Vermutungen über den Zusammenhang zwischen den Veränderungen auf der Sonne und gewissen Erscheinungen auf der Erde. — Schon bald nach Entdeckung der Sonnenflecken wurde mehrfach die Ansicht geäussert, dass unsere Witterungsverhältnisse durch dieselben beeinflusst werden möchten, und noch später kam man immer wieder von Zeit zu Zeit auf dieselbe zurück, ohne sich jedoch über die den Flecken zuzuteilende Rolle einigen zu können [a]. Ferner brachte man die Häufigkeit der Flecken in Beziehung zu der Intensität des Zodiakallichtes, zu der Anzahl der sichtbaren Nordlichter, etc., konnte jedoch auch da nicht zu bestimmten Resultaten gelangen, weil eben die zu solchen Vergleichungen notwendigen längern Beobachtungsreihen fehlten [b].

Zu 521: *a.* Während Battista **Baliani** (Genua 1582? — ebenda 1660?; ein Edelmann) in einem Briefe an Galilei die Sonnenflecken als „erkältende Potenzen" bezeichnete, und **Riccioli** in seinem „Almagest" hervorhob, dass 1632 von Mitte Juli bis Mitte September, „zu welcher Zeit eine aussergewöhnliche Tröckne war", keine Flecken gesehen worden seien, dagegen bei der Kälte im Juni 1642 die Sonne eine Menge Flecken gehabt habe, so bestritt z. B. **Deschales** in seinem „Mundus mathematicus" diese Ansicht unter Anführung gegen sie zeugender Thatsachen, und später meinte sogar W. **Herschel** (vgl. Ph. Tr. 1801) durch Vergleichung der ihm bekannten Fleckenstände mit den gleichzeitigen englischen Fruchtpreisen gefunden zu haben, dass gerade die fleckenreichen Jahre die fruchtbarern und wärmern seien. — *b.* Nachdem **Mairan** in seinem „Traité de l'aurore boréale (2 éd. p. 264)" daran erinnert hatte, dass schon **Cassini** (572) an einen Zusammenhang zwischen der Intensität des Zodiakallichtes und der Häufigkeit der Sonnenflecken dachte, sprach er sich dahin aus, dass namentlich auch ein solcher zwischen dieser letztern und derjenigen des Nordlichtes bestehen möchte, fügte dann aber allerdings vorsichtig bei: „Cependant il faut avouer qu'il n'y a encore rien de solide à établir sur cette correspondance apparente, et qu'elle ne se soutient pas toujours également." Immerhin dachte er somit ebenfalls an kosmische Einflüsse auf gewisse terrestrische Erscheinungen, und als **Lalande** (Mém. Par. 1761) darauf aufmerksam machte, dass die Magnetnadel seit zwei Jahrhunderten ziemlich regelmässig jährlich 9 bis 10′ nach Westen gehe, fügte er bei „preuve évidente que cet effet tient à une **cause cosmique et générale**; les causes particulières n'agissent pas ordinairement d'une manière si uniforme".

522. Der Nachweis des Zusammenhanges mit Magnetismus und Nordlicht. — Das erste sichere, den Zusammenhang betreffende Faktum wurde 1852 festgestellt, als die Schwabe'sche Reihe durch **Sabine** mit seiner Reihe der jährlichen Anzahl magnetischer Störungen, und ungefähr gleichzeitig durch **Gautier** und mich mit der schon früher (156) besprochenen Lamont'schen Variationsreihe zusammengestellt wurde [a]. Der vollständige Parallelismus in zwei anscheinend ganz heterogenen Erscheinungen war so unerwartet und einigen doktrinären Physikern so unbequem, dass er eines genauern Nachweises bedurfte und mich zu den bereits (519) besprochenen Untersuchungen veranlasste, aus welchen nun mit aller wünschbaren Sicherheit hervorging, dass **Fleckenhäufigkeit und Grösse der Deklinationsvariation dieselben Perioden und Epochen** besitzen, ja dass sogar alle scheinbaren Unregelmässigkeiten der einen Kurve sich auch in der andern finden [b]. Seither ist es mir überdies gelungen, Formeln aufzustellen, nach welchen für verschiedene Orte der Erde und jedes Jahr die mittlere Deklinationsvariation aus der entsprechenden mittlern Relativzahl berechnet werden kann [c], und ferner haben **Hansteen, Ellis,** etc., dargethan, dass sich die Korrespondenz auch auf die übrigen magnetischen Variationen erstreckt, während **Fritz** den Nachweis leistete, dass der von Mairan (521) und später

auch von mir vermutete Zusammenhang zwischen der Häufigkeit von Sonnenflecken und Nordlicht ganz unzweifelhaft besteht [d].

Zu 522: *a.* Während Lamont nicht bemerkte, dass die (156) von ihm für die mittlern jährlichen Deklinations-Variationen erstellte Reihe einen ganz ähnlichen Verlauf besitzt wie die von Schwabe (518) publizierte Reihe für die Häufigkeit der Sonnenfleckengruppen, erkannte dagegen **Sabine**, als er die Störungen im täglichen Gange der Magnetnadel studierte und dieselben für eine Reihe von Jahren abzählte, dass diese Häufigkeitszahlen eine der Schwabeschen ganz konforme Reihe bilden, worauf er in der 1852 III 18 der Roy. Society überreichten Abhandlung „On periodical laws discoverable in the mean effects of the larger magnetic disturbances" aufmerksam machte; da aber diese Abhandlung erst V 6 vorgelegt und erst ziemlich lange nachher ausgegeben wurde, so blieb ihr Inhalt sozusagen unbekannt, ja als A. **Gautier** (vgl. Bibl. univ. 1852 VII—VIII) und ich (vgl. Bern. Mitth. 245 von 1852) im Juli desselben Jahres (ohne etwas voneinander, geschweige von Sabine zu wissen) auf den Parallelismus der beiden Reihen von Lamont und Schwabe aufmerksam wurden, und ich meinen Fund (während Gautier zurückhielt) sofort (VII 31) der Naturf. Gesellschaft in Bern und (VIII 2) der Pariser Akademie, sowie Faraday mitteilte, derselbe allgemein für etwas ganz Neues gehalten wurde, — wusste ja nicht einmal **Faraday** (vgl. dessen Brief an mich von 1852 VIII 27 in Bern. Mitth. 255) damals schon etwas von Sabines Arbeit, während dann allerdings wenigstens bald darauf **Humboldt** (vgl. l. c. seinen Brief von 1852 IX 10), dem ich etwas später ebenfalls geschrieben hatte, bereits davon Kenntnis besass. — *b.* Während so jener Parallelismus **dreimal**, und nur wegen der geringen Aufmerksamkeit auf Schwabes Arbeiten bloss dreimal, erkannt worden war, fiel dagegen **auf mich allein** die volle Arbeit, welche erforderlich wurde, um die alsbald laut werdenden Zweifel parieren zu können. Es gelang mir dann auch, noch vor Ablauf des Jahres den bereits (519) besprochenen Beweis zu erbringen, dass die Fleckenhäufigkeit wirklich einer mittlern Periode von $11^1/_9$ Jahren unterliege und da ich überdies zeigen konnte, dass sich der Parallelismus auch rückwärts so weit verfolgen lasse als überhaupt Variationsbeobachtungen vorhanden seien, sowie (vgl. 156) dass diese Periode von $11^1/_9$ sogar zu der Lamont'schen Reihe weit besser passe als dessen Periode von $10^1/_3$ Jahren, so hatte ich verhältnismässig leichtes Spiel die meisten Gegner, unter welchen merkwürdigerweise (vgl. Pogg. Annal. von 1862) **Lamont** einer der heftigsten war, aus dem Felde zu schlagen, — nur John Allan **Broun** (Dumfries in Schottland 1817 — London 1879; Dir. Obs. Trevandrum) wollte noch lange (vgl. seine Abhandlung „On the diurnal variation of the magnetic declination. Edinburg 1867 in 4.", u. a.) für die Variationen an einer Periode von $10^a,45$ festhalten und diese auch auf die Sonnenflecken übertragen. — *c.* Im Frühjahr 1859 sagte ich mir, dass, wenn die Häufigkeit der Sonnenflecken wirklich in einem innigen Kausalnexus zu der Grösse der Deklinations-Variationen stehe, sich dieselben zu einander wie die Ablesungen verhalten müssen, welche man für eine und dieselbe Grösse an verschiedenen Scalen erhält, — dass es also gedenkbar sei, die Variationen v aus den Relativzahlen r mittelst einer Formel

$$v = a + b \cdot r \qquad \mathbf{1}$$

berechnen zu können, und in der That, als ich die 1 zur Bestimmung der a und b für jedes der von der Lamont'schen Reihe betroffenen Jahre aufschrieb,

erhielt ich die Specialformel

$$v = 6',273 + 0',051 \cdot r \qquad 2$$

aus der rückwärts die bereits in 156 gegebene Reihe IV folgt, welche überraschend gut mit der I übereinstimmt. Durch diesen Erfolg ermutigt, sammelte ich hierauf nach und nach (vgl. meine Mitth., sowie für eine Auswahl die Tab. VIII[d], wo Mannheim nach Paris und Göttingen nach Prag etwas ergänzt wurde) alle mir zugänglichen Variationsreihen, — berechnete jede derselben, — und konnte so schon 1877 (vgl. Mitth. XLIII) die nicht unbeträchtliche Anzahl von 26 Paaren korrespondierender Werte der a und b in eine Tafel zusammenstellen, aus welcher ein Auszug beifolgt, an den ich folgende Betrachtungen knüpfe: Die a und b nehmen im allgemeinen namentlich gegen den Equator hin, aber auch nach Osten (also wohl bei Zunahme der Entfernung vom magnetischen Pole), so entschieden ab, dass die scheinbaren Abweichungen von diesem Gesetze wohl grösstenteils der verschiedenen Aufnahme und Bearbeitung der mir vorliegenden Serien zugeschrieben werden dürfen, — sie wechseln beim Übergange auf die südliche Halbkugel selbstverständlich ihr Zeichen, nehmen (abgesehen von diesem) bei Entfernung vom Equator wieder zu, — und scheinen sich angenähert (wie ich 1885, durch eine sachbezügliche Bemerkung von J. Maurer veranlasst, in Mitth. LXIV nachwies) nach den Formeln

Länge	Breite	Ort	a	b × 1000
— 5^h,3	43°,7	Toronto . .	7,96	40
0,7	51,5	Göttingen .	7,79	46
0,8	48,1	München .	6,74	42
0,0	51,5	Greenwich .	6,67	39
0,9	52,5	Berlin . .	6,62	42
2,0	59,9	Petersburg	6,18	40
1,0	50,1	Prag . . .	6,12	40
0,8	41,9	Rom . . .	5,48	54
0,6	45,5	Mailand . .	5,28	43
1,0	48,2	Wien . . .	5,13	39
0,7	59,9	Christiania .	4,94	37
7,8	51,9	Nertschinsk	3,50	26
4,9	18,9	Bombay . .	2,29	11
5,1	8,5	Trevandrum	0,24	7
7,1	— 6,2	Batavia . .	— 3,16	— 16
9,8	— 42,9	Hobarton .	— 7,17	— 32

$$a = -0,285 + 12,41 \cdot \text{Si i} : H \qquad b = 0,009 + 0,059 \cdot \text{Si i} : H \qquad 3$$

wo i und H Inklination und Horizontalintensität bezeichnen, berechnen zu lassen, so dass sie an jedem Orte mit diesen letztern Grössen einer sekulären Veränderung unterliegen dürften, wie ich eine solche in der That (vgl. Mitth. LXXVII von 1891) aus der langen Greenwicher Serie auch bereits ziemlich sicher nachgewiesen habe. — Ich füge noch bei, dass man, wie ich wiederholt (noch l. c.) durch Doppelrechnung erprobt habe, für jede mitteleuropäische Station b = 0,045, sodann bei n Bestimmungen $a = (\sum v - b \cdot \sum r) : n$ setzen, und so schon aus einer kürzern Serie fast mühelos eine zu manchen Vergleichungen ganz brauchbare Formel erstellen kann. — *d.* Für **Hansteen**, welchem ich, sowie seinem langjährigen Adjunkten und spätern Nachfolger Karl Friedrich **Fearnley** (Fredrikshald 1818 — Christiania 1890), überhaupt so vielfache Unterstützung verdanke, vgl. seinen 1859 III 3 an mich geschriebenen Brief in Mitth. IX, — für William **Ellis** (Greenwich 1828 geb.; Superint. magn. met. dep. Greenwich) seine höchst wertvolle Abhandlung „On the relation between the diurnal range of magnetic declination and horizontal force, as

observed at the R. Obs. Greenwich during the years 1841 to 1877, and the period of solar spot frequency (Ph. Tr. 1880; auch Auszug in Mitth. LI)", — für die Arbeiten von **Fritz** die in 229 gegebene Litteratur, und seine vielfachen Beiträge zu meinen Mittheilungen (wie z. B. denjenigen in Nro. XV von 1863), sowie seine Preisschrift „Die Beziehungen der Sonnenflecken zu den magnetischen und meteorologischen Erscheinungen der Erde. Haarlem 1878 in 4.", und seine neueste Schrift „Die wichtigsten periodischen Erscheinungen der Meteorologie und Kosmologie. Leipzig 1889 in 8." — Zur Ergänzung der Litteratur erwähne ich noch: „El. **Loomis**, Comparison of the mean daily range of the magnetic declination with the number of auroras observed each year and the extent of the black spots on the surface of the Sun. New Haven 1870 in 8., — R. **Wolf**, Über die Abspiegelung der Sonnenfleckenperiode in den zu Rom beobachteten magnetischen Variationen. Mailand 1881 in 8. (in commem. Chelini), — Balfour **Stewart** (Edinburgh 1828 — Manchester 1887; Prof. nat. phil. Manchester; vgl. A. Schuster in Mem. Manch. 1888) and William **Dodgson**, An analysis of the recorded diurnal ranges of magnetic declination. London 1882 in 8. (vgl. Mitth. LVI von 1882), — H. **Wild**, Über die Beziehungen zwischen den Variationen des Erdmagnetismus und den Vorgängen auf der Sonne (Mél. Petersb. 12 von 1885), — Ad. **Schmidt**, Der tägliche Gang der erdmagnetischen Kraft in Wien und Batavia in seiner Beziehung zum Fleckenstande der Sonne (Wien. Sitz. 1888), — E. **Marchand**, Relations des phénomènes solaires et des perturbations du magnétisme terrestre. Lyon 1888 in 8., — etc."

523. Der Zusammenhang mit den Variationen der mittlern Jahrestemperatur. — Der Einfluss der Fleckenhäufigkeit auf die Temperatur ist nicht so eklatant wie der eben behandelte, aber doch nicht zu leugnen; denn wenn aus verschiedenen frühern, sich allerdings fast ausschliesslich auf europäische Temperaturreihen stützenden Untersuchungen, nur unsichere und sich zum Teil sogar widersprechende Resultate hervorgingen [a], so ist es dagegen **Gould** gelungen, auf Grundlage einer tropischen Reihe den bestimmten Nachweis zu leisten, dass Fleckenzunahme eine ihr proportionale Abnahme der mittlern Jahrestemperatur bedingt [b].

Zu 523: *a.* Als A. **Gautier**, vgl. seine „Recherches relatives à l'influence que le nombre et la permanence des taches observées sur le disque du Soleil peuvent exercer sur les températures terrestres (Ann. ch. ph. 1844)", die nach Schwabe den Jahren 1826—43 entsprechenden Häufigkeitszahlen mit verschiedenen Temperaturreihen verglich, fand er im Gegensatze zu Herschel (521 : a), aber allerdings nur im Durchschnitte, einen kleinen Temperaturüberschuss für die fleckenarmen Jahre, und zu einem entsprechenden Resultate gelangte auch Karl **Fritsch** (Prag 1812 — Salzburg 1879; Adjunkt met. Centr. Wien) in seiner Abhandlung „Über das Steigen und Fallen der Lufttemperatur binnen einer analogen eilfjährigen Periode, in welcher die Sonnenflecken sich vermindern oder vermehren (Wien. Denkschr. 1854 und Sitz. 1852—54)", wie es übrigens nach den unterdessen von Joseph **Henry** (Albany 1799 — Washington 1878; Prof. math. Albany und nat. phil. Princeton, dann Sekret. Smiths. Inst.; vgl. Report 1878) und Ang. **Secchi** mit Thermosäulen ausgeführten Messungen nicht anders zu erwarten war, da diese (vgl. ihre Abh. in Proc. amer. phil.

Soc. IV von 1847, Mem. Oss. Coll. Rom. 1851, etc.) übereinstimmend zu dem Resultate gelangten, dass die Flecken etwas weniger Wärme ausstrahlen als benachbarte freie Teile der Sonne. Dagegen hielten andere, wie z. B. **Gruithuisen** (vgl. dessen Jahrb. für 1843—46), an der Herschel'schen Ansicht fest, und als ich 1859 (vgl. Mitth. IX) die Zahlen der langen Berliner Temperaturreihe mit Hilfe meiner Epochentafel einerseits für die Jahre 1760—1802 und anderseits für die Jahre 1803—47 nach dem Fleckenstande der Sonne gruppierte, erhielt ich das unerwartete Resultat, dass Herschel für die ältere, Gautier aber für die neuere Zeit Recht behalte, — also wohl eigentlich andere Einflüsse die geringen Differenzen in der Sonnenwirkung zeitweise ganz überdecken. Für weitern Detail sowie für einige neuere, ganz verdienstvolle, aber eigentlich den Standpunkt wenig verschiebende Arbeiten der Karl **Hornstein** (Brünn 1824 — Prag 1882; Dir. Obs. Prag), Wladimir **Köppen** (Petersburg 1846 geb.; Met. der deutsch. Seewarte), Joseph **Liznar** (Brumowski in Mähren 1852 geb.; Adj. met. Centr. Wien), etc., verweise ich auf die in 522 erwähnte Preisschrift von H. **Fritz** und auf die Folge meiner Mitteilungen. — *b.* Die schon von **Main** in seinen „Results of meteorol. observations. Oxford 1868 in 8." und von **Hornstein** in seiner Note „Über Abhängigkeit der mittlern Windesrichtung von den Perioden der Sonnenflecken (Wien. Sitz. 1877)" hervorgehobene Bedeutung der mittlern Windrichtung wurde auch von **Gould** (vgl. die An. de la of. met. argent. Vol. I von 1878) sofort erkannt, als er von den in Buenos-Aires für 1856—1875 erhaltenen mittlern Jahrestemperaturen ihr Mittel $T = 17^0{,}22$, sodann umgekehrt die denselben Jahren entsprechenden (von N über E gezählten) mittlern Windrichtungen von ihrem Mittel $\varphi = 106^0$ abzog, und schliesslich die so erhaltenen Differenzen ΔT und $\Delta\varphi$ (wie es in beistehender Tafel ge-

Jahr	ΔT	$\Delta\varphi$	$\Delta T'$	$\Delta T''$	Δr	$\Delta T'''$
1856	0⁰,37	— 5⁰	— 0⁰,16	0⁰,53	52,9	0⁰,11
57	1,22	36	1,19	0,03	34,4	— 0,24
58	0,06	— 2	— 0,07	0,13	2,4	0,14
59	— 0,29	— 5	— 0,16	— 0,13	— 36,6	0,17
60	— 0,92	— 17	— 0,56	— 0,36	— 38,5	— 0,05
1861	— 0,30	— 6	— 0,20	— 0,10	— 20,0	0,06
62	— 0,19	— 7	— 0,23	0,04	— 1,9	0,06
63	— 0,61	— 19	— 0,63	0,02	13,2	— 0,08
64	0,11	— 2	— 0,07	0,18	10,3	0,10
65	1,00	27	0,89	0,11	26,7	— 0,10
1866	0,35	— 1	— 0,03	0,36	40,9	0,06
67	— 0,02	— 14	— 0,46	0,44	49,9	0,05
68	0,62	14	0,46	0,16	19,9	0,01
69	— 0,01	1	0,03	— 0,04	— 16,7	0,10
70	0,09	29	0,96	— 0,87	— 81,9	— 0,21
1871	— 0,54	— 5	— 0,16	— 0,38	— 54,0	0,06
72	0,13	14	0,46	— 0,33	— 44,5	0,03
73	0,07	1	0,03	0,04	— 9,1	0,12
74	— 0,79	— 24	— 0,79	0,00	12,6	— 0,09
75	— 0,40	— 19	— 0,63	0,28	40,1	— 0,08

scheben ist) einander gegenüberstellte. Macht man nun die Hypothese, dass die im Mittel $\pm 0^0{,}533$ betragenden $\triangle T$ den im Mittel $\pm 16^0{,}1$ betragenden $\triangle \varphi$ proportional seien, d. h. setzt $\triangle T' = (0{,}533 : 16{,}1) \cdot \triangle \varphi \risingdotseq 0{,}033 \cdot \triangle \varphi$, so erhält man die in die Tafel eingetragenen Werte, sowie die Differenzen $\triangle T'' = \triangle T - \triangle T'$, deren Mittel nur noch $\pm 0^0{,}310$ beträgt, so dass sich die Hypothese bewährt. Da jedoch die $\triangle T''$ einen sehr ausgesprochenen und jedem Kenner des Sonnenfleckenphänomenes wohlbekannten systematischen Gang zeigen, so ist man darauf hingewiesen, den $\triangle T''$ die $\triangle r$, d. h. die Überschüsse des Mittels $r = 57{,}2$ der entsprechenden Sonnenfleckenrelativzahlen über ihre Einzelwerte beizufügen, wie dies in der Tafel geschehen und dadurch der parallele Gang noch ersichtlicher gemacht ist. Man kann daher in Anbetracht, dass die $\triangle r$ den mittlern Wert $\pm 36{,}4$ besitzen und $0{,}310 : 36{,}4 \risingdotseq 0{,}008$ ist, für die Temperatur in Buenos-Aires die Formel

$$\begin{aligned} T' &= 17^0{,}22 + \triangle T' + \triangle T'' = 17^0{,}22 + 0{,}033 \cdot \triangle \varphi + 0{,}008 \cdot \triangle r \\ &= 17^0{,}68 + 0^0{,}033 \cdot (106^0 - \varphi) - 0^0{,}008 \cdot r \end{aligned} \qquad 1$$

aufstellen, und wenn man die sich nach derselben ergebenden Einzelwerte T' von den ursprünglich den Beobachtungen entnommenen T abzieht, so bleiben in der That nur noch die in die Tafel eingetragenen, im Mittel $\pm 0^0{,}113$ betragenden kleinen Differenzen $\triangle T'''$ übrig, welche keinen systematischen Gang mehr zeigen und sich durch die Unvollkommenheiten der Beobachtungswerte (namentlich der φ), und die Unvollkommenheit der von mir um ihrer Einfachheit willen gewählten Darstellungsweise leicht erklären lassen. **Gould** selbst wandte zur Bestimmung des Einflusses der $\triangle \varphi$ eine Sinusreihe an und erhielt so die Formel

$$\begin{aligned} T' = 17^0{,}61 &+ 2^0{,}00 \cdot \mathrm{Si}\,(\varphi + 86^0\,25') + 0^0{,}46 \cdot \mathrm{Si}\,(2\,\varphi + 276^0\,16') \\ &+ 0^0{,}24 \cdot \mathrm{Si}\,(3\,\varphi + 82^0\,44') - 0^0{,}00727 \cdot r \end{aligned} \qquad 2$$

welche dann in der That nur noch den mittlern Fehler $\pm 0^0{,}058$ übrig lässt. Auch für Bahia Blanca erhielt **Gould** (A. N. 2116 von 1877) eine sehr gute Übereinstimmung, während die von Karl Wilhelm **Moesta** (Zierenberg bei Kassel 1825 — Dresden 1884; Prof. astr. und Dir. Obs. Santiago) wenig später (A. N. 2246 von 1879) für Santiago durchgeführte Untersuchung allerdings ein weniger befriedigendes Resultat ergab. — Anhangsweise mag noch an die am Schlusse von 380 : d erwähnten Anomalien erinnert werden, in welchen ebenfalls die eilfjährige Periode gefunden werden wollte.

524. Einige noch problematische Beziehungen. — Während man früher dem Wechsel in den Vorgängen auf der Sonne zu wenig Aufmerksamkeit schenkte, so sollte derselbe in der neuern Zeit an allem möglichen beteiligt sein, so z. B. an den Regenverhältnissen, — an der Grösse der Weinerträge, — an der Häufigkeit der Gewitter, Hagelschläge, Erdbeben und Eruptionen, — an den Luftdruckverhältnissen, Stürmen, etc., — sogar an dem Betrage der Heringfänge, an dem Auftreten der Heuschreckenschwärme, und dergleichen. Wenn nun auch solche Relationen noch keineswegs erwiesen sind, so ist dabei immerhin so manches merkwürdiges Zusammentreffen zu Tage getreten, dass man die betreffenden Studien keineswegs ignorieren darf, und ich glaube daher, hier zwar nicht

näher darauf eintreten, wohl aber die bereits gegebene Special-litteratur in dieser Richtung noch etwas vervollständigen zu sollen [a].

Zu 524: *a.* Ich erwähne noch folgende Schriften und Abhandlungen: „Karl Emil **Kluge** (Freiberg 1830 — Chemnitz 1864; Prof. phys. Chemnitz), Über Synchronismus und Antagonismus von vulkanischen Eruptionen. Leipzig 1863 in 8., — Friedrich Gustav **Hahn** (Glauzig in Anhalt 1852 geb.; Prof. geograph. Königsberg), Über die Beziehungen der Sonnenflecken zu meteorologischen Erscheinungen. Leipzig 1877 in 8., — W. **Hunter**, Rainfall in the temperate zone in connection with the sunspot cycle (Nature 1877), — K. V. **Riecke**, Die Hagelschläge und Hagelbeschädigungen in Würtemberg während der 50 Jahre 1828—77. Stuttgart 1878 in 8., — C. **Meldrum**, Sunspots and the Rainfall of Paris (Monthly Not. Maurit. 1879), — Friedr. **Heincke**, Die neuesten Forschungen über den Hering (Ausland 1882), — Paul **Reis**, Die periodische Wiederkehr von Wassernoth und Wassermangel im Zusammenhange mit den Sonnenflecken, den Nordlichtern und dem Erdmagnetismus. Leipzig 1883 in 8., — S. **Günther**, Der Einfluss der Himmelskörper auf Witterungsverhältnisse. Nürnberg 1884 in 8., — Von der **Gröben**, Ein Beitrag zum Thema: Sonnenflecken und Regenmengen (Oesterr. Z. 1884), — Fred. **Chambers**, Sunspots and prices of indian food-grains (Nature 1886), — K. W. **Zenger**, Die Meteorologie der Sonne und ihres Systemes. Wien 1886 in 8. (vgl. Kritik in Oesterr. Z. 1887), — James P. **Hall**, Sunspots and Tornadoes (New York Science 1890), — E. **Brückner**, Klima-Schwankungen. Wien 1890 in 8.“, — etc. Für weiteres verweise ich auf die mehrerwähnten Schriften und Noten von H. **Fritz**, — sowie auf die wiederholten Besprechungen in meinen Mittheilungen, zu welchen ich jeweilen durch neue Publikationen veranlasst wurde.

525. Die ältern Bestimmungen der Rotationselemente. — Nachdem die früher nur geahnte Rotation der Sonne durch Joh. **Fabricius** (273) wirklich erwiesen war, lag natürlich die Aufgabe vor, die diese Rotation bestimmenden Elemente zu ermitteln, und es gehört zu den grossen Verdiensten von **Scheiner**, dieselbe dadurch gelöst zu haben, dass er nicht nur die Rotationsdauer T aus der Zeit ableitete, welche etwas permanente Flecken nötig hatten, um vom Ostrande der Sonne zu ebendemselben zurückzukehren, sondern auch die Lage des Sonnenequators, d. h. die Länge Ω seines aufsteigenden Knotens in der Ekliptik und seine Neigung i gegen dieselbe, zu den Zeiten auf der Sonne abzumessen suchte, wo die Flecken entweder gerade oder dann möglichst gekrümmte Bahnen zu beschreiben schienen. Die von ihm erhaltenen Resultate

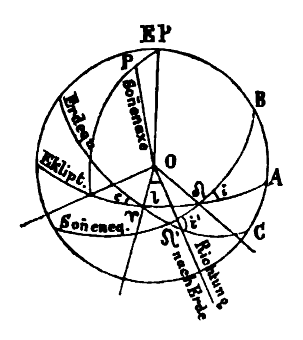
$$T = 25^1/_2{}^d \qquad \Omega = 69^1/_2{}^0 \qquad i = 7^1/_2{}^0$$

mögen von andern in ähnlicher Weise kontroliert worden sein, behielten aber jedenfalls auf lange Geltung [a].

Zu 525: *a.* Aus der Fleckenbeobachtung hatte **Scheiner** für die Wiederkehr $\tau = 27^1/_2{}^d$ erhalten und daraus unter Benutzung des Erdjahres $t = 365^1/_4{}^d$ und unserer 27 : 2 ganz richtig geschlossen, dass die wirkliche Rotationsdauer nur

$$T = 365^1/_4 \cdot 27^1/_2 : (365^1/_4 + 27^1/_2) = 25^1/_2{}^d$$

in Anspruch nehme. Seine oben erwähnte Bestimmung von ☊ und i beruht dagegen auf folgenden Verhältnissen: Legt man durch die Sonnenaxe O P und den Ekliptikpol E P eine Ebene, so steht diese sowohl zum Sonnenequator als zur Ekliptik senkrecht, folglich steht auch umgekehrt die Kante O ☊ letzterer Ebenen zu jener Ebene und ihrer Kante in der Ekliptik senkrecht, und, wenn l die heliocentrische Länge der Erde bezeichnet, so ist ♈ A = 90° + l und ☊ A = 90° + l − ☊. Nun hat man nach 87 : 2 und 90 : 2 aus Dreieck ☊ ♈ ☊'



$$\text{Si}\ ☊' \cdot \text{Si}\ i' = \text{Si}\ ☊ \cdot \text{Si}\ i$$

$$\text{Co}\ ☊' \cdot \text{Si}\ i' = \text{Si}\ e \cdot \text{Co}\ i + \text{Co}\ e \cdot \text{Si}\ i \cdot \text{Co}\ ☊ \qquad 1$$

$$\text{Co}\ i' = \text{Co}\ e \cdot \text{Co}\ i - \text{Si}\ e \cdot \text{Si}\ i \cdot \text{Co}\ ☊$$

oder, wenn

$$\text{Tg}\ x = \text{Tg}\ i \cdot \text{Co}\ ☊ \qquad 2$$

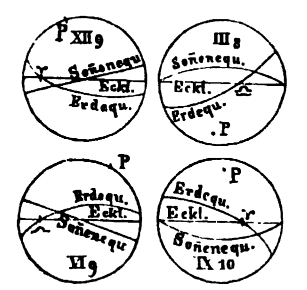
ist,

$$\text{Tg}\ ☊' = \text{Tg}\ ☊ \cdot \text{Si}\ x \cdot \text{Cs}\,(e + x) \qquad \text{Co}\ i' = \text{Co}\ i \cdot \text{Co}\,(e + x) \cdot \text{Se}\ x \qquad 3$$

und aus den bei A rechtwinkligen Dreiecken B ☊ A und A ♈ C

$$\text{Tg}\ AB = \text{Tg}\ i \cdot \text{Co}\,(l - ☊) \qquad \text{Tg}\ AC = \text{Tg}\ e \cdot \text{Co}\ l \qquad 4$$

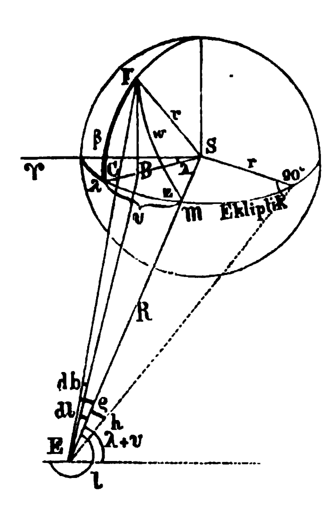
Diese Beziehungen ergeben nun wirklich die Möglichkeit einer angenäherten Bestimmung von ☊ und i in der von Scheiner benutzten Weise; denn sucht man die (jetzt etwa auf XII 9 und VI 9 fallenden) Jahrestage auf, wo die Fleckenbahnen gerade erscheinen (also die Erde in der Ebene des Sonnenequators steht oder durch einen der Knoten geht), so hat man nur einer Sonnentafel den entsprechenden Wert von l zu entnehmen, um auch ☊ oder 180° + ☊ zu haben, und wenn man zugleich A B abschätzt, so hat man damit nach 4 ebenso i oder — i bestimmt, — und analog giebt der den (jetzt etwa auf III 8 und IX 10 fallenden) Jahrestagen, wo die Fleckenbahnen grösste Krümmungen zeigen, entsprechende Wert von l die A B nach 4 auf Null reduzierenden Grössen 90° + ☊ oder 270° + ☊, während das Abschätzen des Betrages der Krümmung auf i zu schliessen erlaubt. Überdies lassen sich nach den 1—4 auch bei nur annähernd bekannten Werten von ☊ und i die nötigen Grössen hinlänglich genau berechnen, um für jeden Jahrestag entsprechende Figuren zu erstellen, wie solche beistehend für die vier besprochenen kritischen Tage gegeben sind.



526. Die neuern Methoden. — Später sah man ein, dass, wenn man zu mindestens drei Zeiten die Position eines Fleckens bestimmt habe, sich daraus die sämtlichen Rotationselemente nach geometrischen Methoden erhalten lassen müssen, und es wurden etwa von Dom. **Cassini** und **Flamsteed** hinweg bis auf die neueste Zeit dafür verschiedene Wege beliebt, von welchen beispielsweise der von **Petersen** aufgefundene hier näher auseinandergesetzt werden soll [a].

Zu 526: *a.* Da Dom. **Cassini** schon 1675 der Pariser Akademie eine Vorlage über Bestimmung der Rotationselemente machte und **Flamsteed** in der Einleitung zu seiner Schrift „The doctrine of the sphere. London 1680 in 4." von einer ebensolchen spricht, so kann man kaum zweifeln, dass sich beide ungefähr gleichzeitig dafür neue Methoden ausgedacht hatten, und zwar wenigstens ersterer mutmasslich eine „graphische", da einerseits Jacq. **Cassini** in seinen vorzugsweise die Arbeiten seines Vaters darstellenden „Eléments" eine solche giebt, und anderseits Delambre (VI 261) betont „que jamais D. Cassini et son école n'ont employé que la règle et le compas pour tous les problèmes de ce genre". Ihnen folgte Jos. Nic. **Delisle**, der sich 1713 zwei bezügliche Methoden (eine graphische und eine analytische) ausdachte; da er aber dieselben erst in seinen „Mémoires pour servir à l'histoire et aux progrès de l'astronomie, de la géographie et de la physique. St-Pétersbourg 1738 in 4." publizierte, so sind wohl die beiden Schriften „**Hausen**, Theoria motus Solis circa proprium axem. Lipsiæ 1726 in 4., — und: **Boscovich**, De maculis solaribus exercitatio astronomica. Romæ 1736 in 4. (vgl. auch Band 5 seiner Opera)" die ersten, durch welche solche Verfahren allgemeiner bekannt wurden: Das von Hausen gelehrte Verfahren war ein rein konstruktives und beruhte darauf, dass das uns erscheinende, einer orthographischen Projektion entsprechende Sonnenbild leicht in ein stereographisches Bild umgesetzt, folglich aus drei der orthographischen Projektion entnommenen Positionen eines Fleckens die stereographische Projektion eines Sonnenparallels erhalten werden kann, — während dasjenige von Boscovich, welches sich nicht leicht in solcher Weise resümieren lässt, als ein gemischtes bezeichnet werden muss, sich aber, wie **Delambre** (Astronomie III 33—36) gezeigt hat, ohne Schwierigkeit in ein rein trigonometrisches umsetzen lässt. — In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts war die Bestimmung der Sonnenrotation ein Lieblingsproblem, und so finden wir dieselbe z. B. in den Schriften „**Lagrange**, Recherches sur la libration de la Lune (Pièces de prix 1764; vgl. auch Méc. anal. 3 éd. vol. 2), — Joh. Alb. **Euler**, De rotatione Solis circa axem ex motu macularum apparente determinanda (Comm. Petr. 1766; Euler benutzt 4 Beobachtungen, um nicht voraussetzen zu müssen, dass die Flecken der Sonne adhärieren), — Esprit **Pézénas** (Avignon 1692 — ebenda 1776; Jesuit; Prof. hydr. Marseille, dann Dir. Obs. Avignon), Astronomie des marins. Avignon 1766 in 8., und: Nouvelle théorie du Soleil (Mém. prés. 1774), — Guillaume de St-Jacques de **Silvabelle** (Marseille 1722 — ebenda 1801; Dir. Obs. Marseille), Trois observations d'une tache du Soleil étant données, déterminer le parallèle du Soleil que décrit la tache et le temps de sa révolution (Mém. prés. 1768), — **Kästner**, Formulæ analyticæ ad motum Solis circa axem suum computandum (Comm. Gott. 1769 bis 1770), — Placidus **Fixlmillner** (Achleuthen 1721 — Kremsmünster 1791; Dir. Obs. Kremsmünster), Decennium astronomicum. Styræ 1776 in 4., und: Acta astronomica cremifanensia. Styræ 1791 in 4., — S. Gabr. **Hedin**, Dissertatio astronomica de rotatione Solis et Planetarum circa axes. Upsaliæ 1776 in 4., — **Duséjour**, Détermination de l'équateur solaire et lunaire (vgl. den in Mém. Par. 1776 erschienenen Abschnitt seiner „Nouvelles méthodes analytiques" und Vol. 1 seines mehrerwähnten „Traité"), — **Lalande**, Mémoire sur les taches du Soleil et sur sa rotation (Mém. Par. 1776 und Astronomie 3 éd. III 287 bis 306), — **Cagnoli**, Méthode pour trouver la situation de l'équateur d'une planète et l'obliquité de l'écliptique, par rapport à la rotation du Soleil et de la Lune (Mém. prés. 1785; vgl. auch Mem. Soc. Ital. 1799), — etc." behandelt, für deren

Mehrzahl auch auf „E. **Gelcich**, Die ersten Bestimmungen der Rotationsdauer der Sonne durch Beobachtung der Sonnenflecke (Z. f. M. Ph. 1889) verwiesen werden kann. Aus der neuern Zeit erwähne ich noch „Rudolf **Kysäus** (Coblenz 1817 geb.; Ass. Bonn, dann Oberlehrer in Siegen), Über die Axendrehung der Sonne. Siegen 1846 in 4., — Joseph Georg **Böhm** (Rozdialowitz in Böhmen 1807 — Prag 1868; Prof. math. Salzburg und Insbruck, dann Prof. astr. und Dir. Obs. Prag), Beobachtungen von Sonnenflecken und Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. Wien 1852 in 4., — J. **Wilsing**, Neue Bestimmung der Rotationselemente der Sonne (A. N. 2562 von 1883), — G. **Spörer**, Über die Ermittlung der Knotenlänge und Neigung bei Bestimmung der Rotationselemente der Sonne. Berlin 1884 in 8., — etc.", und vor allem „Adolf Cornelius **Petersen** (Tondern 1804 — Altona 1854; erst Obs., dann Dir. Altona), Beobachtungen von Sonnenflecken auf der Altonaer-Sternwarte (A. N. 419 von 1841)", der die Rotationselemente wesentlich in folgender Weise bestimmte: Bezeichnen d, a, l, e Deklination, Rektascension, Länge des Sonnenmittelpunktes und Schiefe der Ekliptik, ferner dd und da die Deklinations- und Rektascensionsdifferenzen des Fleckens F und der scheinbaren Sonnenmitte M, so geben 197 : 6, 13



$$db = \text{Co}\,u \cdot dd - \text{Si}\,u \cdot \text{Co}\,d \cdot da$$
$$dl = \text{Si}\,u \cdot dd + \text{Co}\,u \cdot \text{Co}\,d \cdot da \qquad 1$$

wo $\text{Si}\,u = \text{Si}\,e \cdot \text{Co}\,a \qquad \text{Tg}\,u = \text{Tg}\,e \cdot \text{Co}\,l$

ist, die Unterschiede von F und M in geocentrischer Länge und Breite, — sodann erhält man mit deren Hilfe und den aus der Figur folgenden Beziehungen

$$\text{Tg}\,\beta = \text{Tg}\,z \cdot \text{Si}\,v \qquad \lambda = l - v - 180° \qquad 2$$

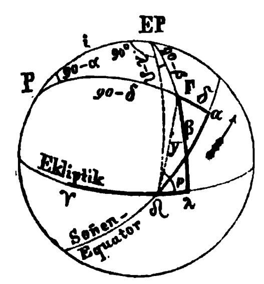
die heliocentrische Länge und Breite des Fleckens, da z und v, unter Einführung der Hilfsgrössen ϱ und w, nach den aus dem rechtwinkligen Raumdreiecke E — FBS, dem ebenen Dreiecke FES und dem rechtwinkligen Kugeldreiecke FCM folgenden Formeln

$$\text{Si}\,db = \text{Si}\,\varrho \cdot \text{Si}\,z \qquad \text{Tg}\,dl = \text{Tg}\,\varrho \cdot \text{Co}\,z \qquad \text{Si}\,\varrho : \text{Si}\,(w + \varrho) = r : R = \text{Si}\,h$$

oder $\varrho \cdot \text{Si}\,z \doteq db \qquad \varrho \cdot \text{Co}\,z \doteq dl \qquad \text{Si}\,(w + \varrho) \doteq \varrho : h \qquad 3$

und $\text{Tg}\,v = \text{Tg}\,w \cdot \text{Co}\,z$

wo h der scheinbare Halbmesser der Sonne ist, leicht berechnet werden können. Bezeichnen ferner δ die Entfernung des Fleckens vom Sonnenequator, i die Neigung dieses letztern gegen die Ekliptik und ☊ die Länge seines aufsteigenden Knotens in derselben, so erhält man aus Dreieck F · EP · P für drei Beobachtungen des Fleckens die drei Gleichungen



$$\text{Si}\,\delta = \text{Co}\,i \cdot \text{Si}\,\beta - \text{Si}\,i \cdot \text{Co}\,\beta \cdot \text{Si}\,(\lambda - ☊)$$
$$= \text{Co}\,i \cdot \text{Si}\,\beta' - \text{Si}\,i \cdot \text{Co}\,\beta' \cdot \text{Si}\,(\lambda' - ☊) \qquad 4$$
$$= \text{Co}\,i \cdot \text{Si}\,\beta'' - \text{Si}\,i \cdot \text{Co}\,\beta'' \cdot \text{Si}\,(\lambda'' - ☊)$$

und kann somit aus ihnen die Werte von δ, i, ☊

finden. Um letztere Rechnung bequem durchführen zu können, führte **Petersen** einige Hilfsgrössen durch

$$a' = \tfrac{1}{2}(\beta' + \beta) \quad a'' = \tfrac{1}{2}(\beta'' + \beta) \quad b' = \tfrac{1}{2}(\beta' - \beta) \quad b'' = \tfrac{1}{2}(\beta'' - \beta)$$
$$c' = \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda') \quad c'' = \tfrac{1}{2}(\lambda - \lambda'') \quad \mathrm{Tg}\,\zeta = F' : F''$$
$$F' \cdot \mathrm{Si}\,G' = \mathrm{Ct}\,b' \cdot \mathrm{Si}\,c' \quad F'' \cdot \mathrm{Si}\,G'' = \mathrm{Ct}\,b'' \cdot \mathrm{Si}\,c'' \quad F' \cdot \mathrm{Co}\,G' = \mathrm{Tg}\,a' \cdot \mathrm{Co}\,c' \qquad 5$$
$$F'' \cdot \mathrm{Co}\,G'' = \mathrm{Tg}\,a'' \cdot \mathrm{Co}\,c'' \quad H' = G' + \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda') \quad H'' = G'' + \tfrac{1}{2}(\lambda + \lambda'')$$

ein, und erhielt sodann aus 4'' — 4' und 4''' — 4' nach leichter Reduktion

$$\mathrm{Ct}\,i = F' \cdot \mathrm{Si}(\Omega - H') \quad \text{und} \quad \mathrm{Ct}\,i = F'' \cdot \mathrm{Si}(\Omega - H'') \qquad 6$$

sowie durch Gleichsetzung dieser beiden Werte

$$\mathrm{Ct}\left[\tfrac{1}{2}(H' + H'') - \Omega\right] = \mathrm{Tg}(45^{\circ} - \zeta) \cdot \mathrm{Ct}\,\tfrac{1}{2}(H' - H'') \qquad 7$$

so dass man Ω nach 5 und 7, und sodann i nach einer der 6 leicht berechnen kann. Da ferner aus der Figur

$$\mathrm{Tg}\,p = \mathrm{Tg}\,\beta \cdot \mathrm{Cs}(\lambda - \Omega) \quad \mathrm{Tg}\,y = \mathrm{Se}\,p \cdot \mathrm{Tg}(\lambda - \Omega)$$
$$\mathrm{Si}\,\delta = \mathrm{Si}\,y \cdot \mathrm{Si}(p - i) \quad \mathrm{Tg}\,\alpha = \mathrm{Tg}\,y \cdot \mathrm{Co}(p - i) \qquad 8$$

folgen, so kann man successive die p, y, δ, α und sodann aus der Proportion

$$T : (t'' - t) = 360^{\circ} : (\alpha'' - \alpha) \qquad 9$$

wo t und t'' die Zeiten der ersten und letzten Beobachtung bezeichnen, auch die Rotationsdauer T der Sonne berechnen. So z. B. erhielt ich in Bern und unter Benutzung des Berliner Jahrbuches

1854	durch Beobacht.		durch Rechnung nach 1—3			
	da	dd	dl	db	λ	β
VIII 9	883''	— 144''	853''	— 118''	— 107° 32',6	7° 8',1
- 14	— 12	— 12	— 7	— 15	— 38 17,8	— 0 54,1
- 19	— 856	306	— 883	5	34 13,1	0 18,1

und schliesslich nach 5—9

$p = 41^{\circ}37',3 \quad y = 169^{\circ}13',2 \quad \alpha = 171^{\circ}\ 0',3 \quad \Omega = 80^{\circ}33',3 \quad \delta = 5^{\circ}58',0$
$p'' = 179\ 35,0 \quad y'' = 46\ 20,2 \quad \alpha'' = 313\ 57,7 \quad i = 7\ 51,0 \quad T = 25^{d},182.$

527. Bestimmung der heliographischen Coordinaten bei bekannten Elementen. — Wenn einmal die Elemente T, Ω und i berechnet sind, so kann man für jeden Flecken, dessen geocentrische Lage durch Beobachtung ermittelt ist, seine heliographische Lage nach den frühern Formeln oder auch, wenn es häufig zu geschehen hat, unter Benutzung von Specialverfahren und Hilfstafeln ableiten, und dadurch ein wertvolles Material zum Studium der Vorgänge auf der Sonne gewinnen [a].

Zu 527: *a.* Zählt man die heliographischen Längen l von dem Punkte aus, in welchem der Breitenkreis des Sonnenpoles den Sonnenequator schneidet, — bezeichnet die heliographischen Breiten mit b, — und setzt $k = 90^{\circ} - \Omega$, so ist (vgl. 526 Fig. 2) $\alpha = l - 90^{\circ}$, $\delta = b$ und $\lambda - \Omega = \lambda + k - 90^{\circ}$, — somit erhält man aus Dreieck P — F — EP entsprechend 526 : 4 und 90 : 3

$$\mathrm{Si}\,b = \mathrm{Co}\,i \cdot \mathrm{Si}\,\beta + \mathrm{Si}\,i \cdot \mathrm{Co}\,\beta \cdot \mathrm{Co}(\lambda + k) \qquad 1$$
$$\mathrm{Co}\,i \cdot \mathrm{Co}(\lambda + k) = \mathrm{Si}\,i \cdot \mathrm{Tg}\,\beta + \mathrm{Si}(\lambda + k) \cdot \mathrm{Ct}\,l \qquad 2$$

folglich, wenn man vorübergehend u und w durch

$$\text{Si}\,\beta = u\cdot\text{Si}\,w \qquad \text{Co}\,\beta\cdot\text{Co}\,(\lambda+k) = u\cdot\text{Co}\,w \qquad \text{Tg}\,w = \text{Tg}\,\beta\cdot\text{Se}\,(\lambda+k) \quad 3$$

einführt, nach leichter Reduktion

$$\text{Si}\,b = \text{Si}\,\beta\cdot\text{Si}\,(w+i)\cdot\text{Cs}\,w \qquad \text{Tg}\,l = \text{Tg}\,(\lambda+k)\cdot\text{Co}\,w\cdot\text{Se}\,(w+i) \quad 4$$

$$\fallingdotseq \text{Si}\,\beta\cdot[1 + i\cdot\text{Ct}\,w\cdot\text{Si}\,1''] \qquad \fallingdotseq \text{Tg}\,(\lambda+k)\cdot[1 + i\cdot\text{Tg}\,w\cdot\text{Si}\,1''] \quad 5$$

Setzt man aber $b = \beta + n$ und $l = \lambda + k + m$, so ist

$$\text{Si}\,b \fallingdotseq \text{Si}\,\beta + n\cdot\text{Co}\,\beta\cdot\text{Si}\,1'' \qquad \text{Tg}\,l = \text{Tg}\,(\lambda+k) + m\cdot\text{Se}^2\,(\lambda+k)\cdot\text{Si}\,1'' \quad 6$$

und man erhält daher durch Vergleichung von 5 und 6 unter Benutzung von 3

$$b = \beta + n \qquad \text{wo} \qquad n \fallingdotseq i\cdot\text{Co}\,(\lambda+k) \quad 7$$

$$l = \lambda + k + m \qquad\qquad m \fallingdotseq i\cdot\text{Si}\,(\lambda+k)\cdot\text{Tg}\,\beta \quad 8$$

so dass man, wenn $k = 90^\circ - \Omega$ und i einmal bekannt sind, sei es nach den strengen Formeln 3 und 4, sei es noch bequemer (und in den meisten Fällen mit genügender Genauigkeit) nach den Näherungsformeln 7 und 8, aus den nach 526 berechneten Ekliptikcoordinaten λ und β eines beobachteten Fleckens, dessen heliocentrische Länge l und Breite b wirklich mit Leichtigkeit ableiten kann, — allfällig zur Erleichterung der Rechnung noch Hilfstafeln anwendend, wie solche namentlich in der fundamentalen Abhandlung „**Spörer**, Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam. Leipzig 1874 in 4. (Publ. 13 Astr. Ges.)" unter der Voraussetzung gegeben sind, dass $\Omega = 74^\circ$ und $i = 7^\circ$ sei, während die Rotationszeit $t = 25^d{,}234$, folglich der tägliche Rotationswinkel $\xi = 360^\circ : t = 14^\circ{,}2665 = \overline{1{,}154317}$ und die synodische Rotationszeit $\tau = 27^d{,}107$ angenommen wird. — Gewöhnlich wird schliesslich die heliographische Länge eines Fleckens auf irgend einen festen Punkt des Sonnenequators bezogen und dieser dadurch definiert, dass man die Epochen E angiebt, zu welchen derselbe mit dem bisherigen Anfangspunkte zusammenfällt, so dass die der Beobachtungszeit T entsprechende sog. **Normallänge**

$$L = l - \xi\cdot(T - E) \quad 9$$

ist. Bezeichnet nun $\odot$ die geocentrische Länge der Sonne zur Zeit T', so sind die Coordinaten der scheinbaren Sonnenmitte zu dieser Zeit nach dem Vorhergehenden

$$\lambda' = \odot - 180^\circ \qquad \beta' = 0 \qquad L' \fallingdotseq \lambda' + k - \xi\,(T' - E) \qquad b' \fallingdotseq i\cdot\text{Co}\,(\lambda' + k) \quad 10$$

und man erhält somit beispielsweise, wenn mit **Spörer** E = 1861 I 21,116 angenommen und das Berliner Jahrbuch benutzt wird, die korrespondierenden Werte

	T'	$\odot$	L'	b'
Werte	T' = 1861 I 3,0	$\odot = 283^\circ{,}14$	L' = 17°,59	b' = − 3°,09
	4,0	284,16	3,32	− 3,19
	5,0	285,18	349,05	− 3,29

Es wurde also im Verlaufe des Tages E' = 1861 I 4, an welchem **Spörer** seine regelmässigen Positionsbestimmungen begann und von welchem aus er seine Rotationsperioden zählen wollte, die Normallänge der Sonnenmitte gleich Null, wie er es wohl bei Wahl seiner E beabsichtigte, — und in ähnlicher Weise konnte er den je nahe an $E' + g\cdot\tau$ fallenden Anfang einer g^{ten} Rotationsperiode mit Hilfe der ihm zugleich für Berechnung der Normallängen dienlichen benachbarten Epoche $E + h\cdot t$ bestimmen. — Natürlich liegt in den Annahmen für E und E' etwas willkürliches, auch ist der Spörer'sche Wert von t nicht absolut sicher, und so ziehen die Engländer, während die meisten Beobachter auf dem Kontinente sich an Spörer angeschlossen haben, noch jetzt vor, ihre Rotationsperioden mit **Carrington** von 1853 XI 9 aus zu zählen und

ihren Rechnungen dessen Werte $t = 25^d,380$ und $\tau = 27^d,275$ zu Grunde zu legen, worauf ich jedoch hier nicht näher eintreten, sondern für den Detail auf „**Carrington**, Observations of the spots on the Sun from 1853 XI 9 to 1861 III 24 made at Redhill. London 1863 in 4., — **De la Rue**, Tables for reduction of Solar Observations. London 1875—78, 2 parts in 4., — und: Annibale **Riccò** (Modena 1844 geb.; früher Prof. astr. und Dir. Obs. Palermo, jetzt Catania), Tavole per trovare prontamente e senza almanacco la latitudine eliografica di un punto del bordo solare di cui sia dato l'angolo di posizione. (Mem. spettr. 1880)" verweisen will.

528. Die aus diesen Bestimmungen gewonnenen Beiträge zur Kenntnis des Fleckenphänomenes. — Als mir Freund **Carrington** im Winter 1857/8 mitteilte, dass er durch mehrjährige Positionsbestimmungen und Berechnung derselben **einerseits** gefunden habe, dass die Werte für die Rotationsdauer um so grösser ausfallen, je höhere (südliche oder nördliche) Breite die zu ihrer Bestimmung benutzten Flecken besitzen, und dass **anderseits** die noch gegen Ende 1855 fast ausschliesslich in geringer Breite vorkommenden Flecken im folgenden Jahre plötzlich durch relativ in hoher Breite erscheinende Flecken abgelöst worden seien, wie wenn eine sprungweise Verlegung der Scheiner'schen Fleckenzonen stattgehabt hätte, mich dabei um meine Meinung über letztern Vorgang befragend, antwortete ich ihm sofort, dass da kaum ein Sprung, sondern eine wohl bei jedem Minimum eintretende Folge davon vorliege, dass die alten Fleckenzüge jeweilen in der Nähe des Equators erlöschen und sodann durch von den Polen herkommende neue Fleckenzüge ersetzt werden [a]. Ich glaubte damals diesen Thatbeständen auch entnehmen zu dürfen, dass der neue, sich wohl aus einer gewissen Tiefe erhebende Fleckenzug nur nach und nach bei seiner Wanderung gegen den Equator hin die volle Oberflächengeschwindigkeit annehme, somit die wahre Rotationsdauer der Sonne nur aus Flecken von geringer Breite erhalten werde, womit allerdings mehrere aus terrestrischen Reihen abgeleitete Werte nicht besonders zu harmonieren schienen, — muss jedoch bekennen, dass diese Ansichten infolge neuer Beobachtungsresultate, unter denen namentlich die durch **Dunèr** erhaltenen von grosser Wichtigkeit sind, bedeutende Modifikationen erfahren dürften [b]. Wie dem aber sei, so liegt es auf der Hand, dass diese Verhältnisse für unsere Kenntnis der Sonne von ganz hervorragender Wichtigkeit sind, und es haben sich daher **Spörer** und seine Mitarbeiter dadurch ein hohes Verdienst erworben, dass sie dieselben durch langjährige Beobachtungen und Studien genauer festgelegt, sowie zugleich die schon früher vermuteten Eigenbewegungen der Flecken definitiv nachgewiesen haben [c].

Zu 528: *a.* Schon 1798 II 4 schrieb **Olbers** (vgl. Geogr. Eph. I) unter anderm an Zach: „Die eigentliche Beobachtung der Sonnenflecken wird zu sehr versäumt, und eben deswegen kennen wir die Rotationszeit der Sonne und die Lage des Sonnenequators noch nicht sehr zuverlässig; auch müssen es Beobachtungen mit Gewissheit ausmachen, **ob die Flecken bloss der Rotation der Sonne folgen, oder noch eine eigene Bewegung, eine Veränderung auf der Sonne selbst haben,** — eine wichtige Frage, deren Beantwortung zwischen den verschiedenen Hypothesen über die Natur der Flecken entscheiden muss"; aber die meisten Astronomen fanden es bequemer, der Ansicht von **Delambre** beizupflichten, der bei Besprechung des Rotationsproblemes (vgl. Astr. III 59) die unqualifizierbare Bemerkung machte „Il est plus curieux qu'utile; il est du nombre de ceux auxquels on ne doit songer qu'une fois dans la vie", — ja ich weiss aus der ersten Hälfte unsers Jahrhunderts nur J. G. **Böhm,** Ernest **Laugier** (Paris 1812 — ebenda 1872; Obs. und Akad. Paris) und Christian Heinrich **Peters** (Coldenbüttel bei Flensburg 1813 — New-York 1890; erst Trigonometer und Geniekapitän auf Sicilien, dann Dir. Obs. zu Clinton bei New-York) zu nennen, welche eine ehrenvolle Ausnahme machten. Da aber der Erstere, weil er seine die Jahre 1833—36 beschlagenden Bestimmungen, obschon er sie (vgl. 526 : a) bis 1852 zurückbehielt, nicht übersichtlich ordnete, ihr Hauptergebnis übersah, — das von 1841 datierende Mémoire des Zweiten, welches auf die Verschiedenheit der aus Flecken verschiedener Deklination erhaltenen Rotationsdauer hinwies, nur durch eine kurze und offenbar nicht weiter beachtete Notiz (vgl. Compt. rend. 1841 XII) angekündigt und gar nie abgedruckt wurde, — und die den „Contributions to the Atmospherology of the Sun (Proc. Amer. Assoc. 1855)" des Dritten zu Grunde liegenden Beobachtungen aus den Jahren 1845—46 stammten, also die bereits vollzogene Zonenverschiebung gar nicht konstatieren konnten, so blieb es **Carrington** vorbehalten, die erwähnten wichtigen Entdeckungen zu machen und in seinem kapitalen Werke von 1863 (vgl. 527 : a) zu publizieren. Die auf den Beobachtungen des letztern beruhende Tafel:

Sonnen-Rotationen	Nördliche Flecken: Anzahl in Breite 0–10	11–20	21–30	31–40	Mittl. Breite	Südliche Flecken: Anzahl in Breite 0–10	11–20	21–30	31–40	Mittl. Breite
1854 1–6	19	16	0	0	10°,5	16	8	0	0	8°,7
1854 7–13	14	15	0	0	10,7	17	6	0	0	8,5
1855 14–20	16	4	0	0	8,4	13	5	0	0	7,8
1855 21–27	11	1	0	0	6,5	7	4	0	0	9,2
1856 28–34	10	5	0	0	8,7	2	1	2	1	20,3
1856 35–40	1	0	0	3	25,5	1	0	16	4	26,4
1857 41–47	4	0	14	2	21,0	0	0	29	11	28,4
1857 48–53	8	13	47	5	22,0	0	26	40	2	22,0
1858 : 54–60	5	47	34	5	20,3	2	60	67	9	21,7

illustrierte in schönster Weise, wie die Flecken **vor** dem Minimum von 1856 eine kleine, **nach** demselben plötzlich eine grosse, dann aber langsam wieder abnehmende Breite besassen, und die von **Carrington** für den täglichen

Rotationswinkel aufgestellte Formel

$$\xi = 865' - 165' \cdot Si^{7/4} b = 14^0,42 - 2^0,75 \cdot Si^{7/4} b \qquad 1$$

wo b die absolute Breite des Fleckens bezeichnet, gab dem von ihm nachgewiesenen eigentümlichen Breiten-Gesetze einen passenden, wenn auch allerdings nur empirisch begründeten Ausdruck, ist jedoch seither durch die von **Faye** und **Spörer** aufgestellten Formeln

$$\xi = 14^0,37 - 3^0,10 \cdot Si^2 b \quad \text{und} \quad \xi = 8^0,60 + 5^0,52 \cdot Co\, b - 0^0,76 \cdot Si\, b \qquad 2$$

so ziemlich verdrängt worden. — Als ich infolge der bereits erwähnten ersten Mitteilungen, welche ich durch Carrington brieflich erhielt, **einerseits** die Bestimmungen Böhms nach den Jahren ordnete, fand ich (vgl. Litt. 182 von 1859), dass

in den Jahren	1833	1834	1835	1836
die mittlern Breiten	9⁰,9	25⁰,0	22⁰,6	16⁰,7

betrugen, also sich zur Zeit des Minimums von 1833/34 genau dieselben Verhältnisse wie bei demjenigen von 1855/56 gezeigt hatten, — und als ich **anderseits** (vgl. Mitth. X von 1859 und H. d. M. II 309) 20 Rotationsbestimmungen, welche sich auf Fleckenbeobachtungen der verschiedenen Jahrhunderte seit Entdeckung der Sonnenflecken gründeten und im Mittel

$$T = 25^d,342 \pm 0^d,243$$

ergaben, mit Hilfe meiner Epochentafel ordnete, erhielt ich aus Flecken

nach Min.	T = 25,599 ±	0,068
bei Max.	302	51
vor Min.	107	68

so dass es mir gelungen war, gegenüber Carrington das Analoge wie früher gegenüber Schwabe zu leisten. Für die Versuche theoretischer Begründung vgl. z. B. „J. **Wilsing**, Über das Rotationsgesetz der Sonne und die Periodicität der Sonnenflecke (A. N. 3039 von 1891)". — *b.* Da aus 2' für b = 0

$$\xi = 14^0,37 \quad \text{also} \quad T = 25^d,052 \quad \text{und} \quad \tau = 26^d,897$$

folgen, so hatte ich nach meinen Ansichten anzunehmen, dass diese Werte der wirklichen Rotation des Sonnenkörpers entsprechen. Nun erhielt aber, nachdem (vgl. Pogg. Ann. 58 von 1843) schon Joh. Jakob **Nervander** (Nystad in Finnland 1805 — Helsingfors 1848; Prof. phys. Helsingfors) den Versuch gemacht hatte, die Rotationsdauer der Sonne aus Temperaturreihen zu ermitteln, der unermüdliche **Buijs-Ballot** aus verschiedenen langen Serien (vgl. seine Schrift „Les changements périodiques de température. Utrecht 1847 in 4.", sowie Pogg. Ann. 66 von 1845, 68 von 1846, etc.) eine übereinstimmende Temperaturperiode von $27^d,682$, welche eine Sonnenrotation $T = 25^d,732$, folglich einen Rotationswinkel $\xi = 14^0,00$ bedingen würde, und ein solcher ergiebt sich nach 2 erst für $b = \pm 20^0,2$, also gerade für Flecken von relativ hoher Breite. Umgekehrt fand dann allerdings **Hornstein** (vgl. seine Note „Über die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne" in Wien. Sitz. 1871) in verschiedenen magnetischen Reihen eine Periode von $26^d,33$, und wenn man diese als einen Wert von τ betrachtet, so wird $T = 24^d,55$, so dass im Mittel aus diesem und dem Buijs-Ballot'schen Werte T = 25,14 hervorgeht, was mit den Bestimmungen aus Flecken niedriger Breite gut übereinstimmt. Für weitere Untersuchungen dieser Art auf die Abhandlungen „J. A. **Broun**, On the 26-day period of the earth's magnetic force (Proc. Roy. Soc. 1872; vgl. Compt. rend. 76 von 1873), — C. **Hornstein**, Über die Abhängigkeit der täg-

lichen Variation des Barometerstandes von der Rotation der Sonne (Wien. Sitz. 1873), — P. A. **Müller**, Die Dauer der Sonnenrotation nach den Störungen der erdmagnetischen Elemente in Pawlowsk (Mélanges XII von 1886), — J. **Liznar**, Über die 26tägige Periode der täglichen Schwankung der erdmagnetischen Elemente (Wien. Sitz. von 1886/7), — Johannes **Unterweger** (Kleinkirchheim in Kärnthen 1845 geb.; Bürgerschullehrer zu Judenburg in Steiermark), Über die kleinen Perioden der Sonnenflecken und ihre Beziehung zu einigen periodischen Erscheinungen der Erde. Wien 1891 in 4., und: Über die Beziehungen der Kometen und Meteorströme zu den Erscheinungen der Sonne. Wien 1892 in 4., — etc." verweisend, habe ich dagegen beizufügen, dass J. **Wilsing** in seiner „Ableitung der Rotationsbewegung der Sonne aus Positionsbestimmungen von Fackeln (A. N. 2852 von 1888)" zu dem Schlusse gelangte, dass im Gegensatze zu den von der heliocentrischen Breite abhängigen Winkelgeschwindigkeiten der Flecken „die Schichten, welchen die Fackeln angehören, keine solche Abhängigkeit zeigen", sondern alle Fackeln innerhalb der durch die Unsicherheit der Bestimmung bedingten Grenzen $\xi = 14^{\circ},270$ und somit $T = 25^{d},228$ ergeben, und zum Schlusse noch die wichtigen Ergebnisse zu berühren, welche sich mit Hilfe der Spektroskopie ergeben haben: Wie bereits früher (286) erwähnt wurde, dachte nämlich schon Joh. Karl Friedrich **Zöllner** (Berlin 1834 — Leipzig 1882; Prof. phys. Leipzig) daran, die Rotationsdauer der Sonne nach dem Doppler'schen Principe durch spektroskopische Beobachtung der beiden Sonnenränder unabhängig von den Flecken zu bestimmen, und es erhielt dann auch H. C. **Vogel** wirklich auf solche Weise wiederholt Werte, welche mit den nach alter Methode gefundenen gut übereinstimmten. Seither beschäftigten sich namentlich Henry **Crew** (Richmond Ohio U. S. 1859 geb.; Prof. phys. Haverford) und Nils Christopher **Dunér** (Billeberga in Schonen 1839 geb.; früher Prof. und Obs. Lund, jetzt Prof. und Dir. Upsala) damit, die Geschwindigkeit der Oberflächenteilchen der Sonne in verschiedenen heliographischen Breiten nach der in 614 näher auseinandergesetzten Methode zu ermitteln; aber während sich ersterm (vgl. seine Note „On the period of rotation of the Sun" in den Haverford Studies von 1889) nur Ungleichheiten ergaben, welche sich (wie oben bei Wilsing) durch die Unsicherheiten so ziemlich deckten, erhielt letzterer (vgl. seine Note „Sur la rotation du Soleil" in Öfv. Vet. Akad. Förh. 1890 und A. N. 2968 von 1890, sowie seine „Recherches sur la rotation du Soleil. Upsal 1891 in 4.") das höchst unerwartete Resultat, dass das Carrington'sche Breitengesetz auch für die Sonnenoberfläche bestehe, indem er aus 635 in den Jahren 1887—89 angestellten Messungen unter den Breiten b die in dem Täfelchen

b	v	$\xi \cdot \text{Co}\, b$	$\xi' \cdot \text{Co}\, b$	ξ	T
0°,4	1,98	14°,14	14°,37	14°,14	25d,46
15,0	1,85	13,19	13,68	13,66	26,35
30,0	1,58	11,31	11,77	13,06	27,57
45,0	1,19	8,48	9,07	11,99	30,03
60,0	9,74	5,31	6,02	10,62	33,90
74,8	0,34	2,45	3,01	9,34	38,54

verzeichneten, in Kilometern ausgedrückten Geschwindigkeiten v fand, aus welchen sich mit Hilfe der Beziehungen

$$2\, r \cdot \text{Co}\, b \cdot \pi = v \cdot T \cdot 86400 \qquad T \cdot \xi = 360^{\circ} \qquad 3$$

wo $r = 687895^{km}$ den Sonnenradius bezeichnet, die Werte von $\xi \cdot \text{Co}\, b$, ξ und T ergeben, während die $\xi' \cdot \text{Co}\, b$ von Faye nach 2' berechnet wurden. Es ist durch dieses Ergebnis offenbar wieder ein wichtiger und die frühern Ansichten wesentlich modifizierender, aber auch komplizierender Baustein für eine dereinstige **Heliologie** gewonnen worden. — *c.* Wie bereits oben (527) angemerkt wurde, begann **Spörer** 1861 im Anschlusse an die Carrington'sche Reihe regelmässige und bis auf die neueste Zeit fortgeführte Positionsbestimmungen, zur Ergänzung seiner eigenen einzelne der von E. **Heis** und N. **v. Konkoly** gemachten Aufnahmen benutzend, sowie die seit 1879 von Alfred **Wolfer** (Schönenberg bei Zürich 1854 geb.; Prof. astr. und Obs. Zürich) angelegten und sehr detaillierten, grossenteils in meinen Mitteilungen publizierten Parallelreihen. Wenn nun auch Arbeiten solcher Art ihre Hauptfrüchte erst nach langen Jahren zeitigen können, so ist immerhin durch dieselben bereits nicht nur erwiesen worden, dass sich die Carrington'schen Gesetze auch bei den seit ihrer Entdeckung verflossenen drei Fleckenperioden vollständig bewährt haben, sondern es ist auch **Spörer** gelungen, die in unsere VIII[d] aufgenommene Tafel aufzustellen, welche für 10 Abschnitte A—K der Fleckenperiode die mittlern Häufigkeitszahlen nach Zonen von je 5° heliographischer Breite und damit (wie das von ihm 1888 in meiner Mitth. 71 gegebene Beispiel zeigt) eine wertvolle Grundlage für gewisse kritische Untersuchungen giebt. Anschliessend verweise ich auf seine Abhandlung „Über die Periodicität der Sonnenflecken seit dem Jahre 1618, vornehmlich in Bezug auf die heliographische Breite derselben, und Nachweis einer erheblichen Störung dieser Periodicität während eines langen Zeitraumes. Halle 1889 in 4. (Nova Acta Soc. Nat. Cur. 43)" und meine Besprechung, sowie teilweise Widerlegung jenes Nachweises in Mitth. 73 von 1889, — auf seine frühern Arbeiten „Beobachtungen von Sonnenflecken. Anclam 1862 in 4., — Die Stürme auf der Sonne. Anclam 1863 in 4., — und: Zusammenstellung der aus mehrjährigen Beobachtungen gewonnenen Resultate. Anclam 1868 in 4.", — auf die Studien von **Faye** über die Eigenbewegungen der Flecken (vgl. Compt. rend. 1865 u. f., auch A. N. 1717 von 1868), — auf die 1874—78 von Henri-Joseph **Perrotin** (St-Loup in Tarn-et-Garonne 1845 geb.; damals Obs. Toulouse, jetzt Dir. Nizza) gemachten „Observations des taches du Soleil (Annales de Toulouse I von 1880)", — etc.

529. Die Bestimmung der Sonnentemperatur und die Erhaltung der Wärme und Leuchtkraft. — Dass es für die Kenntnis der Beschaffenheit der Sonne und die Erklärung der Vorgänge auf derselben von hoher Wichtigkeit wäre, über die herrschenden Temperaturverhältnisse im klaren zu sein, ist wohl selbstverständlich; aber leider steht dies noch in weitem Felde, da selbst die in neuerer Zeit für die Sonnentemperatur erhaltenen Zahlen nur darin übereinstimmen, dass dieselbe zwischen 0 und ∞ liege, und die Annahme von Wilh. **Siemens**, dass sie kaum 3000° C. erreichen, ja diejenige eines starken elektrischen Bogenlichtes nicht viel übersteigen werde, zwar viel für sich hat, aber doch nicht erwiesen ist[a]. Aus diesem Grunde müssen wir uns auch einstweilen in Beziehung auf den Haushalt der Sonne mit der gut konstatierten

Thatsache begnügen, dass seit Jahrtausenden weder ihre scheinbare Grösse, noch ihre Abgabe von Wärme und Licht eine für uns bemerkbare Veränderung erlitten haben [b].

Zu 529: *a.* Die Sonnentemperatur wird aus relativ kleinen Wirkungen, welche auf der Erde beobachtbar sind, unter der Annahme berechnet, dass gewisse im Laboratorium aufgefundene physikalische Gesetze sich auch ohne weiteres auf ganz unbekannte, jedoch mutmasslich sehr verschiedene Verhältnisse übertragen lassen. So konstruierte z. B. **Secchi** einen in jeder seiner beiden Abteilungen ein Thermometer enthaltenden Doppelcylinder, dessen innerer Raum mit einer Flüssigkeit gefüllt war, — liess in letztere durch ein Diaphragma Sonnenstrahlen eintreten, — und wartete nun ab, bis der Überschuss der Angabe (t) des von der Sonne beschienenen Thermometers über die Erwärmung (θ) der Umhüllung einen konstanten Wert angenommen hatte; er erhielt so in Rom bei 52^m Meereshöhe einen Überschuss $t - \theta = 14^\circ,0$, während Jacques-Louis **Soret** (Genf 1827 — ebenda 1890; Prof. phys. Genf) mit ähnlichem Apparate 1867 in Genf bei 400^m diese Differenz gleich $15^\circ,5$ und am Montblanc in Höhen von 2500 und 4800^m gleich $18^\circ,6$ und $21^\circ,1$, und J. J. **Waterston** in Indien bei einer Sonnenhöhe von 70° dieselbe sogar gleich $27^\circ,8$ fand. Dass nun **Secchi** schliesslich annahm, diese Sonnenkonstante möchte ohne die atmosphärische Absorption bei $29^\circ,0$ betragen, war ganz gerechtfertigt; aber je nachdem man zur Bestimmung der Sonnentemperatur T diese Differenz mit **Secchi** in die dem Newton'schen Strahlungsgesetze entsprechende Formel

$$T = \alpha \cdot (t - \theta) \qquad 1$$

wo α das Verhältnis der Oberfläche einer Kugel zur Projektion der Sonne auf dieselbe, also (den scheinbaren Sonnendurchmesser zu $\varphi = 31' \, 13'',6$ angenommen) etwa die Zahl $4 \, Cs^2 \, {}^1/_2 \, \varphi = 196000$ bezeichnet, — oder mit **Vicaire**, unter Berücksichtigung der nach Dulong und Petit für hohe Temperaturen geltenden Gesetze, in die Formel

$$a^T = \alpha \cdot (a^t - a^\theta) \qquad 2$$

wo $a = 1,0077$ ist und (da nach den Versuchen von Secchi die Konstante von dem Werte von θ unabhängig ist) $\theta = 0$, folglich $t = 29$ angenommen werden kann, einführt, so erhält man die nicht ganz übereinstimmenden Werte

$$T' = 5684000^\circ \text{ C.} \qquad \text{und} \qquad T'' = 1398^\circ \text{ C.}$$

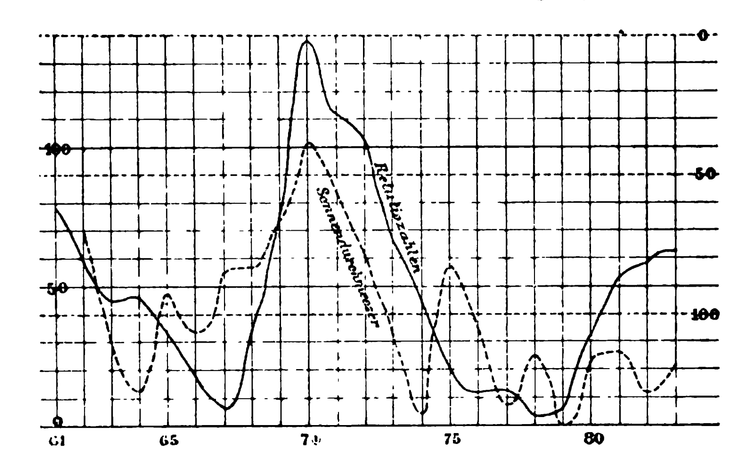
und kann sich nur sagen, dass der wahre Wert zwischen diesen beiden Rechnungsergebnissen liegen werde, indem T' sicher viel zu gross ist, da nicht nur bei einer solchen Temperatur kaum Gebilde von längerer Dauer auf der Sonne existieren könnten, sondern sogar die Sonne nach den Versuchen von Fél. **Lucas** (Compt. rend. 1885 VI 8) mutmasslich gar nicht mehr leuchten würde, — aber auch T'' bedeutend zu klein, da diese Zahl nicht einmal die Schmelztemperatur des Platin erreicht. — Die erwähnte Annahme von **Siemens** befriedigt mich am besten, doch könnte ich mich am Ende auch einverstanden erklären mit Herm. **Schultz** (vgl. seine Noten „Zur Sonnenphysik“ in A. N. 2817 u. f. von 1887—88 und in Exners Rep. d. Phys.) für die Temperatur der Photosphäre auf höchstens 7000 und für diejenige des Sonnenkernes auf höchstens 10000° C. zu gehen. — Für weitern Detail verweise ich auf die Schriften: „**Pouillet**, Sur la chaleur du Soleil (Compt. rend. 1838), — **Secchi**, Sulle macchie e sulla temperatura del Sole (Mem. Oss. 1852—55; vgl. auch Compt. rend.), — **Zöllner**, Über die Temperatur und physische Beschaffenheit der

Sonne (Leipz. Ber. 1870, etc.), — **Hirn**, Mémoire sur les propriétés optiques de la flamme des corps en combustion et sur la température du Soleil. Paris 1873 in 8., und: Exposé d'un moyen de déterminer la température des parties du Soleil inférieures à la photosphère. Paris 1885 in 8., — Jules **Violle** (Langres 1841 geb.; Prof. phys. Paris), Sur la température du Soleil (Compt. rend. 1874 und später), sowie: Rapport sur la question de la radiation. Utrecht 1879 in fol., — Samuel P. **Langley** (Boston 1834 geb.; Sekr. Smiths. Inst. Washington), Differential measurements of solar temperature (Amer. Proc. 1874), und: On the temperature of the Sun (Boston Proc. 1879), — E. **Vicaire**, Sur la température de la surface solaire (Compt. rend. 1874), — L. **Soret**, Sur la radiation solaire (Compt. rend. 1868), und: Sur la température du Soleil (Bibl. univ. Arch. 1875/6), — A. **Crova**, Mesure de l'intensité calorifique des radiations solaires et de leur absorption par l'atmosphère terrestre (Mém. Montpellier IX von 1879), — Raoul **Pictet** (Genf 1842 geb.; Phys. Berlin), Revue des dernières recherches faites sur la radiation solaire et la mesure de la température du Soleil (Bibl. univ. Arch. 1879), — P. **Desains**, Rapport sur lé prix Bordin: Recherches par de nouvelles expériences calorimétriques, et par la discussion des observations antérieures, quelle est la véritable température à la surface du Soleil (Compt. rend. 1877), — Karl **Remeis** (Bamberg 1837 — ebenda 1882; Assessor in Bamberg und Stifter des Obs. daselbst), Die Strahlung und die Temperatur der Sonne. Köln 1881 in 8., — J. **Maurer**, Zur Theorie der atmosphärischen Absorption der Sonnenstrahlung (Schweiz. met. Beob. von 1881), — Oskar **Frölich** (Bern 1843 geb.; Oberelektriker bei Siemens und Halske in Berlin), Messungen der Sonnenwärme (Ann. Ph. u. Ch. 1884), — H. **Le Chatelier**, Sur la température du Soleil (Compt. rend. 1892), — etc." — *b.* Da ich kein Freund von gewagten Hypothesen und darauf gegründeten Rechnungen bin, so verzichte ich darauf, hierüber näher einzutreten — füge nur bei, dass sich **Leverrier** wohl mit Recht über diejenigen lustig machte, welche zur Erhaltung der Energie der Sonne annehmen wollten „que le Soleil déjeune et dîne des astéroïdes", — und erlaube mir schliesslich, noch daran zu erinnern, dass Oswald **Heer** (Nieder-Utzwyl bei St. Gallen 1809 — Zürich 1883; Prof. bot. Zürich) den sichern Beweis erbracht hat, dass die klimatischen Verhältnisse auf der Erde sich in der historischen Zeit nicht erheblich verändert haben können, — für alles weitere auf das früher (300) Gesagte verweisend.

530. Die Veränderlichkeit des Sonnendurchmessers. — Ganz abgesehen von einer allfälligen sekulären Verminderung des Sonnendurchmessers ist in der neuern Zeit die Frage ventiliert worden, ob eine der Fleckenperiode entsprechende periodische Veränderung desselben, wie dies namentlich durch P. **Rosa** zu erweisen versucht wurde, wirklich statt habe, und wenn auch A. **Auwers** durch eingehende Untersuchungen zeigte, dass sich die in den verschiedenen Beobachtungsreihen vorhandenen Schwankungen im allgemeinen durch Beobachtungsfehler und besondere Verhältnisse ebenfalls erklären lassen, so scheint mir dennoch, dass die Frage gegenwärtig noch nicht endgiltig entschieden sein dürfte [a].

Zu 530: *a.* Die Frage, ob der Sonnendurchmesser periodischen Veränderungen unterliege, wurde namentlich durch **Secchi** und seinen Adjunkten

Paolo **Rosa** (Castellana 1825 — Rom 1874; Jesuit; vgl. Marchetti in Bonc. Bull. 1875) in einer Reihe von Publikationen behandelt, welche mit des erstern Note „Sulle variazioni del diametro solare (Mem. spettr. 1872)“ begann, mit des letztern grösserm Werke „Studii intorno ai diametri solari. Roma 1874 in 4.“ abschloss, und den Satz zu begründen schien, „dass zu denjenigen Zeiten, zu welchen die Zahl der Flecken und Protuberanzen geringer sei, grössere Durchmesser gefunden werden“. Es entspann sich nun hierüber alsbald eine sehr lebhafte Diskussion, an welcher sich die Lorenzo **Respighi** (Cortemaggiore bei Piacenza 1824 — Rom 1889; successive Prof. astr. und Dir. Obs. Bologna und Rom; vgl. Atti dei Lincei 1873—75), August **Wagner** (Nerft in Kurland 1828 — Pulkowa 1886; Vice-Dir. Pulkowa; vgl. Astr. Viert. 8 von 1873), Arthur **Auwers** (Göttingen 1838 geb.; früher Obs. Königsberg, jetzt Akad. Berlin; vgl. Berl. Monatsb. 1873), — Aug. **Fuhg** (vgl. seine Dissertation „De Solis diametro. Berolini 1875 in 8.“), — etc. beteiligten, und in welcher namentlich hervorgehoben wurde, dass der Einfluss des Zustandes der Bilder, sowie der schon von Jean-Jacques-Emile **Goujon** (Paris 1823 — ebenda 1856; Obs. Paris) in seiner Note „Sur la détermination du diamètre du Soleil par les observations faites à la lunette méridienne (Compt. rend. 1853)“ bei solchen Bestimmungen nachgewiesenen Personaldifferenzen ein zu grosser sein dürfte, um aus den erhaltenen kleinen Variationen sichere Schlüsse ziehen zu können. Auch ich nahm an den Verhandlungen insofern Teil, als ich (Mitth. 34 von 1873) eine schon Anfang der Sechzigerjahre begonnene und nunmehr vervollständigte Studie über die durch **Maskelyne** von 1765—1800 erhaltene Serie von Sonnenradien veröffentlichte, deren Ergebnis zu Gunsten von Secchi-Rosa sprach, wenn auch nicht entschieden genug, um die Zweifler überzeugen zu können, — ja die ganze Sache schien damals mit der durch K. **Remeis** verfassten historischen Übersicht „Die Frage der Veränderlichkeit des Sonnendurchmessers (Sirius 1879)“ für längere Zeit abgeschlossen und so ziemlich in den Sand verlaufen zu sein. Als mir jedoch 1884 J. **Hilfiker** die Monat- und Jahresmittel der Sonnenradien zur Verfügung stellte, welche er aus 3468 in den Jahren 1862—83 am Meridiankreise der Neuenburger Sternwarte beobachteten Sonnendurchgängen einheitlich abgeleitet hatte, sah ich sofort, dass diese das grosse Sonnenfleckenmaximum von 1870 überspannende Reihe ein zu entschiedenes Votum zu Gunsten des Secchi-Rosa'schen Gesetzes abgebe, um durch Zufällig-



keiten und Personalfehler entkräftet werden zu können. Für die Zahlenreihe selbst auf das Bull. Neuch. von 1884 und meine Mitth. 61 von 1884 verweisend, reproduziere ich vorstehend nur die damals von mir entworfene graphische Darstellung, in welcher die Abscissen den Jahren 1861—83 entsprechen, die aufsteigende Scale links zum Auftrage meiner Relativzahlen, und die absteigende Scale rechts zum Auftrage der Tausendstels-Zeitsekunden diente, um welche der für das betreffende Jahr berechnete mittlere Radius über $1^m\ 4^s$ hinausging: Sie spricht so klar, dass es kaum nötig sein dürfte, noch etwas beizufügen; dagegen mag noch erwähnt werden, dass die Radien auch eine jährliche Periode andeuten, welche von derjenigen der Temperatur wesentlich verschieden ist, dagegen so auffallende Ähnlichkeit mit dem Jahresgange der Deklinationsvariation besitzt, dass wohl auch da mehr als ein sog. Zufall vorhanden sein dürfte. — Die erwähnten neuen Veröffentlichungen veranlassten auch **Auwers**, seine frühere Studie noch weiter auszudehnen und seine „Neuen Untersuchungen über den Durchmesser der Sonne (Berl. Sitz. 1886—87)“ sind von hohem Interesse; aber wenn sie ihn auch wesentlich wieder zu negativen Resultaten führten und namentlich zeigten, dass die persönlichen Fehler eine grosse Unsicherheit in Serien solcher Art einführen, so ist es denn doch wohl keinem Zufalle zuzuschreiben, dass auch er zugeben muss, es zeige die Maskelyne'sche Reihe von 1783—90 (also bei ausserordentlicher Fleckenhäufigkeit) „unzweideutig“ eine Abnahme, von 1791—1810 (also bei seltener Fleckenarmut) eine Zunahme des Sonnendurchmessers, — und dass von seinen drei Gruppen 1851—1861 (ein schwächeres Maximum umfassend), 1862—1872 (das in der Figur dargestellte ungewöhnliche Fleckenmaximum involvierend) und 1873—1883 (in welcher Fleckenarmut vorherrschte, so dass sie für die grösstenteils auf sie fallende, 1887 in den Rendiconti dei Lincei besprochene, neue Versuchsreihe Respighis möglichst ungünstig war) „nur die mittlere“ etwas entschieden „für einen Zusammenhang der Durchmesser mit dem Fleckenstande“ spricht, zeugt nicht gegen, sondern eher für denselben. Um eine kleine systematische, nur wenig über die Unsicherheiten der Bestimmungen hinausreichende Ungleichheit nachzuweisen, soll man sie immer an **einzelnen bevorzugten Stellen** aufsuchen, wie in unserm Falle eine solche in der (überdies nur von zwei Beobachtern erstellten) Neuenburger Reihe für 1864—73 vorhanden war, — aus der in jeder Richtung ungünstigern Fortsetzung jener Reihe von 1874 bis 1883, ja sogar aus dem Zusammenlegen beider Abschnitte, hätte man auch kein bemerkenswertes Resultat erhalten.

531. Die Sonnenphotographien. — Schon 1854 hatte John **Herschel** den Wunsch geäussert, es möchte die Sonne zur genauern Verfolgung der Bildung, Bewegung und Umgestaltung der Flecken regelmässig photographiert werden, und es wurde demselben alsbald mehrfach Folge geleistet [a]; aber die neuere Zeit ist noch weiter gegangen, indem die Photographie jetzt nicht mehr bloss zur Fixirung des bereits Gesehenen dient, sondern, namentlich durch **Janssen**, dazu gebracht worden ist, uns Gegenstände und Verhältnisse, wie z. B. die an einen flockigen Niederschlag erinnernde merkwürdige **Granulation** der Sonnenoberfläche, zur Anschauung zu bringen, welche uns früher verborgen waren [b].

Zu 531: *a.* Von den bald nach Erfindung der Photographie mit schönstem Erfolge gemachten Versuchen, dieselbe auch zur Darstellung der Sonne und ihrer Flecken zu benutzen, ist schon früher (145) die Rede gewesen, und es bleibt hier namentlich nachzutragen, dass schon 1857 Warren **Delarue** (Guernsey 1815 — London 1889; reicher Papierfabrikant in London, der sich durch eigene Arbeiten und Munificenz grosse Verdienste um die Astronomie erwarb) in Kew einen Photoheliographen aufstellte, mit welchem sodann von 1862—72 regelmässig gearbeitet wurde, so dass an 1721 Beobachtungstagen eine Serie von 2778 Sonnenphotographien erhalten wurde, deren Resultate zum Teil in der Publikation „Warren **Delarue**, Balfour **Stewart** und Benjamin **Loewy**: Researches on Solar Physics (Ph. Tr. 1865—70)" niedergelegt sind. Seither funktioniert dieser Apparat in Greenwich, und überdies sind viele Sternwarten und astrophysikalische Institute, wie z. B. die in Cambridge U. S., Meudon, Potsdam, etc., mit ähnlichen Instrumenten ausgerüstet worden, so dass jetzt selten mehr ein Tag vergeht, an welchem nicht wenigstens an Einem Punkte der Erde ein Sonnenbild erhalten werden kann, ohne dass jedoch dadurch die bisherigen Zählungen und Positionsbestimmungen überflüssig werden. — *b.* Es unterliegt kaum einem Zweifel, dass diese neue Anwendung uns in absehbarer Zeit noch viele andere wichtige Aufschlüsse bringen und den Ausspruch von **Janssen** „que la plaque photographique sera bientôt la véritable rétine du savant" in schönster Weise illustrieren wird.

532. Die Analyse des Sonnenlichtes. — Es ist schon früher (138) davon gesprochen worden, wie **Newton** das Sonnenlicht mit Hilfe eines Prismas analysierte und (147) in welch' wirksamer Weise zu Anfang unsers Jahrhunderts die **Wollaston** und **Fraunhofer** diese Untersuchungen mit Hilfe des Spektroskopes weiter auszudehnen begannen, und es bleibt somit hier nur noch einerseits kurz zu erwähnen, was zur Zeit **Arago** mit seinem Polariskope erreichte [a], und anderseits einige specielle Ergebnisse der neuern Spektroskopie nachzutragen, welche für gegenwärtigen Abschnitt von besonderm Werte sind [b].

Zu 532: *a.* Durch die Entdeckung der sog. chromatischen Polarisation in den Stand gesetzt, das natürliche Licht von dem ganz oder teilweise polarisierten mittelst des Kontrastes komplementärer Farben auf den ersten Blick zu unterscheiden, machte **Arago** Versuche mit weissglühenden Kugeln, geschmolzenen Metallen und Leuchtgasflammen, und fand dabei, dass sowohl glühende feste als flüssige Körper bei schief einfallendem Lichte beständig polarisiertes Licht aussenden, — Flammen oder mit festen glühenden Partikelchen durchzogene Gase dagegen immer nur natürliches Licht, da das durch sie nach allen Richtungen geworfene polarisierte Licht als resultierendes nur natürliches geben kann. Da nun sein **Polariskop**, — eine fernrohrartige Vorrichtung von 25^{mm} Öffnung auf 25^{cm} Länge, bei welcher das Objektiv durch eine etwa 12^{mm} dicke, senkrecht zu den Kanten des sechsseitigen Prismas geschnittene Bergkrystallplatte, das Okular aber durch einen etwa 15^{mm} dicken Doppelspath ersetzt war, — bei direktem Sehen nach der Sonne zwei weisse Bilder gab, dagegen zwei komplementärfarbige, wenn er die Sonne in einem Spiegel betrachtete, so waren also die bei direktem Sehen erhaltenen Strahlen

noch nicht polarisiert, obschon die vom Sonnenrande kommenden unter ganz kleinen Winkeln emanierten, — also muss die Photosphäre gasförmig sein und somit, entsprechend der schon von **Wilson** ausgesprochenen Idee, am besten einem leuchtenden Nebel verglichen werden. — *b.* Die Spektroskopie hat das von Arago erhaltene Resultat vollkommen bestätigt, indem sie, wie wir bereits (147) gesehen haben, das Sonnenspektrum als ein Absorptionsspektrum qualifiziert hat, und überdies hat sie, wie (l. c.) ebenfalls schon mitgeteilt wurde, wenigstens bis zu einem gewissen Grade die auf der Sonne vorhandenen Stoffe ausfindig gemacht. Es bleibt beizufügen, dass das Sonnenspektrum sich mit dem auf die Spalte des Apparates fallenden Teile des Sonnenbildes wesentlich ändert: Während man im allgemeinen das bekannte farbige, von einer grossen Zahl dunkler, scharfbegrenzter Streifen und Linien durchzogene Spektrum erhält, so verlieren die Streifen (raies), namentlich diejenigen bei C (rot) und F (blau) gelegenen, wesentlich an Intensität, wenn eine sog. Fackel vor die Spalte tritt, — ist es ein Flecken, so nimmt das ganze Bild an Intensität ab, die Streifen werden dunkler und breiter, ja einzelne derselben erscheinen etwas verschwommen, — und stellt man die Spalte tangential zur Sonnenscheibe, so verschwindet das gewöhnliche Spektrum ganz und es bleiben nur noch einige helle Linien übrig, meistens drei, welche an der Stelle der früher sichtbaren Fraunhofer'schen Linien C, D (vgl. 533) und F stehen. Höchst bemerkenswert ist endlich, dass, während Henry **Draper** 1877 (vgl. Amer. J. of sc. und Mem. spettr.) die „Discovery of oxigen in the Sun“ anzeigen zu können glaubte, **Janssen** durch seine 1888 und 1890 (vgl. Compt. rend.) am Montblanc ausgeführten Beobachtungen zu dem Ausspruche gelangte „que l'oxygène n'existe pas dans l'atmosphère solaire à un état où il produirait les manifestations polaires qu'il nous donne dans l'atmosphère terrestre“, — sowie dass J. **Scheiner** (vgl. Rundschau 1890) eine sehr sinnreiche Methode auffand, um aus dem Spektrum der Sonne die unserer Atmosphäre angehörenden Linien auszuscheiden.

533. Die Protuberanzen und die Corona. — Nachdem man längst (251—52) bei totalen Sonnenfinsternissen auf Corona und Protuberanzen aufmerksam geworden war, ja sich bereits für ihre Realität und Zugehörigkeit zur Sonne entschieden hatte, gelang es 1868 **Lockyer** und **Janssen** unabhängig von einander zu zeigen, dass wenigstens letztere mit Hilfe des Spektroskopes zu jeder Zeit sichtbar gemacht werden können, und es liegen nun bereits längere Reihen regelmässiger Beobachtungen der Protuberanzen vor, aus welchen schon manche wichtige Schlüsse gezogen werden konnten [a]. Für Beobachtung der Corona ist man dagegen noch einstweilen ausschliesslich auf die Zeiten der Finsternisse beschränkt, da die Hoffnung von **Huggins**, die Corona ebenfalls jederzeit sichtbar zu machen, sich bis jetzt nicht in genügender Weise bewährt hat; da man jedoch nunmehr von den wenigen Minuten einer Totalität nicht mehr den grössten Teil für das Absuchen der Protuberanzen zu verwenden hat, so ist dennoch ein merklicher Fortschritt in den betreffenden Kenntnissen erzielt worden [b].

Zu 533: *a.* Nachdem sich **Lockyer** schon 1866 die Frage gestellt hatte, ob es nicht möglich sein dürfte, mit dem Spektroskope die Protuberanzen auch ohne das Vorhandensein einer totalen Sonnenfinsternis zu bemerken, richtete er an die Roy. Society das Gesuch, ihm ein hinlänglich wirksames Instrument dieser Art zu beschaffen, — erhielt ein solches 1868 X 16, — und sah dann X 20 wirklich drei der hellsten Protuberanzlinien. Unterdessen kam auch **Janssen**, der zur Beobachtung der Finsternis von 1868 VIII 18 nach Vorder-Indien gereist war und während der Totalität in einer grossen Protuberanz die hellen Wasserstofflinien bemerkt hatte, auf den Gedanken, dass letztere wohl auch später noch sichtbar sein möchten, und hatte dann in der That die Freude, sie noch am folgenden Tage in seinem Spektroskop aufblitzen zu sehen. Die beidseitigen Nachrichten von dieser merkwürdigen und folgewichtigen Entdeckung langten X 26 fast im gleichen Momente in Paris an, und es teilen sich mit Recht Lockyer und Janssen in den Ruhm derselben, — wie dies auch durch eine im Auftrage der französischen Regierung geprägte Medaille anerkannt wird. — Bei der spektroskopischen Beobachtung der Protuberanzen wird die Spalte zuweilen radial, meistens aber tangential zum Sonnenrande gestellt, worauf sich, wenn sie enge genug und eine Protuberanz in Sicht ist, sofort helle Linien zeigen, deren Länge ihrem auf die Spalte fallenden Durchschnitte entspricht, — namentlich die beiden Wasserstofflinien H_α (C Fraunhofer in rot) und H_β (F Fraunhofer in blau), sowie (etwas nach D Fraunhofer in gelb) die rätselhafte Heliumlinie; man kann sich daher, wenn das Okular z. B. über H_α gestellt und die Spalte langsam verschoben wird, durch die sog. „Méthode des sections successives" ein Bild der Protuberanz verschaffen, — ja sogar nach dem Vorschlage von **Zöllner** (Pogg. Ann. 138 von 1869) die Protuberanz zur förmlichen Anschauung bringen, indem man die Spalte, im Verhältnis zur Dauer des Lichteindruckes, rasch oscillieren lässt. Noch weit bequemer kann letzteres, wie **Huggins** (vgl. Proc. Roy. Soc.) zum erstenmal 1869 II 13 erprobt zu haben scheint, dadurch bewirkt werden, dass man die Spalte etwas öffnet, was bei hellen Linien bis auf 1^{mm} geschehen kann, ohne dass dieselben verschwinden, da in diesem Falle, wie sich Abbé E. **Spée** in seinem Artikel „Les protubérances solaires (Ciel et terre 1885)" ausdrückt, „la plaque joue le rôle d'écran pour l'intérieur du tube, juste comme la Lune est un écran pour toute la surface de la Terre renfermée dans son cône d'ombre". — Man hat die Protuberanzen in zwei, sich zwar nicht scharf unterscheidende Klassen geteilt: Die **eruptiven** (éruptives ou métalliques), welche von der Sonne ausgeworfene Hydrogen- und Magnesium-Dämpfe zu sein scheinen, sehr veränderlich sind, oft eine enorme Höhe erreichen und, wie G. **Schweizer** (vgl. Bull. Mosc. und A. N. 449 von 1851) schon bei der Sonnenfinsternis von 1851 hervorhob und seither namentlich P. **Tacchini** und A. **Riccò** durch langjährige regelmässige Beobachtungen sicher erwiesen, mit den Flecken nach Lage und Häufigkeit im innigsten Zusammenhange stehen, — und die **wolkenartigen** (nuageuses ou quiescentes), welche ebenfalls grosse Ausdehnung nach Länge und Höhe erreichen, aber nicht an die Fleckenzonen gebunden sind, sondern auch gegen die Pole hin beobachtet werden, wo sie oft wochenlang unverändert in Sicht bleiben. — *b.* Die Kenntnis der Corona, deren Aussehen innerhalb der elfjährigen Fleckenperiode bedeutenden Veränderungen zu unterliegen scheint, lässt noch viel zu wünschen übrig, zumal sich die mit dem Spektroskope durch verschiedene Beobachter erhaltenen Ergebnisse zum Teil widersprechen: Während z. B. **Janssen** bei der Finsternis von 1868 das Corona-Spektrum

kontinuierlich und linienfrei fand, glaubte **Young** in demselben eine glänzende und etwa mit der sog. Nordlichtlinie übereinstimmende Linie im Grünen zu erkennen, welche dann auch bei spätern Finsternissen von andern gesehen wurde und nach **Trépied** genau mit der Linie 1474 von Kirchhoff übereinstimmt; während ferner Francesco **Denza** (Neapel 1834 geb.; Dir. Obs. Moncalieri und Vatikan) bei der Finsternis von 1870 zwei helle Linien notierte, von welchen die eine nahe bei E Fraunhofer, die andere mitten zwischen grün und gelb stand, sah **Thollon** 1882 die hellen Wasserstofflinien C und F, die durch eine unbekannte (von Frankland als „Helium" bezeichnete) Substanz erzeugte Linie D_3 und noch mehrere andere, — etc. Vgl. für photographische Abbildungen der Corona während Finsternissen z. B. „D. P. **Todd**, Photographs of the Corona 1889 I 1. Washington 1889 in 4.", und für Diskussion derselben „F. H. **Bigelow**, The solar Corona. Washington 1889 in 4.", — sowie „J. M. **Schäberle**, A mechanical theory of the Solar Corona. Sacramento 1891 in 8." — Da die Beobachtung ergab, dass das Licht der Corona besonders reich an blauen und violetten Strahlen ist, so dachte sich **Huggins**, dass es möglich sein dürfte, bei ausschliesslicher Benutzung derselben auch ohne Finsternis ein Bild der Corona zu erhalten, indem dann das Coronalicht sich durch grössere Helligkeit auszeichnen, folglich die Corona in ihrer wahren Gestalt hervortreten würde, — machte auch in dieser Richtung eine Reihe von Versuchen, die (vgl. Proc. Roy. Soc. 1882 und 1885) nicht ganz erfolglos blieben, — kam aber schliesslich doch zu der Überzeugung, dass es zum mindesten besserer klimatischer Verhältnisse bedürfte, um auf ein wirkliches Gelingen hoffen zu können.

534. Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der Sonne. — Die Ergebnisse der Spektralanalyse (147, 532) haben mit zwingender Notwendigkeit dazu geführt, die Herschel'sche Lehre, nach welcher (517) die Sonne selbst ein relativ dunkler und kalter Körper sein sollte, während eine äussere Hülle, die sog. Photosphäre, die Spendung von Licht und Wärme zu besorgen hatte, fallen zu lassen und gegenteils anzunehmen, dass der Sonnenkern aus einer glühenden Masse bestehe, welche von einer Art Atmosphäre wesentlich niedrigerer Temperatur umgeben sei[a]. Da ferner nach den (531) erwähnten neuern photographischen Aufnahmen die scheinbare Sonnenoberfläche eine Unzahl von kleinen hellen Wölkchen oder Flocken zeigt, welche wie in einem etwas dunklern Medium suspendiert erscheinen, so ist anzunehmen, es möchten diese Flocken dadurch entstanden sein, dass aufsteigende Dämpfe sich an der Oberfläche hinlänglich abgekühlt haben, um sich chemisch verbinden zu können, — dass bei diesem Prozess Licht und Wärme erzeugt und an uns abgegeben werden, während die Niederschläge selbst nach und nach wieder erkalten, untersinken und in den frühern Zustand zurückkehren, — jedoch nicht ohne immer wieder durch neue abgelöst zu werden, so dass bei beständigem Wechsel dieselbe Aktion kontinuierlich vor sich geht und so die unveränderliche Radiation (529) erklärlich wird. Dass bei solchen auf- und nieder-

gehenden Strömungen, in Verbindung mit den verschiedenen Wärmeverhältnissen und Rotationsgeschwindigkeiten in Höhe und Tiefe, Wirbel erzeugt werden und so trichterförmige Vertiefungen entstehen, welche uns in das wegen Überhitzung (529) matter leuchtende Innere blicken und so gewissermassen Flecken sehen lassen, ist zu erwarten, — und ebenso, dass zuweilen Stauungen eintreten können, welche sich sodann durch Eruptionen ausgleichen und dabei Fackeln und Protuberanzen erzeugen. Dagegen sind allerdings hiemit die sich im Fleckenphänomene zeigenden Perioden (519—20), die unverkennbaren Einwirkungen auf die Erde (522—24), die gesetzmässigen Wanderungen der Fleckenzonen und die seltsamen Rotationsverhältnisse (529), sowie noch manches andere nicht bedingt, sondern höchstens zulässig, so dass die vorstehende Theorie noch in einer Weise auszubauen sein wird, welche kaum ohne Zuziehung von gegenwärtig noch unbekannten Verhältnissen möglich sein dürfte, und wohl einstweilen allseitige Beobachtungen mehr nützen als das allerdings bequemere und dem grossen Publikum mehr imponierende Haschen nach Theorien [b].

Zu 534: *a.* In dieser Atmosphäre werden meistens drei Regionen unterschieden: Eine dem Kerne nächstliegende wolkenartige Schichte, welche die frühere **Photosphäre** ersetzt und noch jetzt diesen Namen trägt, — eine dieselbe überragende, zumeist Wasserstoffgas enthaltende, mit den Fackeln und Protuberanzen in innigster Beziehung stehende Rosaschichte, welche 1842 durch **Airy** als „Sierra" bezeichnet wurde, während sie jetzt meistens, nach dem 1859 durch **Frankland** und **Lockyer** gemachten Vorschlage, **Chromosphäre** genannt wird, — und endlich eine noch ziemlich rätselhafte oberste Schichte, welche sich uns bei totalen Finsternissen als **Corona** zeigt. — *b.* Da ich keine Lust verspüre, Göthes schalkhaften Rat „Im Auslegen seid frisch und munter, — Leg't ihr's nicht aus, so legt was unter" zu befolgen, so beschränke ich mich auf diese wenigen Andeutungen und verweise für weiteres auf die grosse Speciallitteratur, den bereits erwähnten Schriften und Abhandlungen noch folgende beifügend: „H. **Schröter**, Über die Sonnenfackeln und Sonnenflecken. Erfurt 1789 in 4., — G. **Huth**, Über die Sonnenflecken und Sonnenfackeln (Berl. Ges. nat. Fr. IV von 1803), und: Astronomisch physikalische Beobachtungen an der Sonne (Berl. Jahrb. 1807), — Ludwig **Thilo** (Heidelberg 1789 — Frankfurt 1831; Prof. math. et phys. Aarau und Frankfurt), De tabulis iconographicis, quibus maculæ Solis a Th. a Sömmering observatæ adumbrantur. Francofurti 1828 in 4., — Joh. Simon Lorenz **Weeckel** (Pegnitz 1807 — Nürnberg 1849; Prof. math. Nürnberg), Die Sonne und ihre Flecken. Nürnberg 1846 in 4. (benutzte die Beobachtungen von Staudach), — Th. **Winnecke,** Über die Sonne. St. Petersburg 1861 in 8. (auch Zeitschr. Peters VI), — Em. **Gautier**, De la constitution du Soleil (Bibl. univ. Arch. 1863—69), — John **Herschel**, On the solar spots (Quart. Journ. 1864), — Ph. **Carl**, Die Sonne. München 1864 in 8., — B. **Stewart**, On sun-spots and their connection with planetary configurations (Tr. Edinb. 1864), — H. **Faye**, Sur la constitution physique du Soleil (Compt. rend. 1865 u. f.; auch Annuaire 1873—74), —

G. St. **Ferrari**, Relazione fra i massimi e minimi delle macchie solari e le straordinarie perturbazioni magnetiche (Bull. Secchi 1867 e 1874), — C. **Flammarion**, Le Soleil, sa nature et sa constitution physique (Etudes et lectures I f), — Ernst **Kayser** (Danzig 1830 geb.; Obs. Naturf. Ges. Danzig), Resultate aus Beobachtungen von Sonnenflecken während der Jahre 1754—58 (Abh. Danzig 1868), — G. B. **Donati**, Dei fenomeni solari in relazione con altri fenomeni cosmici. Urbino 1869 in 8., — P. **Reis**, Die Sonne. Leipzig 1869 in 8., — A. **Guillemin**, Le Soleil. Paris 1869 in 8., — **Secchi**, Le Soleil. Paris 1870 in 8. (2 éd. 1875—77, 2 Vol.; deutsch durch Schellen, Braunschweig 1872), — **Zöllner**, Über die Periodicität und heliographische Verbreitung der Sonnenflecken (Sächs. Ber. 1870 u. f.), — W. C. **Bond**, Observations of solar spots (Ann. Harv. Coll. 1871), — R. A. **Proctor**, The Sun. London 1872 in 8., — J. N. **Lockyer**, Contributions to solar physics. London 1874 in 8., — P. J. C. **Janssen**, Sur les progrès récents de la physique solaire (Annuaire 1879), — S. P. **Langley**, Solar physics (Observatory 1880), — R. **Tamine**, Etude sur les taches solaires (Ann. Brux. 1882), — C. A. **Young**, The Sun. London 1882 in 8. (3. ed. 1888; ital. Milano 1882, franz. Paris 1883), — H. **Fritz**, Die Sonne. Zürich 1884 in 4., — J. E. **Broszus**, Die Theorie der Sonnenflecken. Berlin 1884 in 8., — B. **Bossi**, Le macchie solari, cause ed effetti. Genova 1884 in 8. (3. ed. 1888), — A. **Bélopolsky**, Les taches solaires et leur mouvement Moscou 1886 in 8. (russ.; vgl. Radau in Bull. astr. 1887), — E. **Spée**, Physique solaire. Bruxelles 1889 in 12., — J. **Wilsing**, Über das Rotationsgesetz der Sonne und über die Periodicität der Sonnenflecken (A. N. 3039 von 1891), — Aug. **Schmidt**, Die Strahlenbrechung auf der Sonne, ein geometrischer Beitrag zur Sonnenphysik. Stuttgart 1891 in 8., — M. **Rajna**, Sull' escursione diurna della declinazione magnetica a Milano in relazione col periodo delle macchie solari (Rendic. del Istit. Lomb. 1891), — J. **Fényi**, Phénomènes observés sur le grand groupe de taches en février 1892 (Mem. spettrosc. ital. 1892), — A. **Brester**, Théorie du Soleil. Amsterdam 1892 in 8., — etc."

XXI. Die Planeten, Monde und Ringe.

La vera fede non è ostile alla scienza. ma ambedue sono raggi di un medesimo sole destinati ad illuminare nella via della verità le nostre cieche e deboli intelligenze.

(Secchi.)

---

535. Die sog. Morgen- und Abendsterne. — Ehe am Abend die übrigen Sterne auftauchen und noch längere Zeit, nachdem sie morgens bereits wieder erloschen sind, sieht man zuweilen, am Abend gegen Untergang als sog. **Abendstern** oder am Morgen gegen Aufgang als sog. **Morgenstern**, ein auffallend schönes Gestirn funkeln, — seltener und nur bei grosser Aufmerksamkeit, aber sonst unter ähnlichen Verhältnissen, noch ein zweites: Es sind die uns schon längst (211) vorläufig bekannt gewordenen, bereits (258) von den alten Egyptern wegen ihrer beständigen Sonnennähe dem Tagesgestirne als Trabanten zugeteilten zwei untern Planeten **Venus** und **Merkur** zur Zeit ihrer sog. Elongation (276)[a].

Zu 535: *a.* Venus, von den Griechen wohl auch „Aphrodîte" geheissen, erhielt bei ihnen als Morgenstern den Namen **Phosphorus**, als Abendstern den Namen **Hesperus**; aber es ist wohl falsch, aus der Coexistenz dieser beiden Namen schliessen zu wollen, dass sie anfänglich die Identität nicht erkannt haben und dies erst, wie allerdings Diogenes Laertius berichtet, durch **Pythagoras** geschehen sei, — ist ja ziemlich sicher, dass sie spätestens durch **Thales** von der schon in vorhistorischer Zeit annähernd bestimmten Umlaufszeit der Venus und des, wegen seinem Silberschein auch „Stilbos" genannten, Merkur Kenntnis erhielten.

536. Die Beschaffenheit Merkurs. — Die geringe, nur 28^0 betragende Elongation Merkurs bewirkt, dass er, wie schon angedeutet, nur selten und auf kurze Zeit für das freie Auge sichtbar wird, ja sogar mit kräftigen Fernröhren nur bei grosser Aufmerksamkeit während des eigentlichen Tages verfolgt werden kann[a]. Wenn aber die Beobachtung gelingt, so erkennt man, dass er, wie **Coppernicus** voraussagte, Phasen wie der Mond zeigt[b], und der fleissige **Schröter** vermeinte sogar, da ihm die Beleuchtungsgrenze

zackig erschien und er überdies einen dämmerungsartigen Übergang vom dunkeln zum beleuchteten Teile zu erkennen glaubte, auf die Existenz hoher Berge und starker Atmosphäre schliessen zu dürfen, sowie durch Verfolgen kleiner Ungleichheiten erwiesen zu haben, dass Merkur in 24^h 5^m eine Rotation vollende und sein Equator etwa 20° gegen seine Bahn geneigt sei [c]. Allerdings sind dann aber diese Ergebnisse seither wiederholt in Zweifel gezogen worden, ja **Schiaparelli** hat neuerlich sogar den ziemlich sichern Nachweis geleistet, dass die Rotation Merkurs wenigstens nahe dieselbe Zeit in Anspruch nimmt wie sein Umlauf um die Sonne [d]. Noch bleibt beizufügen, dass nach **Bessels** Messungen Merkur keine merkliche Abplattung besitzt, und dass nach denjenigen von **Kaiser** in der mittlern Distanz Sonne-Erde sein Durchmesser unter dem Winkel von 6",61 erscheint, so dass derselbe etwa 4800^{km} oder circa $^1/_3$ desjenigen der Erde halten muss.

Zu 536: *a.* Merkur zur Zeit seiner Elongation nach Sonnenuntergang von freiem Auge zu sehen, hält nicht schwer und man muss sich somit verwundern, dass dies **Coppernicus**, wie er selbst (lib. 5, cap. 30) mit Bedauern erzählt, nie gelang; dass dagegen Beobachtungen am Tage auch nach Erfindung des Fernrohrs selten blieben, ist begreiflich, und es verdient ehrenvoller Erwähnung, dass schon in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts Jean **Vidal** (Mirépoix 1747 — Toulouse 1819; Ingenieur, dann Dir. Obs. Toulouse) und Edward **Pigott** zahlreiche Beobachtungen solcher Art machten, wodurch sie die Theorie Merkurs wesentlich förderten. — *b.* Während Galilei, Marius, Hortensius, etc. die Phasen Merkurs mehr vermuteten als wirklich wahrnahmen, so sah dagegen Joh. Bapt. Zupo oder **Zupus** (1590? — 1650?; Jesuit; lebte längere Zeit in Neapel) 1639 V 23 und sodann wieder Joh. **Hevel** 1644 XI 22 dieselben ganz deutlich. — *c.* Seine „Hermographischen Fragmente zur genauern Kenntniss des Planeten Merkur. Göttingen 1815—16, 2 Th. in 8." sind noch jetzt eine Hauptquelle für den innersten Planeten. — *d.* Im Gegensatze zu Schröter fand **Zöllner**, vgl. seine „Photometrischen Untersuchungen über die physische Beschaffenheit des Planeten Merkur (Poggendorf, Jubelband von 1874)", dass zwar die Helligkeit dieses Körpers mehr als doppelt so gross als die der Capella sei, ja bei günstiger Position derjenigen des Sirius nahe komme, — dass er aber nur eine sehr geringe Albedo besitze, indem für letztere in Beziehung auf Mond und Planeten die Zahlenreihe

0,114	0,119	0,267	0,465	0,498	0,623	0,624	0,641
☿	☾	♂	⛢	♄	♀	♃	⛢

bestehe, — und kam zu dem Schlusse: „Der Merkur ist ein Körper, dessen Oberflächenbeschaffenheit mit derjenigen des Mondes sehr nahe übereinstimmt, der also auch, wie der Mond, wahrscheinlich keine merkliche Atmosphäre besitzt". — Während Vidal merkwürdigerweise (vgl. Lalande, Bibl. 800) der Rotation Merkurs nur 16^h geben wollte, erhöhte Schröter, wie bereits mitgeteilt wurde, die Dauer auf etwas mehr als einen Tag, und an dieser letztern Bestimmung wurde fast allgemein festgehalten, bis **Schiaparelli** in seiner Note „Sulla rotazione di Mercurio (A. N. 2944 von 1889)" aus den von ihm

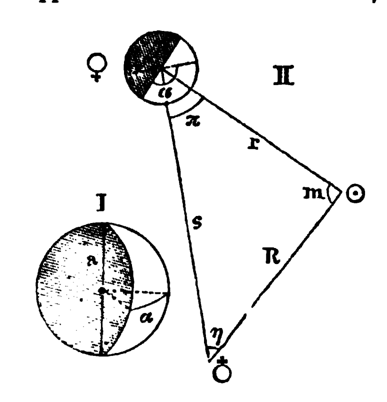
seit 1882 ausgeführten Tagesbeobachtungen Merkurs überzeugend nachwies, dass sich Merkur gegenüber der Sonne wie der Mond gegenüber der Erde verhalte, d. h. dass für ihn Rotation und Revolution gleichviel Zeit in Anspruch nehmen, also derselbe der Sonne, abgesehen von der ziemlich starken Libration in Länge, stets dieselbe Seite zuwende, — somit auch die kleinen Ungleichheiten, welche Schröter nach etwas mehr als einem Tage in dieselbe Stellung zurückgekommen glaubte, uns nach einem Tage noch in derselben zu stehen scheinen, weil sie eben in ihr geblieben sind. — *e.* Setzt man die mittlere Distanz d von Erde-Sonne gleich 150 Millionen Kilometer und nach **Kaiser** den scheinbaren Durchmesser des Merkur in dieser Distanz $2\varrho = 6'',61$, so erhält man in der That den wahren Durchmesser des innersten Planeten $2r = 2 \cdot d \cdot Si\,\varrho \coloneqq 4800^{km}$.

537. Die Beschaffenheit der Venus. — Der Planet Venus ist, da seine Elongation auf 48° ansteigt und überdies seine Distanz von uns zuweilen viel geringer als diejenige Merkurs wird, viel häufiger und leichter als dieser sichtbar, und so wurden auch seine Phasen schon durch **Galilei** und dessen nächste Nachfolger bereits vielfach wahrgenommen [a]. Dagegen ist man auffallenderweise über die Rotationsverhältnisse und die Oberflächenbeschaffenheit der Venus noch gegenwärtig fast ganz im unklaren, da das wenige, was man darüber nach **Cassini** und **Schröter** zu wissen glaubte, durch die Neuzeit, und wieder voraus durch **Schiaparelli**, als unhaltbar erwiesen wurde, und das durch **Vogel** erhaltene sichere Ergebnis, dass das Spektrum der Venus fast ganz mit demjenigen der Sonne übereinstimmt, zwar höchst interessant, aber natürlich nicht dazu angethan ist, nach dieser Richtung mehr als einige wenige Anhaltspunkte zu geben [b]. — Sehr auffallend ist der starke Glanz, den Venus bei gewissen Stellungen erreicht; nicht nur überstrahlt sie in solchen Fällen alle Sterne erster Grösse und vermag Schatten zu werfen, sondern sie wird zuweilen sogar am hellen Tage sichtbar und hat schon mehrmals die abergläubische Menge geängstigt [c]. — Wie endlich zuerst G. **Kirch** bemerkt zu haben scheint, wird manchmal die Nachtseite der Venus selbst mit ganz geringen optischen Hilfsmitteln sichtbar, während sie andere Male unter anscheinend ganz analogen Verhältnissen sogar mit den allerbesten Fernröhren absolut nicht zu sehen ist [d].

Zu 537: *a.* Die von Coppernicus nur gemutmassten Phasen der Venus nahm **Galilei** bald nach Erfindung des Fernrohrs wirklich wahr, ja teilte schon 1610 XII 11 seinen Fund dem Gesandten Giuliano de' Medici in Prag durch das Anagramm „Haec immatura a me jam frustra leguntur oy" mit, von welchem er sodann 1611 I 1 die Lösung „Cynthiæ (i. e. Lunæ) figuras æmulatur mater amorum (i. e. Venus)" gab; auch an Castelli und Clavius berichtete er darüber und hob in seinem Briefe an letztern hervor, wie diese Erscheinungen beweisen, dass Venus (wie wohl auch jeder der übrigen Planeten) nur durch

die Sonne erleuchtet sei und sich um dieselbe drehe. Bald nachher wurde auch **Marius** auf diese Lichtgestalten aufmerksam; namentlich aber beobachtete Fr. **Fontana** dieselben von 1643 I 22 an mehrfach, wobei er die Lichtgrenzen zackig zeichnete, also Berge zu bemerken glaubte, — ferner Math. **Hirzgarter**, in dessen „Detectio dioptrica corporum planetarum verorum. Frankfurt 1643 in 4." man in Beziehung auf Venus und Merkur die schönen Verse liest: „Der Sonnen sind wir beyd verwandt, — Zunächst um sie her wir den Lauff hand, — Wachsend und schweinend wie der Mon, — Wie man durch d'Rohr wol sehen kan", — sodann Joh. **Hevel**, welcher die Phasen (vgl. seine „Prolegomena Selenographiæ") im Spätjahr 1644 wiederholt beobachtete und zeichnete, — etc. — *b.* Nachdem es 1665 und 1666 **Cassini** (vgl. 550 und 539) gelungen war, die Rotationen von Jupiter und Mars nachzuweisen und ihre Dauer zu ermitteln, versuchte er dieses Problem auch bei Venus zu lösen, und wenn er dabei (vgl. seine „Lettre à Mr. Petit touchant la découverte du mouvement de la planète Vénus autour de son axe" im Journ. d. S. 1667) auch grössere Schwierigkeiten fand, so glaubte er doch durch Verfolgung einer hellern Stelle ans Ziel gelangt zu sein und teilte sein Schlussresultat in den Worten „Je puis néanmoins dire qu'**en moins d'un jour** elle achève son mouvement, de manière qu'en **23 heures** (die „jours" des J. d. S. stehen mit dem Vorhergehenden in so totalem Widerspruch, dass sie einfach als Druckfehler zu betrachten sind) à peu près elle revient environ à la même situation dans la planète de Vénus" mit, dasselbe, wie es scheint, auch in seiner „Disceptatio apologetica de maculis Jovis et Martis A. 1666 et 1667, et de conversione Veneris circa axem suum. Bononiæ 1667 in 4." festhaltend. Später wollte Francesco **Bianchini** (Verona 1662 — Rom 1729; päpstl. Kammerherr) in seiner Schrift „Hesperi et Phosphori nova phænomena, sive Observationes planetae Veneris. Roma 1728 in fol." die Rotationsdauer der Venus auf volle $24^d\ 8^h$ erhöhen, und veranlasste dadurch Jacques **Cassini** (vgl. Mém. Par.), die sämtlichen Beobachtungen seines Vaters einer Neuberechnung zu unterwerfen, welche ihm nunmehr $23^h\ 15^m$ ergab, während unter der Annahme, es entsprechen den $24\frac{1}{3}^d$ Bianchinis volle 25 Rotationen, $23^h\ 20^m$ folgte. An letzterer Zahl hielt auch **Maraldi** (Conn. d. t. 1750) fest, während sich **Schröter**, gestützt auf eigene Beobachtungen kleiner Ungleichheiten, aber allerdings etwas durch die Annahme beeinflusst, dass der Cassinische Wert annähernd richtig sein werde, in seiner Schrift „Cythereographische Fragmente. Erfurt 1793 in 4." und noch später für $23^h\ 21^m\ 19^s$ aussprach, — eine Zahl, welche sodann fast allgemein angenommen und namentlich auch durch Fr. de **Vico** (A. N. 404 von 1840) nur um 3^s vergrössert wurde, obschon W. **Herschel** in seinen „Observations on the Planet Venus (Ph. Tr. 1793)" und dann wieder **Flaugergues** (vgl. Not. de l'Acad. du Gard von 1822) die Zuverlässigkeit derselben angezweifelt und sich mehr zu Gunsten von Bianchini ausgesprochen hatten. Je weniger letztere Zweifel beachtet worden waren, um so grösseres Aufsehen machte es, als 1890 **Schiaparelli**, nachdem er die Arbeiten seiner Vorgänger einer scharfen Kritik unterworfen und mit seinen eigenen Wahrnehmungen verglichen hatte, sich in seinen „Considerazioni sul moto rotatorio del pianeta Venere (Rendic. Ist. Lomb.)" dahin aussprach, dass auch bei Venus ähnliche Täuschungen wie bei Merkur vorgekommen seien, und deren Rotationsdauer nahe, wo nicht ganz, mit ihrem siderischen Jahre von $224^d,7$ übereinstimmen müsse, womit sich alsbald auch **Perrotin** nach Beobachtungen in Nizza einverstanden erklärte. Dagegen fand (vgl. Rev. scient. 1891 VI 20) J. J. A. **Bouquet** de la Grye unter

Zuhilfenahme von Abmessungen auf den Photographien des letzten Venusdurchganges „que la planète Venus, au lieu de tourner toujours la même face au Soleil, est animée d'une rotation suffisante pour lui assurer plusieurs alternatives de jour et de nuit dans une année", ja **Niesten** erklärte (Ciel et terre 1891 VII 16), dass er nach den Brüsseler Beobachtungen von 1881—90 sogar an der Bestimmung Schröter - de Vico festhalten müsse; es ist also diese Untersuchung noch keineswegs definitiv erledigt. — Ebenso unsicher ist die Lage der Rotationsaxe der Venus oder der Winkel, welchen der Equator der Venus mit ihrer Bahn bildet: Während **Schröter** für letztern 72° und Fr. de **Vico** wenigstens 53° fand, so dass bei Venus die gemässigte Zone ausfallen und dadurch das Vorhandensein beständiger Stürme und starker Wolkenbildungen wahrscheinlich würde, kam **Schiaparelli** zu der Annahme, dass jene Axe nahe zu der Bahnebene normal sei, während jetzt wieder **Niesten** die Bestimmung von de Vico aufrecht erhält, obschon die Wolkendecke ihn nicht hindert, von Venus eine Art „Mappemonde" zu entwerfen. — *c.* Der Glanz der Venus ist offenbar der Grösse ihres uns zugewandten beleuchteten Teiles direkt, dem Quadrate ihres Abstandes umgekehrt proportional, und es stellte sich nun schon **Halley** in seiner Note „An account of the cause of the late remarkable appearance of the Planet Venus, seen this summer for many days together in the day time (Ph. Tr. 1716)" die Aufgabe, die Bedingungen zu finden, unter welchen derselbe ein Maximum annehme, zu ihrer Lösung wesentlich in folgender Weise vorgehend: Aus den beistehenden Figuren ergiebt sich, dass die Grösse α der Phase durch $180^\circ - \pi$ gegeben wird und somit, wenn man unter f die Grösse der ganzen Scheibe und unter f' diejenige der Sichel versteht,



$$f' = \tfrac{1}{2} f \cdot (1 - \mathrm{Co}\,\alpha) = f \cdot \mathrm{Si}^2\, \tfrac{1}{2}\alpha = f \cdot \mathrm{Co}^2\, \tfrac{1}{2}\pi = f \cdot (r + \varrho + R) \cdot (r + \varrho - R) : 4 r \varrho \qquad 1$$

ist. Bezeichnet also F den Glanz des Gestirnes und A eine seiner Albedo entsprechende Konstante, so hat man

$$F = A \cdot f' : \varrho^2 = A \cdot f \cdot (r + \varrho + R) \cdot (r + \varrho - R) : 4 r \varrho^3 \qquad 2$$

und hieraus folgt

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{A \cdot f}{4 r \varrho^4} \cdot [3 R^2 - 3 r^2 - \varrho^2 - 4 r \varrho] \qquad 3$$

so dass F ein Maximum wird, wenn

$$\varrho^2 + 4 r \varrho = 3 (R^2 - r^2) \quad \text{oder} \quad \varrho = \sqrt{3 R^2 + r^2} - 2 r \qquad 4$$

ist, wie dies eben **Halley** (l. c.) gefunden hat. Noch bleibt beizufügen, dass, wenn η die dem durch 4 gegebenen Werte von ϱ entsprechende Elongation ist, diese Grösse durch

$$\mathrm{Co}\,\eta = (\varrho^2 + R^2 - r^2) : 2 R \varrho = \tfrac{2}{3} \left[\sqrt{3 R^2 + r^2} - r \right] : R \qquad 5$$

gefunden wird, und dass, wenn m den heliocentrischen Abstand von der untern Konjunktion, t die von derselben aus gezählte Zeit des grössten Glanzes, und T die synodische Umlaufszeit der Venus bezeichnet, unter Voraussetzung von Kreisbahnen offenbar die Proportionen

$$\mathrm{Si}\,m : \mathrm{Si}\,\eta = \varrho : r \quad \text{und} \quad t : T = m : 360 \qquad 6$$

bestehen. Für R = 1, r = 0,723 und T = 584^d findet man nach diesen Formeln successive $\varrho = 0{,}431$, $\eta = 39^\circ\ 43'$, $m = 22^\circ\ 23'$ und $t = 36^d$, und es steht somit Venus etwa 36 Tage vor und nach der untern Konjunktion im grössten Glanze, wobei derselbe hinreicht Schatten zu werfen, ja nach **Humboldt** unter südlichen Breiten sogar um einen Sextanten abzulesen. — Schon **Aeneas** soll auf seiner Rückreise von Troja die Venus bei Tage gesehen haben, und wenn **Ardüser** (vgl. Churer Jahresb. 15) in seiner Chronik erzählt: „Den 15 Juni (1571) sah man zu Chur vor S. Marti (auf dem Platze vor der St.-Martinskirche) einen schönen luttren stärnen am himmel um mitten tag", so bezieht sich dies ohne allen Zweifel ebenfalls auf Venus. — Das im Titel von Halleys Note erwähnte Sichtbarwerden der Venus am hellen Tage im Sommer 1716 verursachte unter der abergläubischen Menge Londons einen panischen Schrecken, und Ähnliches passierte z. B. 1630 in Tübingen, ja noch 1798 in Paris. — Von der betreffenden Litteratur erwähne ich noch „J. **Kies**, Observation sur le plus grand éclat de Vénus, en supposant son orbite et celle de la terre elliptique (Mém. Berl. 1750)". — *d.* Das nach dem Vorgange von Gottfr. **Kirch** auch durch William **Derham** (Stoughton bei Worcester 1657 — Upminster 1735; Pfarrer zu Upminster; vgl. seine „Astro-Theology. London 1714 in 8.", die noch später oft und in allen Sprachen aufgelegt wurde), Andreas **Mayer** (Augsburg 1716 — Greifswalde 1782; Prof. math. et phys. Greifswalde; vgl. seine „Observationes Veneris. Gryphiswaldiæ 1769 in 4."), etc., erwähnte, aber mehr beiläufig bemerkte Aufleuchten eines phosphorischen Lichtes auf der Nachtseite der Venus, wurde sodann namentlich in Lilienthal durch **Schröter** und seine Gehilfen **Harding** und **Bessel** etwas konsequenter beobachtet; sie fanden dasselbe intermittierend, und der letzterwähnte fragte sich schon damals, ob diese Lichterscheinung nicht mit unserm Nordlichte vergleichbar, ja verwandt sein dürfte. In der neuern Zeit hat Wilh. **Meyer** durch Zusammenstellung aller bekannten Erscheinungen nach den Sonnenflecken- und Nordlichtperioden es sehr wahrscheinlich gemacht, dass letzteres wirklich der Fall sein dürfte.

538. Der vermeintliche Venusmond und der problematische Vulkan. — Während im 17. und 18. Jahrhundert mehrere Beobachter einen **Venusmond** gesehen zu haben glaubten, ja **Lambert** sogar unternommen hatte, darauf gestützt eine Bahn desselben zu berechnen, so sind dagegen später und namentlich auch in unserm Jahrhundert trotz aller Aufmerksamkeit keine Spuren mehr von einem solchen Begleiter bemerkt, wohl aber verschiedene Versuche gemacht worden, jene vermeintlichen Erscheinungen anderweitig zu erklären [a]. — Auch von dem durch **Leverriers** Untersuchungen über die Merkurbahn geforderten intramerkuriellen Planeten oder Asteroidenringe sind später, nachdem man allerdings einmal geglaubt hatte, erstern erwischt zu haben und als **Vulkan** in das Civilregister des Sonnensystemes eintragen zu können, weder während totalen Verfinsterungen der Sonne in ihrer Nähe, noch zu andern Zeiten als die Sonne selbst passierende schwarze Punkte, irgendwie sichere Spuren gefunden worden [b].

Zu 538: *a.* Dom. **Cassini** glaubte nämlich 1672 I 25 und 1686 VIII 28, — Jam. **Short** 1740 X 23, — Jacques Leibax genannt **Montaigne** (Narbonne 1716 — Limoges 1785?; Entdecker des Kometen von 1772) 1761 V 3—11, — Christ. **Horrebow** 1764 III 3—11, — und M. de **Montbaron** (Auxerre 1740? — ebenda 1786?; Rat und Privatastronom in Auxerre) 1764 III 15, 28, 29 je einen Venusmond zu sehen, — und als hierauf **Lambert** in seinem „Essai d'une théorie du satellite de Vénus (Mém. Berl. 1773)" gezeigt hatte, dass diese verschiedenen Wahrnehmungen der Annahme eines Mondes von $11^d,2$ Umlaufszeit in einer um 63^0 gegen die Ekliptik geneigten Bahn von 0,2 Excentricität ziemlich günstig seien, so war man in Berlin von der Realität dieses Fundes so überzeugt, dass Friedrich der Grosse bereits für den neuen Mond den Namen „d'Alembert" vorschlug. Dass nun **d'Alembert** mit den Worten: „Votre majesté me fait trop d'honneur de vouloir baptiser en mon nom cette nouvelle Planète; je ne suis ni assez grand pour être au ciel le Satellite de Vénus, ni assez bien portant pour l'être sur la terre, et je me trouve trop bien du peu de place que je tiens dans ce bas monde, pour en ambitionner une au firmament", auf eine solche Pathenstelle verzichtete, und dass manche durch das Nichtwiederauffinden an der vorgeblichen Entdeckung irre wurden, lässt sich begreifen, — weniger dagegen die Hartnäckigkeit, mit welcher sich **Hell** (vgl. Eph. Vindob. 1766 und später) in die Aufgabe verrannte, nachzuweisen, „dass die Wahrnehmungen dieses Trabanten blosse Wahrnehmungen eines optischen Bildes seien, welches auf der den Stern des Auges umgebenden Hornhaut entworfen, von dieser auf die erste Okularlinse des Sehrohres zurückgestrahlet, und von der Okularlinse wiederum auf die Netzhaut des Auges geworfen wird". Dass einzelne Täuschungen vorgekommen sein können, will ich nicht in Abrede stellen; aber alle diese, zum grossen Teil von geübten Beobachtern gemachten Angaben als solche erklären zu wollen, geht dann doch nicht, — zumal die Venus wiederholt aus dem Gesichtsfelde gebracht und die Erscheinung noch deutlicher als vorher bemerkt wurde, — und man wird sich einstweilen bescheiden müssen, diese Vorgänge, wie noch so viele andere, behufs späterer Erledigung bei Seite zu legen, — um so mehr, als auch neuere Versuche, dieselben durch Zusammentreffen der Venus mit kleinen Sternen, Gliedern des Asteroidenringes, etc., zu erklären, nur teilweise gelungen sind. Vgl. für weitern Detail „F. **Schorr**, Der Venusmond. Braunschweig 1875 in 8., — J. **Bertrand**, Le satellite de Vénus (Journ. d. Sav. 1875), — J. C. **Houzeau**, Le satellite problématique de Vénus (Ciel et terre 1884), — Paul **Stroobant**, Etude sur le satellite énigmatique de Vénus. Bruxelles 1887 in 4., — etc. — *b.* Nachdem schon Edward **Herrick** (New-Haven 1811 — ebenda 1862) die Sonne 1847 behufs Auffindung eines intramerkuriellen Planeten jeden Tag, aber vergeblich, abgesucht hatte, teilte **Leverrier** im September 1859 der Pariser Akademie mit, dass ihn das Studium der von 1697—1848 beobachteten 21 Eintritte Merkurs in die Sonne zwinge, die sekuläre Bewegung des Merkur-Perihels zu vermehren, und hiefür müsse er **entweder** die Venusmasse um $^1/_{10}$ vergrössern, was wegen der Erde nicht angehe, **oder** annehmen, dass innerhalb Merkur ein zweiter Asteroidenring existiere. — Da nun bei wirklichem Vorhandensein eines solchen Ringes grosse Wahrscheinlichkeit vorliegt, einzelne Glieder desselben zuweilen durch die Sonne marschieren zu sehen, so durchsuchte ich daraufhin meine Sonnenfleckenregister nach bezüglichen Bemerkungen, — publizierte schon im November (vgl. Mitth. 10 und A. N. 1223 von 1859) ein Verzeichnis von 15 verdächtigen Fällen, das sodann nach und nach durch

weitere Beiträge von C. **Haase** (Zeitschr. Peters von 1864) und andern auf etwa zwei Dutzend gebracht wurde, — und glaubte schliesslich (Handb. II von 1872) aussprechen zu dürfen, dass wenigstens zwei solche Körper von circa 28 und 42^d synodischer oder 26 und 38^d wirklicher Umlaufszeit existieren möchten. — Unterdessen teilte der Arzt **Lescarbault** in Orgères der Pariser Akademie mit, dass er 1859 III 26 einen schwarzen Punkt auf der Sonne beobachtet habe, der dieselbe in 1^h 17^m längs einer vom Centrum um 15',4 entfernten Sehne durchlief, und als sich hierauf **Leverrier** durch ein an Ort und Stelle vorgenommenes Examen von der Realität dieser Beobachtung überzeugt zu haben glaubte, sowie derselben durch einen in $19^d,7$ eine Bahn von 0,1427 Radius, 12° 10' Neigung und 12° 59' Knotenlänge durchlaufenden Planetoiden genügen konnte, so zweifelte er nicht, wenigstens Ein Glied des theoretisch geforderten Ringes zu besitzen, ja schlug bereits für dasselbe den Namen **Vulkan** vor. Bald stiegen jedoch Zweifel an der Lescarbault'schen Beobachtung auf, und als nachmals bei der totalen Finsternis von 1860 **Leverrier** mit seinem ganzen Generalstab vergeblich seinen Liebling zu finden suchte, schien die ganze Sache resultatlos abgeschlossen. — Als sodann Heinr. **Weber** 1876 IV 4 einen verdächtigen Flecken auf der Sonne fand, der in die Reihe der frühern 42^{ger} passte, so machte ich **Leverrier** sofort darauf aufmerksam; aber auch dessen neue Studien, über deren verschiedene Phasen er mir (vgl. Zürch. Viert. 1881) wiederholt Mitteilung machte, führten, nachdem man kurze Zeit Vulkan durch **Watson** bei der Sonnenfinsternis von 1878 VII 29 gefunden glaubte, zu keinen sichern Resultaten, — und ebenso ging es später **Oppolzer** bei analogen Untersuchungen, während dagegen die von C. H. **Peters** (vgl. A. N. 2253—54 von 1879) etwas in Zweifel gezogene Merkur-Theorie Leverriers durch Jul. **Bauschingers** „Untersuchungen über die Bewegungen des Planeten Merkur. München 1884 in 8." vollständig bestätigt wurde. Die ganze Frage bleibt somit noch eine offene.

539. Die Rotationsverhältnisse und die Gestalt des Mars. — Von **Mars**, dem ersten der obern Planeten, wusste man in der ältern Zeit bloss, dass er eine etwas rötliche Farbe besitzt, und sogar die ersten Fernröhren waren nicht wirksam genug, um mit Sicherheit über seine Gestalt zu belehren, geschweige die bei ihm ebenfalls zu erwartenden Phasen zu zeigen [a]. Dom. **Cassini** gelang es dann allerdings durch Beobachtung einiger dunkeln Flecken, für die Rotationsdauer des Mars den sichern Wert von 24^h 40^m zu erhalten; dagegen ist noch gegenwärtig der Betrag seiner Abplattung fraglich, und nur unzweifelhaft, dass diese letztere höchst gering ist [b].

Zu 539: *a.* Die Alten legten **Mars** wegen seinem Aussehen den Namen des „Feurigen (πυρόεις)" bei, besassen aber sonst keine weitern Kenntnisse über ihn, ja selbst nach Erfindung des Fernrohrs hatte man Mühe, sich auch nur über seine Gestalt zu belehren, so dass z. B. noch möglich wurde, den sonst so wackern **Hirzgarter** mit einer angeblich von Fontana herrührenden Zeichnung, welche Mars die „monstrosische" Form eines verstümmelten Tetraeders gab, zu mystifizieren. Begreiflich bemühte sich so **Galilei**, wie man aus dessen Brief an Castelli von 1610 XII 30 weiss, vergeblich, bei Mars die ver-

mnteten Phasen zu sehen; dagegen gelang dies (vgl. die 234 : c erwähnte Schrift) 1638 VIII 24 Fr. **Fontana**, der überdies auf Mars einen Flecken wahrnahm, welcher ihm eine Rotation dieses Planeten wahrscheiulich machte. — *b.* Nachdem sodanu **Huygens** (vgl. Kaiser in A. N. 592 von 1847) 1659 die Vermutung ausgesprochen hatte, dass sich Mars etwa in 24^h um seine Axe drehen möchte, erkannten im Frühjahr 1666 **Hooke** (vgl. Ph. Tr. 1666) und **Cassini** (vgl. dessen „Martis circa proprium axem revolubilis Observationes bononienses. Bononiæ 1666 in fol.") ziemlich gleichzeitig und übereinstimmend, dass ein auf Mars sichtbarer Flecken jeweilen nach etwas mehr als einem Tage wieder die gleiche Position einnehme, — ob aber diese Zeit einer oder zwei Rotationen entspreche, konnten anfänglich beide nicht mit Sicherheit entscheiden. Während sich nun **Hooke** nach seiner Schmetterlingsnatur mit diesem Halbresultate begnügte, setzte dagegen **Cassini** seine Untersuchungen energisch fort, — konnte ziemlich bald (vgl. Journ. d. Sav. 1666 V 31) als sicheres Resultat mitteilen, dass Mars in circa $24^h\ 40^m$ rotiere, — und erwarb sich so unbestreitbar das Verdienst, diese wichtige Bestimmung **zuerst** ausgeführt zu haben, — zumal sie auch durch die neuere Zeit nur wenig abgeändert worden ist, indem W. **Herschel** (Ph. Tr. 1784) $24^h\ 37^m\ 27^s$ fand, **Mädler** (vgl. „Beiträge" in 541) $24^h\ 37^m\ 23^s,7$, **Kaiser** (A. N. 1468 von 1864) $24^h\ 37^m\ 22^s,62$, Karl **Linsser** (Meiningen 1837 — Pulkowa 1869; Rechner in Pulkowa; vgl. Woch. Heis 1864) und ich (Mitth. 22 von 1866) übereinstimmend $24^h\ 37^m\ 22^s,9$, etc. Die Angaben über die Neigung des Equators von Mars gegen dessen Bahn schwanken zwischen 28° 42′ durch **Herschel** (Ph. Tr. 1784) und 24° 52′ durch **Schiaparelli** (Atti dei Lincei 1881), so dass er jedenfalls ähnliche Zonen wie die Erde besitzt. — Mehr Schwierigkeiten bietet eine etwas genaue Bestimmung der Gestalt des Mars dar, da die Differenz der beiden, etwa $9^1/_2$ und $9^1/_3$" betragenden Durchmesser, kaum viel grösser als die Unsicherheit ihrer Bestimmung ist, und so schwanken denn auch die Angaben über die Marsabplattung zwischen $^1/_{16\cdot3}$ durch **Herschel** (Ph. Tr. 1784) und 0 durch **Bessel** (Königsb. Beob. 23 von 1847), wie des nähern aus der Abhandlung „Ernst Albrecht **Hartwig** (Frankfurt a./M. 1851 geb.; Dir. Obs. Bamberg), Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars nach Heliometermessungen in Strassburg, mit Hinzuzug der anderweitig vorhandenen Mikrometerbeobachtungen (Publ. 15 Astr. Ges. von 1879)". Am acceptabelsten dürften die $^1/_{219}$ sein, welche C. A. **Young** (Am. Journ. 1880) bei der in die Nähe des Knotens fallenden und daher für solche Messungen besonders günstigen Opposition von 1879 erhielt, — zumal dieser Wert gut zu den $^1/_{228}$ passt, welche **Adams** unter plausibeln Voraussetzungen durch theoretische Betrachtungen gefunden haben soll.

540. Die klimatischen Verhältnisse auf Mars. — Da man bei Mars (539) ähnliche Rotationsverhältnisse wie bei der Erde gefunden hatte und überdies aus gewissen Erscheinungen bei demselben eine starke Atmosphäre vermuten musste, so lag schon von vorneherein die Annahme nahe, dass dieser Planet auch den unsrigen entsprechende klimatische Erscheinungen zeigen möchte [a], und als nun **Herschel** 1784 nachwies, dass die bereits von **Huygens** und **Maraldi** an den Marspolen gesehenen weissen Flecken mit den Jahreszeiten des Planeten wechseln, ja ohne Zweifel Schneedecken seien,

so konnte die Richtigkeit jener Annahme kaum mehr in Zweifel gezogen werden [b].

Zu 540: *a.* Schon **Cassini** und **Römer** schlossen aus der Wahrnebmung, dass kleine Fixsterne, wenn ihnen Mars näher rückte, allmälig dunkler wurden und, ehe sie der Rand des Planeten erreichte, ganz verschwanden, auf eine starke Atmosphäre, — während dagegen allerdings andere Beobachter, wie z. B. J. **South** bei Bedeckung eines Sternes 8. Grösse im Jahre 1832, von einer solchen successiven Lichtabnahme nichts bemerkten. — *b.* Schon 1672 bemerkte **Huygens**, wie aus der höchst verdienstlichen Arbeit „Fr. **Terby**, Aréographie ou étude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars depuis Fontana (1636) jusqu'à nos jours (1875). (Mém. cour. Brux. 39 von 1875)" hervorgeht, dass, ausser den bereits (539) erwähnten dunkeln Flecken, auf Mars bisweilen gegen die Pole hin weissliche Flecken sichtbar werden, und später machte Giacomo Filippo **Maraldi** (Perinaldo bei Nizza 1665 — Paris 1729; Obs. und Akad. Paris; er war Sohn von Dom. Cassinis Schwester Angela, und Oheim von Giovanni Domenico Maraldi, der 1709 in Perinaldo geboren wurde, von 1731—70 als Obs. und Akad. in Paris lebte, Freund von Lacaille und Herausgeber von dessen „Coelum australe" war, und 1788 zu Perinaldo starb) in seinen „Observations sur les taches de Mars (Mém. Par. 1720)" neuerdings auf diese merkwürdige Erscheinung aufmerksam, wenn auch noch ohne dieselbe enträtseln zu können. Als dann aber W. **Herschel** von 1777—83 unsern Planeten mit der ihm eigenen Umsicht und Ausdauer beobachtet hatte, konnte er in seiner klassischen Abhandlung „On the remarkables appearances of the polar regions of the planet Mars, the inclination of its axis, the position of its poles and its spheroidical figure (Ph. Tr. 1784)" nachweisen, dass diese weissen Flecken abwechselnd an den beiden Polen erscheinen, — dass sie, wie schon oben bemerkt, den Jahreszeiten auf Mars konform und höchst wahrscheinlich Schneedecken sind, — ja dass Mars eine Atmosphäre, Wasser, überhaupt nach allen Richtungen ganz analoge klimatische Verhältnisse wie die Erde zu besitzen scheint, — und es sind diese Schlussfolgerungen auch durch die neuern Beobachtungen vollständig bestätigt worden.

541. Die Marskarten. — Während **Schröter**, welcher wohl der fleissigste aller frühern Marsbeobachter war, in den auch durch ihn eifrig verfolgten dunkeln Flecken zunächst Wolkengebilde zu erkennen glaubte, so gelang dagegen etwas später **Beer** und **Mädler** der Nachweis, dass wenigstens einzelne dieser Flecken einen dauernden Bestand haben oder also der Marskugel selbst angehören, und sie waren somit berechtigt, den Versuch zu wagen, eine Marskarte zu skizzieren [a]. Was sie begonnen, wurde sodann nachmals durch verschiedene Forscher, namentlich aber durch **Kaiser**, **Proctor** und **Schiaparelli**, mit Ausdauer und Geschick weitergeführt, und die von dem letztern gelieferten Detailaufnahmen gehören wohl zu den merkwürdigsten Beobachtungsergebnissen der neuern Zeit [b].

Zu 541: *a.* Hier. **Schröter** führte von 1785—1803 nicht weniger als 217 Zeichnungen des Mars aus, welche er nebst einem erläuternden Texte unter dem Titel „Areographische Fragmente" zu veröffentlichen gedachte. Bereits

war sein Werk, das auch alle übrigen von ihm aus seinen Marsbeobachtungen gewonnenen Resultate enthalten sollte, im Manuskript nahe vollendet, als 1813 seine Besitzung in Lilienthal durch französische Truppen verwüstet wurde, wodurch ihm Mut und Mittel für weitere wissenschaftliche Thätigkeit verloren gingen. Das Manuskript blieb liegen, — kam nach Schröters Tod an einen Enkel, — und blieb unbekannt und unbenutzt, bis es dem unermüdlichen **Terby** gelang, dasselbe aufzufinden, durch seine Abhandlung „Areographische Fragmente. Manuscrit et dessins originaux et inédits de l'astronome J. H. Schröter de Lilienthal (Mém. cour. Brux. 37 von 1873)" die Aufmerksamkeit der wissenschaftlichen Welt auf dasselbe zu lenken, ja es in Besitz der Sternwarte in Leyden zu bringen, wo nun Hendricus Gerardus van de Sande **Bakhuyzen** (Haag 1838 geb.; Dir. Obs. Leyden) sofort seinen hohen Wert erkannte und dasselbe unter dem Titel „Areographische Beiträge zur genanern Kenntniss und Beurtheilung des Planeten Mars in mathematisch-physischer Hinsicht, von J. H. Schröter. Leiden 1881 in 8., Atl. in 4." der Öffentlichkeit übergab. — Unterdessen begann **Mädler** im Jahre 1828 auf der Sternwarte und wohl zum Teil auch mit Hilfe des Banquier **Beer** in Berlin ebenfalls eine Serie von Mars-Beobachtungen, die infolge zweckmässiger Anlage relativ rasch die bereits oben erwähnten Resultate ergab, welche er schon 1830 in der von einer Karte begleiteten Note „Physikalische Beobachtungen des Mars (A. N. 191)" mitteilen, — sodann in dem Mars gewidmeten, zwei Planigloben desselben enthaltenden Abschnitte der schon mehr benutzten Schrift „Beiträge zur physischen Kenntniss der himmlischen Körper im Sonnensysteme. Weimar 1841 in 4." bestätigen und noch weiter ausführen, — und sich so den Ehrentitel des ersten Begründers einer wirklichen Mars-Topographie erwerben konnte. — *b.* Es kann sich hier nicht darum handeln, alle die einzelnen Thatsachen aufzuführen, welche seit Mädlers grundlegenden Arbeiten durch die **Secchi**, **Dawes**, **Lockyer**, etc., festgestellt worden sind; dagegen bleibt noch speciell die betreffende Musterarbeit „Untersuchungen über den Planeten Mars bei dessen Oppositionen in den Jahren 1862 und 1864 (Ann. Leyden III von 1872)" zu erwähnen, in welcher F. **Kaiser** eingehende historisch-litterarische Nachweise über die frühern Marsbeobachter gab, durch kritische Vergleichung seiner eigenen Beobachtungen mit denjenigen seiner Vorgänger den sichern Beweis für die Permanenz mancher Flecken leistete, und darauf gestützt eine neue Marskarte entwarf, — sodann die unabhängig davon, zumeist auf von englischen Beobachtern gesammeltes Material gestützt, durch Rich. **Proctor** entworfene, sich durch zweckmässige Nomenklatur auszeichnende, seinen „Stereograms of Mars. London 1869 in 8." beigegebene Karte, — und vor allem die Folge der 1878—86 unter dem Titel „Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione e sulla topografia del pianeta Marte" zu Rom herausgegebenen drei Abhandlungen, in welchen **Schiaparelli** seine höchst merkwürdigen Entdeckungen mitteilte: Nicht nur bestätigte nämlich dieser ausgezeichnete Forscher, dass sich auf Mars Erscheinungen zeigen, welche auf das Vorhandensein teils fester, teils flüssiger Massen und einer starken Atmosphäre schliessen lassen, — nicht nur entwarf er eine neue, auf scharfe Messungen gegründete und einen überraschenden Detail, namentlich „zahlreiche dunkle Linien, welche die Continente des Mars nach allen Richtungen wie ein feines Netzwerk durchziehen" zeigende Karte, — sondern er wies auch ziemlich sicher nach, dass auf der Mars-Oberfläche noch jetzt Veränderungen vor sich gehen, — und hob ganz besonders das überraschende Faktum hervor, dass sich die eben erwähnten dunkeln Linien, welche

unvorgreiflich ihrer wirklichen Natur als „Kanäle“ bezeichnet werden mögen, sich zuweilen plötzlich wie verdoppeln, „wobei der Vorgang jedoch nicht etwa der ist, dass ein Canal sich teilt, sondern der, dass neben einem schon vorhandenen ein neuer auftritt, der ihm nahe parallel läuft“, gerade wie wenn unerwartet ein Doppelspath zwischen Auge und Marsbild geschoben würde. Die Versuche der **Fizeau** (Compt. rend. 1888 VI 25), Ferd. **Meisel** (A. N. 2904 von 1889), Ad. de **Boe** (Ciel et terre 1891 VII 16), etc., sich diese merkwürdigen, seither auch von einzelnen andern Beobachtern wenigstens teilweise konstatierten, aber immerhin zunächst noch weiter an Mars selbst zu verfolgenden Erscheinungen zurechtzulegen, halte ich für wohl verfrüht, um näher auf sie einzutreten und ziehe vor, zum Schlusse zur Ergänzung der Mars-Litteratur noch die Abhandlungen „Fr. **Terby**, Tableau synonymique des dénominations données aux taches de la planète Mars (Bull. Brux. 1879) und: Ensemble des observations physiques de la planète Mars faites à Louvain en 1888. Bruxelles 1889 in 4., — O. **Lohse**, Beobachtungen und Untersuchungen über die physische Beschaffenheit der Planeten Jupiter und Mars (Publ. Potsdam 9 von 1882), und: Beobachtungen des Planeten Mars (Publ. Potsdam 28 von 1891), — N. E. **Green**, Observations of Mars at Madeira in Aug. and Sept. 1877 (Mem. Astr. Soc. 44 von 1879), — **Bakhuyzen**, Untersuchungen über die Rotationszeit des Planeten Mars und über Aenderungen seiner Flecke. Leyden 1885 in 4., — Walt. **Wislicenus**, Beitrag zur Bestimmung der Rotation des Planeten Mars. Karlsruhe 1886 in 4., und: Über die Anwendung von Mikrometermessungen bei physischen Beobachtungen des Mars (A. N. 2872 von 1888), — etc.“, anzuführen.

542. Die beiden Marsmonde. — Schon **Kepler** dachte an die Existenz von Marsmonden, und die folgende Zeit kam, trotz allen Täuschungen und Misserfolgen beim Suchen nach denselben, immer und immer wieder auf den gleichen Gedanken zurück, bis er endlich nach einer betreffenden Arbeit von **d'Arrest** vollständig beseitigt schien [a]. Man kann sich nun die Überraschung denken, welche 1877 die Anzeige von Asaph **Hall**, er habe dennoch zwei Möndchen aufgefunden, veranlasste; aber seine Entdeckung bewährte sich vollständig und es hat bereits die weitere Verfolgung dieser „Duodezmöndchen“, welche die Namen **Phobos** und **Deimos** erhielten, zu einigen, namentlich für die Bildungsgeschichte unsers Sonnensystemes sehr wertvollen Resultaten geführt [b].

Zu 542: *a.* Schon 1610 dachte **Kepler**, wie uns z. B. seine „Narratio de Jovis satellitibus“ zeigt, an zwei Marsmonde, suchte sie aber sowohl am Himmel als in dem Galilei'schen Anagramme (553) vergeblich auf, während dagegen Anton Maria Schyrl oder **Schyrläus** (Rheita in Böhmen 1597 — Ravenna 1660; Kapuziner), wie er in seiner Schrift „Novem stellae circa Jovem visæ, circa Saturnum sex, circa Martem nonnulæ. Lovani 1643 in 12.“ anzeigte, solche wirklich gesehen haben wollte. Wenn sich nun auch letztere Entdeckung nicht bewährte, so gab sie doch Anstoss zu manchen Betrachtungen und mag noch 1727 Jonathan **Swift** (Dublin 1667 — Aghar in Irland 1745; Rektor in Aghar) veranlasst haben, in seinen bekannten „Travels of Gullifer“ von zwei Marstrabanten zu fabeln, von welchen der nähere von seinem Planeten nur

um drei Durchmesser desselben abstehe und ihn in 10^h umlaufe, während der äussere eine Distanz von fünf Durchmesser und $21\frac{1}{2}^h$ Umlaufszeit besitze, — den Schwiegervater von Lowitz aber, den Kapitän **Kindermann** in Dresden, neuerdings eifrig nach solchen Monden zu suchen. Letzterer glaubte dann auch wirklich, am 10. Juli 1744 einen Mond von $59^h\ 50^m\ 6^s$ Umlaufszeit aufgefunden zu haben und bildete ihn auf einer, seinem „Collegium astronomicum. Dresden 1747 in 4." beigegebenen, den etwas bombastischen Titel „Das Kindermannische mit einem Planeten vermehrte Welt-Systema" führenden Tafel sogar ab. Obschon sich nun aber auch diese zweite Entdeckung nicht bewährte, standen doch noch später **Bode** und **Littrow** für die Wahrscheinlichkeit von Marsmonden ein, und letzterer forderte (vgl. Wunder d. H. 2. A. pag. 325) förmlich auf, die Umgebung des Planeten Mars „zur Zeit seiner Opposition mit lichtstarken Fernröhren aufmerksam und wiederholt zu untersuchen". Als jedoch **d'Arrest,** welcher dieser Aufforderung bei der Opposition von 1864 unter Benutzung des trefflichen $10\frac{1}{2}$-Zöllers von Kopenhagen in ausgiebiger Weise Folge leistete, wieder nichts fand, setzte sich die Überzeugung fest, dass Mars mutmasslich gar keinen, jedenfalls keinen für unsere Hilfsmittel erkennbaren Mond besitze. — *b.* Nachdem bereits 1877 VIII 19 das transatlantische Kabel eine erste Kunde von der Entdeckung nach Europa gebracht hatte, erfuhr man alsbald des genauern, dass **Hall** den Deimos schon VIII 11 mit dem 26-Zöller Clarks und dann VIII 17 bei Verdecken der Marsscheibe auch noch den Phobos auffand, ja erhielt innerhalb Jahresfrist durch die von ihm veröffentlichten „Observations and orbits of the satellites of Mars. Washington 1878 in 4." eine erste Theorie dieser neuen, inzwischen auch in Europa wiederholt und zum Teil mit viel kleinern Instrumenten gesehenen Weltkörperchen, von denen Deimos nur etwa $10\frac{1}{2}$, Phobos sogar nur etwa 9^{km} Durchmesser besitzt. Nach den seitherigen Untersuchungen von **Newcomb** beträgt die Umlaufszeit des Deimos $30^h\ 14^m = 4 \times 7^h\ 33\frac{1}{2}^m$, — diejenige des Phobos $7^h\ 38^m$, — und mit ihrer Hilfe ergiebt sich (270) die Marsmasse gleich $1/_{3090000}$, d. h. nahe wie sie früher **Leverrier** aus den Störungen erhielt. Bemerkenswert ist, dass durch Phobos das früher angenommene Gesetz, nach welchem die Revolutionsdauer eines untergeordneten Körpers grösser als die Rotationsdauer des übergeordneten sein sollte, über den Haufen geworfen wurde.

543. Die Lücke zwischen Mars und Jupiter. — Nachdem **Kepler** (265) das „Mysterium cosmographicum" gefunden zu haben vermeinte, kam er natürlich von seinem frühern Glauben an eine zwischen Mars und Jupiter bestehende Lücke zurück; aber derselbe wurde alsbald von andern wieder aufgenommen, und als **Titius** 1766 zeigte, dass sich die Distanzen der Planeten von der Sonne sehr nahe aus der empirischen Formel $0{,}4 + 0{,}3 \cdot 2^n$ ergeben, jedoch für $n = 3$ ein gerade jener Lücke entsprechender Repräsentant fehle, hielt man deren Existenz sozusagen für erwiesen, zumal als nachträglich der 1781 aufgefundene Uranus ebenfalls in diese Formel passte [a]. — Infolgedessen wagte **Zach** schon 1785, gestützt auf gewisse hypothetische Voraussetzungen, förmliche Elemente des fehlenden Himmelskörpers zu berechnen, und eine von ihm 1787 begonnene Revision der Sterne des Tierkreises war grossenteils durch

die Hoffnung veranlasst, dabei auf den „verborgenen Planeten zu stossen“. Da sich ihm jedoch bald zeigte, dass diese Revision und die damit verbundene Aufgabe „à chercher une aiguille dans une botte de foin“ die Kräfte eines Einzelnen übersteige, so stellte er auf einer im Herbst 1800 zu Lilienthal veranstalteten Konferenz den zweckgemässen Antrag, hiefür eine eigene Gesellschaft zu gründen und 24 Astronomen zu gewinnen, welche sich in den Tierkreis zu teilen, detaillierte Karten zu bearbeiten und diese immer wieder mit dem Himmel zu vergleichen hätten [b].

Zu 543: *a.* Die oben erwähnte, von Joh. Daniel **Titius** (Konitz in Westpreussen 1729 — Wittenberg 1796; Prof. math. et phys. Wittenberg) in weiterer Verfolgung der von Christian **Wolf** über die Planetendistanzen angestellten Betrachtungen aufgefundene, sodann von ihm in seiner deutschen Ausgabe von Bonnets „Contemplation de la nature“ publizierte und später durch **Bode** wieder in Erinnerung gebrachte Formel giebt für die

Annahmen n =	$-\infty$	0	1	2	3	4	5	6
die Werte	0,4	0,7	1,0	1,6	2,8	5,2	10,0	19,6
während	☿	♀	♁	♂		♃	♄	⛢
die Distanzen	0,4	0,7	1,0	1,5		5,2	9,5	19,2

haben, so dass sie für die alten Planeten (ja noch für den nachträglich entdeckten Uranus) ganz vorzüglich passte, und daher in der That ein gewisses Recht gab, auf einer zwischen Mars und Jupiter vorhandenen Lücke zu bestehen. Wie letztere ausgefüllt wurde, wird unter den nächstfolgenden Nummern auseinandergesetzt werden; dagegen ist hier noch hervorzuheben, wie gerade auf diesem Gebiete der Unterschied zwischen gesunder Empirie und krankhafter Spekulation entschieden zu Tage trat: Während sich nämlich **Titius** durch Studium wirklich bestehender Zahlenverhältnisse, das allerdings auch in Spielerei ausarten kann, einen höchst ehrenvollen Platz in der Geschichte der Astronomie erwarb, ja durch seinen Fund noch auf die (558) zur Entdeckung Neptuns führenden Rechnungen einen gewissen Einfluss ausübte, so blamierte sich dagegen Friedrich **Hegel** (Stuttgart 1770 — Berlin 1831; Prof. philos. Jena, Heidelberg und Berlin) durch den in seiner „Dissertatio de orbitis planetarum. Jenæ 1801 in 8.“ im (544) möglichst ungünstigsten Momente unternommenen Versuch, vom philosophischen Standpunkte aus jenes Ergebnis der Induktion zu widerlegen, so gründlich, dass seine Arbeit nicht nur sofort von Herzog **Ernst** von Sachsen-Gotha (1745—1804; Gönner von Zach) als ein „Monumentum insaniæ sæculi decimi noni“ bezeichnet wurde, sondern deren Aufnahme in die gesammelten Werke noch 1842 **Schumacher** veranlasste, an Gauss zu schreiben: „Dass Hegels Verehrer die famöse Dissertation wieder haben abdrucken lassen, zeigt wenig Pietät; unter Noah's Söhnen war doch Einer, der die Schaam seines Vaters bedeckte, aber die Hegelianer rissen den Mantel noch weg, den Zeit und Vergessenheit über die Schande ihres Meisters geworfen hatten“, worauf **Gauss** antwortete, dass dieser Vergleich ein wenig hinke, da sich nach der h. Schrift Noah nur Ein mal betrunken und sonst für einen verständigen Mann gegolten habe, während Hegels „insania“ noch „Weisheit“ gegen spätere Aussprüche desselben sei. — *b.* Die von **Zach** (vgl. Berl. Jahrb. auf 1789) für den von ihm vermuteten Planeten bestimmten Elemente

a = 2,82 e = 0,14 P = 192° 6' U = 4",74 i = 1° 36' ☊ = 117° 40'

passen in der That ganz gut für einen Planetoiden. — An der Konferenz in Lilienthal nahm, ausser Zach und Schröter, namentlich auch **Olbers** Teil.

544. Die Entdeckung der Ceres durch Piazzi. — Ehe **Piazzi** die Nachricht zugegangen war, dass auch er zu den 24 Auserwählten gehöre, absolvierte er nicht nur den ihm zugedachten Teil, sondern die volle Aufgabe auf eigene Faust, indem er am ersten Tage des neuen Jahrhunderts einen Wandelstern auffand, der sich alsbald als der gesuchte Planet entpuppte und den Namen **Ceres** erhielt, — jedoch allerdings durch ungünstige Verumständungen wohl bald wieder auf längere Zeit verloren gegangen wäre, wenn nicht der junge **Gauss** nach ihm eigentümlicher Methode (503) auf Grund der Piazzi'schen Beobachtungen eine treffliche Ephemeride aufgestellt hätte, welche es **Olbers** möglich machte, 1802 I 1 den Flüchtling wieder einzufangen und so den Jahrestag der ersten Entdeckung in schönster Weise zu begehen [a].

Zu 544: *a.* Schon mehrere Jahre mit Aufnahme eines neuen Sternkataloges beschäftigt, hatte **Piazzi** unter anderm 1801 I 1 einen kleinen Stern im Stier beobachtet, und als er sodann dessen Position an folgenden Abenden übungsgemäss revidierte, fand er sie fortwährend etwas verändert: Er hatte also einen Wandelstern, mutmasslich einen kleinen Kometen gefunden, — setzte daher seine Beobachtungen fort, bis er von Mitte Februar hinweg, erst durch Unwohlsein, dann durch schlechtes Wetter, daran verhindert wurde, — und teilte auch schon I 23 Oriani, I 24 Bode seine Entdeckung mit. Diese Briefe trafen aber infolge der damaligen Kriegszustände in Berlin erst III 20, in Mailand sogar erst IV 5 ein, wo die Nova wegen ihres Standes zur Sonne nicht mehr zu beobachten war, — jedoch konnten (493) **Bode** und **Zach** aus dem Umstande, dass nach Piazzis Angaben die erst rückläufige Bewegung bei etwa 56° nach der Opposition rechtläufig geworden war, sofort mit ziemlicher Sicherheit schliessen, dass sie im Gegensatze zu Hegels „insania (543)“ ein der scheinbaren Lücke zugehörender Planet sein dürfte, und dies bestätigte sich, als beim Versuche einer Bahnbestimmung eine Parabel den Beobachtungen gar nicht, eine Kreisbahn von 2,8 Radius wenigstens einigermassen genügte. Dagegen waren allerdings die erhaltenen Kreiselemente nicht genau genug, um darauf eine auch nur etwas sichere Ephemeride zu Gunsten der Wiederauffindung des verlorenen Weltkörpers basieren zu können, und es war so ein grosses Glück, dass der junge **Gauss** den Astronomen mit seinem eminenten Talente zu Hilfe kam, indem er eine neue, später in seiner „Theoria motus (503)“ noch weiter entwickelte Methode zur Berechnung elliptischer Elemente auffand, welche von der seinen Vorgängern nötigen Voraussetzung geringer Neigung und Excentricität frei war, — damit den sämtlichen Piazzi'schen Bestimmungen genügende Elemente berechnete, — und so vom November hinweg, wo Hoffnung eintrat, die nunmehr auch von **Piazzi** als Planet betrachtete und **Ceres** Ferdinandea benannte Nova wieder sehen zu können, die Astronomen zur Erleichterung der Aufsuchung mit einer guten Ephemeride versehen konnte. Leider war jedoch die Witterung gegen Ende 1801 zu schlecht, um mit Erfolg suchen zu können; dagegen fand 1802 I 1 **Olbers**, wie schon erwähnt, Ceres wirklich wieder auf, und zwar nahe an der durch **Gauss** für jenen Tag

bezeichneten Stelle. — Für weitern Detail auf die Schriften „**Piazzi**, Risultati delle osservazioni della nuova stella scoperta il primo gennajo 1801 nell' osservatorio di Palermo. Palermo 1801 in 12., und: Della scoperta del nuovo pianeta Cerere Ferdinandea. Palermo 1802 in 8., — **Bode**, Von dem neuen, zwischen Mars und Jupiter entdeckten achten Hauptplaneten des Sonnensystems. Berlin 1802 in 8., — etc.", ganz besonders aber auf die von **Zach** herausgegebene „Monatliche Correspondenz" verweisend, füge ich noch zum Schlusse aus einem Briefe, welchen **Gauss** nach Wiederauffindung der Ceres an Zach schrieb, folgende Stelle bei: „Ich kann nicht umhin zu erwähnen, was für eine Wohlthat für die Astronomie bei dieser Gelegenheit das Daseyn einer Zeitschrift wie die M. C. gewesen ist. Mit welcher Lauigkeit und Gleichgültigkeit würde man nicht Piazzi's Entdeckung aufgenommen haben, wenn Sie nicht durch Ihre Zeitschrift alle Nachrichten darüber gesammelt, auf das schnellste verbreitet, das allgemeine Interesse erweckt, Gründe und Gegengründe abgewogen, und den Planetismus dieses Gestirnes zur höchsten Wahrscheinlichkeit gebracht hätten. Wahrscheinlich hätten nur wenige Astronomen sich die Mühe gegeben es wieder aufzufinden, da selbst aller jetzigen Astronomen Lehrer und Meister (Lalande) noch vor Kurzem den neuen Planeten so stark bezweifelte".

545. Die Entdeckung von drei weitern Asteroiden. — Als **Olbers** bald nach Wiederentdeckung der Ceres in ihrer Nähe noch ein zweites Wandelsternchen, die nachmalige **Pallas**, auffand und die Rechnungen von **Gauss** auch den neuen Fund der frühern Lücke zuwiesen, entstand vorerst „embarras de richesse", doch einigte man sich bald dahin, dass, es mögen Ceres und Pallas als Trümmer eines „katastrophierten" Planeten oder als Glieder eines Asteroidenringes angesehen werden, jedenfalls weiter zu suchen sei, und wirklich fand sodann 1804 **Harding** die **Juno** und 1807 **Olbers** noch die **Vesta**, so dass nun vier solche kleine Planeten vorhanden waren, aber auch mit diesen das neue System abgeschlossen erschien [a].

Zu 545: *a.* Schon 1802 VI 1 schrieb **Olbers** (Berl. Jahrb. 1805) an Bode, man könne sich fragen, „ob Ceres und Pallas immer so getrennt in friedlicher Nachbarschaft ihre jetzigen Bahnen durchlaufen haben, oder ob beide nur Trümmer eines ehemaligen grössern Planeten seien, den irgend eine grosse Katastrophe zersprengte", — während dagegen im September desselben Jahres Joh. Sigismund Gottfried **Huth** (Roslau in Anhalt 1763 — Dorpat 1818; Prof. math. et phys. Dorpat) sich im Sinne von Kant (Berl. Jahrb. 1807) gegen Herschel dahin äusserte, es komme ihm wahrscheinlicher vor, „dass diese Planetchens ebenso alt als alle übrigen seien, und dass die Planeten-Materie in der Schicht zwischen Mars und Jupiter, zur Zeit jener allgemeinen Abscheidung aus dem Himmels-Fluido, dort in viele kleinere Kugeln coagulirt sey", ja er würde sich „gar nicht verwundern, wenn Ceres und Pallas noch mindestens zehn Mitplaneten" erhielten. Momentan fand die Idee von **Olbers**, welche ebenfalls noch andere Trümmer vermuten liess, mehr Anklang, und sowohl er selbst, als der ganz auf seine Ansichten eingehende **Harding**, liessen sich von derselben bei ihrem weitern Suchen leiten, indem sie hauptsächlich die beiden Stellen in der Jungfrau und in den Fischen im Auge behielten,

welche der Knotenlinie der Pallas- und Ceres-Bahn entsprachen, somit mutmasslich auch von allfälligen andern Trümmern von Zeit zu Zeit passiert werden mussten. Als sodann bei diesem systematischen Suchen **Harding** 1804 IX 1 in den Fischen die **Juno**, und **Olbers** 1807 III 29 in der Jungfrau die **Vesta** auffand, schien die Richtigkeit der Olbers'schen Hypothese, „deren Wahrheit oder Falschheit" übrigens ihr Urheber (Berl. Jahrb. 1810) dahingestellt sein liess, indem er sie nur benutzte, „wozu Hypothesen überhaupt nützlich sein können, nämlich bei Beobachtungen zu leiten", in auffälliger Weise bestätigt zu sein, und noch **Lagrange** sprach sich 1812 in seiner Note „Sur l'origine des Comètes (Conn. d. t. 1814)" zu ihren Gunsten aus. Als sich dann aber gegen die Mitte unsers Jahrhunderts die sofort zu besprechenden Neuentdeckungen rasch folgten, führte jede derselben der Ansicht von **Huth** Oberwasser zu, und es bedurfte kaum der Zusammenstellungen und Rechnungen der **Encke**, **Newcomb**, etc., um ihr zum vollständigen Siege zu verhelfen.

546. Die durch Hencke inaugurierte neue Serie von Entdeckungen. — Während die 1824 durch die Berliner Akademie auf Wunsch von **Bessel** angeordnete, dem frühern Plane (543) ganz entsprechende Aufnahme der sog. „akademischen Sternkarten" unter Leitung von **Encke** noch in voller Ausführung begriffen war, nämlich im Jahre 1845, fand ein eifriger Liebhaber der Astronomie, Karl Ludwig **Hencke**, auf Grund von ihm selbst entworfener Specialkarten in der **Astræa** einen fünften, ja 1847 in der **Hebe** noch einen sechsten Planetoiden auf, und inaugurierte dadurch eine neue, sich allerdings später auf jene akademischen Karten stützende Serie von Entdeckungen, welche eine die kühnsten Erwartungen weit übersteigende Ausdehnung gewann und immer noch nicht abgeschlossen scheint [a]. Es würde sich jedoch hier kaum lohnen, alle diese einzelnen Funde und die ihnen beigelegten Namen aufzuführen, und es mag genügen, mitzuteilen, dass gegenwärtig schon über dreihundert solcher Planetchen registriert sind, deren Überwachung bereits ungebührlich viel Zeit in Anspruch nimmt, ja der Nutzen einer Neuentdeckung schon jetzt kaum mehr im richtigen Verhältnis zu der durch sie veranlassten Mehrarbeit steht [b].

Zu 546: *a.* In Beziehung auf die schon früher (190) erwähnten „Akademischen Sternkarten" mag noch beigefügt werden, dass **Bessel** 1824, gestützt auf seine Zonenbeobachtungen (592), für die Æ 19 bis 20^h und D 15 bis — 15° eine Kartenprobe entworfen und der Berliner Akademie mit dem Wunsche eingesandt hatte, sie möchte eine solche Karte patronisieren, während er ungefähr gleichzeitig an Gauss schrieb: „Dass die Ausführung höchst nützlich und unserer Zeit ehrenvoll sein würde, ist kaum zu bezweifeln, ebenso wenig als dass bei dieser Gelegenheit einige neue Planeten entdeckt werden würden". — Während **Olbers** und seine Freunde etwa 1816 das Suchen nach weitern Planetoiden als ein auch gar zu wenig lukratives Geschäft definitiv aufgegeben hatten, wurde dasselbe etwa 1830 durch **Hencke** wieder aufgenommen, der sich mit grosser Ausdauer, und (nach Galles Zeugnis) ganz unabhängig von dem soeben besprochenen akademischen Unternehmen, Specialkarten anlegte

und dieselben immer und immer wieder mit dem Himmel verglich, bis er endlich nach 15 Jahren einen ersten und dann 2 Jahre später noch einen zweiten Erfolg verzeichnen konnte. Durch diese ermutigt, wandten sich sodann alsbald viele jüngere Kräfte demselben, durch die unterdessen publizierten Hilfsmittel überdies immer zugänglicher gewordenen Gebiete zu, und so wurden im Laufe von wenigen Decennien ganz ungeahnte Resultate erzielt, auf die im folgenden noch näher eingetreten werden soll. — *b.* Als glückliche Entdecker von neuen Planetoiden oder Asteroiden folgten Hencke zunächst die John Russel **Hind** (Nottingham 1823 geb.; Obs. von Bishop und Superint. Naut. Alm.), A. de **Gasparis**, Hermann **Goldschmidt** (Frankfurt 1802 — Fontainebleau 1866; Historienmaler zu Paris), J. **Chacornac**, etc., — dann die Rob. **Luther**, Norman Robert **Pogson** (Nottingham 1829 — Madras 1891; damals Obs. Oxford, dann Dir. Madras), Wilhelm **Tempel** (Nieder-Cunersdorf in der Lausitz 1821 — Arcetri bei Florenz 1889; erst Lithograph, dann Dir. Obs. Arcetri), Jam. **Watson**, etc., — nachher die A. **Borrelly**, G. **Coggia**, Paul et Prosper **Henry**, J. **Perrotin**, etc., — jedoch wurden sie alle durch die Johann **Palisa** (Troppau 1848 geb.; Obs. Währing bei Wien) und C. H. **Peters** übertroffen, da der erstere allein bereits über ein halbes Hundert solcher Entdeckungen aufzuweisen hat, und der letztere bis zu seinem 1890 erfolgten Tode das halbe Hundert wenigstens nahezu erreichte. — Dass **viele** Glieder der Kette noch fehlen, ersieht man aus den fortwährenden, in der neuesten Zeit von Max **Wolf** auch durch photographische Aufnahmen erzielten Entdeckungen, — **wie viele** es aber sind, wird man kaum erfahren, selbst wenn die (594) projektierte vollständige Aufnahme des Sternhimmels vollendet sein wird. — Dass noch jetzt jeder neu aufgefundene Planetoid durch seinen Entdecker oder einen von diesem erbetenen Gevattersmann einen Namen erhält, ist eine unschuldige Spielerei; dagegen ist man glücklicherweise ganz von der anfänglichen Übung zurückgekommen, für jeden dieser kleinen Weltkörper ein eigenes Zeichen einzuführen, und hat allgemein ein 1851 von **Gould** und **mir** vereinbartes, sodann von uns **Encke** beliebtes System eingeführt, — nämlich einfach die in einen Kreis eingeschlossene Ordnungsnummer der Entdeckung als Bezeichnung zu benutzen.

547. Die Austeilung der Asteroiden. — Wie sich die Anzahl der entdeckten Asteroiden mehrte, nahm auch das Bedürfnis zu, ihre Austeilung zu studieren, und es ist dadurch nicht nur (545) festgestellt worden, dass diese kleinen Körper nichts weniger als Trümmer sind, sondern dass sie ein in sich abgeschlossenes, ganz eigentümliches, eine Art Übergang von den Hauptplaneten zu den Kometen bildendes System repräsentieren, ja es ist namentlich **d'Arrest** und **Kirkwood** gelungen einige dasselbe charakterisierende Verhältnisse aufzudecken [a].

Zu 547: *a.* Als 1879 die Anzahl der bekannten Asteroiden auf 200 gestiegen war, lag bereits ein genügendes, d. h. die bei solchen Aufsuchungen unvermeidlichen Zufälligkeiten überdeckendes Material vor, um den Bau des Systemes näher prüfen zu können, und es ergaben sich aus demselben folgende, durch die seitherigen Neuentdeckungen im grossen Ganzen bestätigten Resultate: **Die mittlern Distanzen** der Asteroiden von der Sonne schwanken zwischen

2,1327 und 3,9437

so dass sich der von ihnen gebildete Ring sowohl von Mars (1,5237), als von Jupiter (5,2028) sehr entschieden ablöst; **die Excentricitäten** liegen zwischen

0,0054 und 0,3831

jedoch so, dass ganz schwache (0,00 bis 0,05 nur bei 10) und ganz starke (0,30 bis 0,40 nur bei 9) selten vorkommen und die grosse Mehrzahl (101 fallen zwischen 0,10 und 0,20) gegen den mittlern Wert hin fällt; **die Neigungen** variieren von

$0^{\circ}\,41'$ bis $34^{\circ}\,34'$

doch immerhin so, dass kleine (0 bis 10° bei 136) besonders häufig, und ganz grosse (20 bis 35° bei 13) nur selten, sowie nur gegen die Mitte des Systemes (in Distanz 2,4 bis 3,2) erscheinen; **die aufsteigenden Knoten** endlich verteilen sich (wenn auch nicht sehr regelmässig, da auf die vier Quadranten der Reihe nach 62, 55, 39 und 44 Knoten fallen, — im Maximum 15 auf 0 bis 10°, im Minimum 0 auf 110 bis 120°) über die ganze Ekliptik, ohne dass ein bestimmtes Gesetz ersichtlich ist. In Beziehung auf **die scheinbare Grösse zur Zeit der Opposition** erfährt man aus dem Täfelchen I

Nro.	Grösse								
	6 — 7	7 — 8	8 — 9	9 — 10	10 — 11	11 — 12	12 — 13	13 — 14	14 — 15
1—50	1	1	7	17	15	7	2	0	0
51—100	0	0	0	2	19	23	5	0	1
101—150	0	0	0	0	15	28	7	0	0
151—200	0	0	0	1	4	23	17	4	1
1—200	1	1	7	20	53	81	31	4	2

nicht nur, dass sich die mittlere Grösse, wie wohl selbstverständlich ist, von Serie zu Serie verminderte, sondern dass sich auch in dieser Hinsicht die grosse Mehrzahl gegen die Mitte hin drängt. Letzteres zeigt sich übrigens am allerschönsten, wenn man die 200 Asteroiden nach ihren mittlern (entsprechend dem Intervall 0,05 abgerundeten) Distanzen D von der Sonne ordnet, und dann einfach durch Abzählen die jeder Distanz zukommende Anzahl n bestimmt, indem sich so das Täfelchen II

D	n	D	n	D	n	D	n	D	n	D	n	D	n
2,00	0	2,30	3	2,60	17	2,90	6	3,20	8	3,50	4	3,80	0
05	0	35	11	65	18	95	1	25	0	55	0	85	0
10	0	40	16	70	13	3,00	6	30	0	60	0	90	0
15	1	45	15	75	27	05	5	35	0	65	0	95	2
20	2	50	0	80	7	10	8	40	2	70	0	4,00	0
25	2	55	5	85	5	15	14	45	2	75	0	05	0
$\Sigma n =$	5		50		87		40		12		4		2

ergiebt, das wohl keines Kommentars bedarf, von dem wir dagegen unten noch weitern Gebrauch machen werden. — Nachdem schon V. **Mauvais** in seiner Note „Sur les intersections mutuelles des plans des orbites des petites planètes (Compt. rend. 1846)“ und B. A. **Gould** in seinen „Untersuchungen über die

gegenseitige Lage der Bahnen der zwischen Mars und Jupiter sich bewegenden Planeten. Göttingen 1848 in 4.“ einige betreffende Untersuchungen gemacht, sprach **d'Arrest** in seiner Abhandlung „Über das System der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter. Leipzig 1851 in 8.“ das bestimmte Gesetz aus, dass die Bahn jedes der Asteroiden in andere Bahnen eingreife, oder also die verschiedenen Bahnen förmlich miteinander verkettet seien, — und etwa 1869 machte (vgl. Monthly Not. 29) Daniel **Kirkwood** (Harford in Maryland 1814 geb.; Prof. math. Indiana Univ.) auf die merkwürdige, durch unser Täf. II bestätigte Thatsache aufmerksam, dass sich in den Distanzen

$$a = 2{,}50 \qquad 2{,}95 \qquad 3{,}30 \qquad 3{,}65$$

keine oder auffallend wenige Asteroiden vorfinden, zugleich über diese 4 Lücken folgende Betrachtung anstellend: Bezeichnet man die den a entsprechenden Umlaufszeiten mit t, die der Jupiterdistanz A = 5,20 zukommende aber mit T, so dass nach dem dritten Kepler'schen Gesetze

$$t : T = (a : A)^{3/2}$$

zu setzen ist, so findet man für die vier Lücken

$$t : T = 0{,}3334 \qquad 0{,}4273 \qquad 0{,}5056 \qquad 0{,}5881$$
$$\fallingdotseq \tfrac{1}{3} \qquad \tfrac{3}{7} \qquad \tfrac{1}{2} \qquad \tfrac{3}{5}$$

d. h. es stehen die jenen Lücken korrespondierenden Umlaufszeiten zu derjenigen Jupiters in so einfachen Verhältnissen, dass es nicht unwahrscheinlich ist, es habe jener mächtige Planet durch seine regelmässig wiederkehrende Einwirkung die Elemente der ursprünglich in diesen Lücken stehenden Körperchen nach und nach abgeändert, oder also diese gewissermassen herausgeworfen. Letzteres ist nun allerdings seither durch die betreffenden Untersuchungen der **Newcomb**, **Tisserand**, **Gyldèn**, etc. wieder sehr in Frage gestellt worden; aber die Thatsache selbst bleibt deswegen doch bestehen. — Für weitere Untersuchungen vgl. „C. **Hornstein**, Zur Kenntniss des Asteroiden-Systemes (Wien. Sitz. 84 von 1881), — A. **Svedstrup**, Les petites planètes entre Mars et Jupiter (A. N. 2740—41 von 1886; Auszug aus Preisschrift), — Johannes **Glauser** (Muri bei Bern 1844 geb.; Ing. Zürich), Die Lage der Asteroiden-Bahnebenen (A. N. 2794 von 1887), — Em. **Liais** et L. **Cruls**, Distribution du groupe des planétoides compris entre Mars et Jupiter (Ann. de Rio IV 1 von 1889), — etc.

548. Stampfers Methode der Grössenbestimmungen. — Die Unsicherheit der direkten Messung der Asteroiden veranlasste Simon **Stampfer** [a], in weiterer Ausführung einer schon von **Olbers** ausgesprochenen Idee, einen indirekten Weg einzuschlagen, nämlich das Grössenverhältnis aus dem scheinbaren Glanze abzuleiten, und es wird seitdem sein Verfahren allgemein mit bestem Erfolge angewandt [b].

Zu 548: *a.* Simon **Stampfer** (Windisch-Matrey im Tyrol 1792 — Wien 1864) war erst Prof. math. Salzburg, dann Prof. geod. Wien. Vgl. für seine höchst interessante Jugendgeschichte Bd. 37 von Wurzbachs Lexikon. — *b.* Da sich aus direkter Messung widersprechende Resultate ergaben, indem z. B. **Schröter** für den Durchmesser der Pallas über 300 und dagegen W. **Herschel** kaum 40 g. M. erhielt, so dachte schon **Olbers** (vgl. Berl. Jahrb. 1808 p. 179)

daran, dieselbe durch das oben angedeutete Verfahren zu ersetzen, welches dann durch **Stampfer** in seiner Abhandlung „Über die kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter (Wien. Sitz. 7 von 1851)" in folgender Art weiter ausgeführt wurde: Bezeichnen r und ϱ die Entfernungen eines Planeten des Durchmessers d von Sonne und Erde, und ist A die für alle Planeten als nahe gleich annehmbare Albedo (146), so kann man seine Helligkeit

$$H = A \cdot d^2 : (r^2 \cdot \varrho^2) \qquad 1$$

setzen. Anderseits sind die Klassen für die scheinbare Grösse so angenommen, dass die entsprechenden Helligkeiten eine absteigende geometrische Progression bilden, so dass, wenn die Helligkeit von Sternen erster Grösse als Einheit gewählt wird, diejenige eines Sternes der Grösse m

$$H = 1 : \alpha^{m-1} \qquad 2$$

gesetzt werden kann, wo auch α eine Konstante ist. Man hat also

$$1 : \alpha^{m-1} = A \cdot d^2 : (r^2 \cdot \varrho^2) \qquad \text{oder} \qquad r^2 \cdot \varrho^2 = A \cdot d^2 \cdot \alpha^{m-1} \qquad 3$$

Bezeichnet nun δ den in Sekunden ausgedrückten scheinbaren Durchmesser des Planeten, so ist

$$d : \varrho = \mathrm{Si}\,\delta \qquad \text{oder} \qquad d = \varrho \cdot \delta \cdot \mathrm{Si}\,1'' \qquad 4$$

und setzt man überdies

$$\alpha = b^2 \qquad \alpha : A = C^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,1'' \qquad 5$$

so geht 3 in

$$r \cdot C = \delta \cdot b^m \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Lg}\,r + \mathrm{Lg}\,C = \mathrm{Lg}\,\delta + m \cdot \mathrm{Lg}\,b \qquad 6$$

über, so dass

$$0 = n + x - m \cdot y \quad \text{wo} \quad n = \mathrm{Lg}\,r - \mathrm{Lg}\,\delta \quad x = \mathrm{Lg}\,C \quad y = \mathrm{Lg}\,b \qquad 7$$

Stampfer nahm nun der Erfahrung gemäss an, dass sich für r, δ und m die Werte

Gestirn	r	δ	m	m'
Neptun . . .	30,040	2",500	7,80	7,83
Uranus . . .	19,180	4,220	5,80	5,80
Saturn . . .	9,393	18,820	1,00	1,02
Jupitersmonde	5,203	1,465	5,25	5,25

entsprechen, — konnte so 7 viermal aufschreiben, — daraus nach der Methode der kleinsten Quadrate die Werte

$$x = 0{,}5076 \qquad y = 0{,}20286 \qquad \text{oder} \qquad C = 3{,}22 \qquad b = 1{,}5954$$

finden, — und damit rückwärts nach 7 für m die in obiges Täfelchen als m' eingetragenen Werte berechnen, deren Übereinstimmung mit den m wirklich nichts zu wünschen übrig lässt. Es ist daher wohl einerseits die gemachte Voraussetzung konstanter Albedo als zulässig zu betrachten, und anderseits stimmt der erhaltene Wert für b mit dem früher von **Steinheil** in seinen „Helligkeitsmessungen" gegebenen Werte $\sqrt{2{,}83} = 1{,}68$ befriedigend überein, und noch besser mit den 1,587, welche **Stampfer** aus Vergleichung eigener photometrischer Messungen mit Argelander'schen Grössenbestimmungen erhielt; immerhin glaubte er schliesslich, seine Werte auf

$$C = 3{,}25 = \overline{0{,}5119} \qquad b = 1{,}6 = \overline{0{,}2041}$$

abrunden zu sollen. — Soll d in geographischen Meilen ausgedrückt werden, so ist natürlich auch ϱ in derselben Einheit zu geben, d. h. mit der in ihr

ausgedrückten mittlern Distanz Δ der Erde von der Sonne zu multiplizieren. Bezeichnet aber $\odot$ die Sonnenparallaxe, so ist

$$\Delta \cdot \text{Si} \odot = 180 \cdot 15 : \pi \qquad \text{oder} \qquad \Delta \fallingdotseq 180 \cdot 15 : (\pi \cdot \odot \cdot \text{Si}\, 1'')$$

und wenn man daher den zur Zeit von Stampfers Arbeit noch allgemein angenommenen Wert $\odot = 8'',58$ einführt, so erhält man

$$\Delta = 2,\overline{0007} : \text{Si}\, 1'' \qquad \mathbf{8}$$

folglich mit Hilfe von **4** und **6**

$$\text{Lg}\, d = 2,5126 + \text{Lg}\, r + \text{Lg}\, \varrho - 0,2041 \cdot m \qquad \mathbf{9}$$

wonach der Durchmesser bequem berechnet werden kann. So z. B. waren 1802 IV 5 für Pallas $\text{Lg}\, r = 0,3787$, $\text{Lg}\, \varrho = 0,1560$, $m = 7,5$, also erhält man nach 9 für diesen Planeten den Durchmesser 32,9 g. M., — während $\odot = 8'',9$ nur 31,7 g. M. ergeben würde. — Auch **Argelander** adoptierte in seiner Note „Über die Helligkeiten der kleinen Planeten (A. N. 982 von 1855)" die 9, fügte ihr aber noch, unter a die halbe grosse Axe der Bahn verstehend, die Formel

$$\text{Lg}\, d = 2,5126 + \text{Lg}\, a + \text{Lg}\,(a - 1) - 0,2041 \cdot M \qquad \mathbf{10}$$

bei, welche in der That aus 9 sofort folgt, wenn man $r = a$ und $\varrho = a - 1$ annimmt, unter M aber die scheinbare Grösse versteht, welche der Planet zur Zeit einer Opposition zeigt, falls er und die Erde zugleich in ihrer mittlern Distanz von der Sonne stehen. Nimmt man aber die Lichtstärke des Planeten zu dieser Zeit als Einheit an und setzt die der scheinbaren Grösse m entsprechende Lichtstärke gleich h, so hat man nach **1**

$$1 : h = A \cdot \frac{d^2}{a^2 (a-1)^2} : A \cdot \frac{d^2}{r^2 \cdot \varrho^2} \qquad \text{oder} \qquad h = \frac{a^2 (a-1)^2}{r^2 \cdot \varrho^2} \qquad \mathbf{11}$$

während nach **2** und **5**

$$1 : h = 1 : \alpha^{M-m} \qquad \text{oder} \qquad \text{Lg}\, h = 2 \cdot (M - m) \cdot \text{Lg}\, b$$

und somit

$$M = m + \Delta m \qquad \text{wo} \qquad \Delta m = \text{Lg}\, h : (2 \cdot \text{Lg}\, b) = 2,45 \cdot \text{Lg}\, h \qquad \mathbf{12}$$

so dass man aus dem nach 11 erhältlichen und im Berl. Jahrb. für jede Opposition bereits gegebenen Werte von h leicht Δm und damit aus einer Grössenbestimmung m den Wert von M, oder aus letzterm m ableiten kann.

549. Die Entdeckung der Jupitersmonde. — Zu den bedeutendsten und folgereichsten Entdeckungen, welche **Galilei** mit seinem Fernrohr am Himmel machte, gehört unbestritten diejenige, dass er bei Jupiter, dem Osiris der Egypter und dem Phaeton der Griechen, vier Monde auffand, somit den Beweis erbrachte, dass auch ein sich bewegender Körper Centrum von Bewegungen sein kann, und damit das Hauptargument, welches die Peripatetiker gegen das Coppernicanische System ausgespielt hatten, über den Haufen warf [a]. Auf die ebenfalls grosse Wichtigkeit dieser Entdeckung für die Bestimmung der Meereslänge und der Geschwindigkeit des Lichtes, sowie auf die zur Erstellung der nötigen Tafeln gemachten vielfachen Beobachtungen der Monde und ihrer Verfinsterungen ist schon früher (406, 464, 466) wiederholt hingewiesen worden; dagegen bleibt noch an die durch **Bradley** zuerst bemerkten

und später durch **Laplace** als notwendig erwiesenen Beziehungen zwischen ihren Umlaufszeiten, sowie an einige andere betreffende Verhältnisse zu erinnern [b].

Zu 549: *a.* Nachdem **Galilei** 1610 I 7 bei Jupiter drei ihn begleitende Sternchen (unsere Satelliten Nro. 1, 3 und 4) und I 13 noch ein viertes (unsere Nro. 2) gesehen und alsbald aus dem Wechsel ihrer Stellungen den Schluss gezogen hatte, dass dieselben um Jupiter kreisen oder Monde desselben sein müssen, so veröffentlichte er ungesäumt in dem „Sidereus Nuncius. Venetiis 1610 in 4. (auch Francofurti 1610 und Bologna 1655; eine von Kepler in Prag besorgte deutsche Ausgabe scheint dagegen apokryph zu sein)", für welchen er 1610 III 1 die Druckbewilligung erhielt, seine Entdeckung. Sie wurde begreiflich mit grossem Interesse aufgenommen, — so namentlich auch von **Kepler**, der sofort eine „Dissertatio cum Nuncio sidereo. Pragæ 1610 in 4. (auch Francof. 1611)" erscheinen, und dieser wenig später noch eine betreffende „Narratio" folgen liess, welche einige von ihm im August und September 1610 mit einem vom Erzbischof Ernst von Köln erhaltenen galiläischen Fernrohr angestellte Beobachtungen enthält; dagegen kam sie aus oben angegebenen Gründen den Peripatetikern höchst ungelegen, so dass sie sogar Zweifel an der Zuverlässigkeit des teleskopischen Sehens erhoben und dadurch **Galilei** veranlassten, im März 1611 mit mehreren Fernröhren nach Rom zu reisen, um sie faktisch zu widerlegen, was ihm natürlich leicht fiel, sowie es ihm auch durch Fortsetzung der Beobachtungen möglich wurde, die jetzt auf

$$a = 1^d{,}76986 \qquad b = 3^d{,}55409 \qquad c = 7^d{,}16638 \qquad d = 16^d{,}73355$$

festgesetzten Umlaufszeiten der 4 Trabanten wenigstens bis auf die erste Decimale richtig zu bestimmen, während es ihm dagegen (vgl. 406) allerdings noch nicht gelang, die wünschbaren Tafeln zu erstellen. — Wie schon früher (134 : d) gezeigt wurde, war **Galilei** keineswegs der Erste, der den Himmel mit dem Fernrohr durchforschte, ja es ist kaum zu bezweifeln, dass ihm z. B. Simon **Marius** in dieser Richtung zuvorkam, und so vielleicht wirklich schon im November 1609 die Jupiterstrabanten sah; immerhin ist aber wohl noch sicherer, dass letzterer die Natur dieser Sternchen anfänglich nicht erkannte, sonst hätte er wohl dem ihm befreundeten Kepler Nachricht von seinem Funde gegeben, und wäre jedenfalls nicht erst lange nach Erscheinen des „Sidereus nuncius" in seiner „Practica auf 1612" und seinem „Prognosticum astrologicum" auf 1613, ja eigentlich erst in dem „Mundus jovialis Anno 1609 detectus. Norimbergæ 1614 in 4." mit seinen Ansprüchen hervorgetreten. Wie ganz anders würde dieser sonst nicht unverdiente Mann in der Geschichte dastehen, wenn er dies offen eingestanden, Galileis eigentliche Entdeckung rühmend anerkannt, und für sich nur das ihm wirklich zukommende Verdienst in Anspruch genommen hätte, die Revolutionszeiten etwas besser bestimmt und die Tafeln merklich verbessert zu haben, — anstatt sich auch noch mit fremden Federn zu schmücken, ja Galileis Schrift, wie dieser selbst (vgl. die „Discorsi", ed. 1635 p. 5) und dann namentlich **Favaro** (vgl. dessen „Galileo Galilei e lo studio di Padova", vol. 1) schlagend nachwies, in unerlaubter Weise auszuschreiben und sich so selbst als Plagiarius hinzustellen. — Als von Galilei und Marius unabhängige, wenn auch spätere Entdecker sind ferner Thomas **Harriot** und Joseph Gualterius oder **Gaultier** (1564? — Aix 1647; Prior zu La Valette und Lehrer von Gassendi) zu nennen, von welchen der erstere die Monde (nach Zach von 1610 I 16, nach Rigaud aber allerdings erst) von 1610 X 17

an sah und verfolgte, der zweite von 1610 X 24 an. Endlich ist noch zu erwähnen, dass die Stellungsverhältnisse der Monde durch **Fontana** (vgl. dessen „Novæ observationes“ von 1646) und **Hevel** (vgl. den Anhang zur „Selenographia“) längere Zeit notiert wurden, — dass Giovanni Batista **Hodierna** (Ragusa 1597 — Palermo 1660; Erzpriester und Mathematiker des Duca di Palma) in seinen „Mediceorum Ephemerides. Panormi 1656 in 4.“ eine ihm 1652 VI 27 gelungene erste Beobachtung einer Immersion verzeichnete, — und dass Dom. **Cassini** in seiner „Lettera astronomica sopra l'ombre dei pianeti Medicei in Giove. Roma 1665 in fol.“ eine erste Nachricht über die von ihm bemerkten Schatten der vor Jupiter vorüberziehenden Monde gab. Für weitere Beobachtungen des letztgenannten und seiner Nachfolger wird teils auf die oben citierten Nummern, teils auf das Nächstfolgende verwiesen. — *b.* Mittelst der oben für die Umlaufszeiten gegebenen Werte lässt sich die schon 1726 durch **Bradley** (vgl. Ph. Tr. Nro. 394) bemerkte Relation

$$437^d = 247 \cdot a = 123 \cdot b = 61 \cdot c \fallingdotseq 26 \cdot d$$

leicht verifizieren. Für den durch **Laplace** unternommenen Versuch, dieselbe theoretisch zu begründen, muss dagegen auf dessen „Mécanique céleste (I 336)“ verwiesen werden. — Die Dimensionen der Monde sind namentlich durch W. **Struve** (vgl. A. N. 97 von 1826, Mem. A. S. 3 von 1829, etc.) wiederholt mikrometrisch bestimmt worden, und zwar fand er für die scheinbaren Durchmesser die Werte 1″.015, 0″.911, 1″.488, 1″.273, welchen die wahren Durchmesser 4060, 3410, 5570, 4810^{km} entsprechen, so dass der zweite am kleinsten ist und etwa unserm Monde gleichkömmt. In der neuesten Zeit fanden W. **Campbell** und Joh. Martin **Schäberle** (bei Herrenberg in Würtemberg 1853 geb.; Obs. auf Mount Hamilton), dass der erste Mond ellipsoidal und die grösste Axe dem Planeten zugewandt sein dürfte. — Von freiem Auge sind (wenigstens in Europa) in neuerer Zeit nur die, mutmasslich schon von den alten Chinesen bemerkten, zwei äussersten der vier Monde und auch diese (abgesehen von vielen Täuschungen) nur ganz ausnahmsweise gesehen worden, während alle bereits mit etwas guten Handfernröhren sehr leicht aufzufinden sind, falls sie nicht etwa gerade vor Jupiter oder in dessen Schatten stehen, was jedoch nur sehr selten für alle zusammentrifft, wie es 1611 III 11 durch **Galilei**, 1681 XI 12 durch W. **Molyneux**, 1802 V 23 durch W. **Herschel**, etc., beobachtet wurde. — Anhangsweise ist daran zu erinnern, dass **Galilei** die vier Monde als „Mediceische Gestirne“ bezeichnet und für sie der Reihe nach die Namen „Catharina oder Franciscus, Maria oder Ferdinandus, Cosmus major und Cosmus minor“ gewählt, — **Marius** dagegen vorgeschlagen hatte, dieselben „Sidera Brandenburgica“ zu nennen und der Reihe nach „Mercurius-, Venus-, Jupiter- und Saturnus-Jovialis“ oder auch, infolge eines im Oktober 1613 mit Kepler zu Regensburg geführten scherzhaften Gesprächs „mit Erlaubniss der Theologen“ als Kinder Jupiters „Jo, Europa, Ganymedes und Callisto“ zu heissen, — D. **Cassini** endlich sie erst dem Verse „Pallas, Juno, Themisque, Ceres tibi Jupiter adstant“ gemäss bezeichnet wissen wollte, dann aber die noch jetzt gebräuchliche Numerierung einführte. — Schliesslich erwähne ich noch zur Ergänzung der betreffenden Litteratur: „Rudolf **Engelmann** (Leipzig 1841 — ebenda 1888; Obs. Leipzig, dann Buchhändler daselbst), Über die Helligkeit der Jupiterstrabanten. Leipzig 1871 in 8., — O. **Backlund**, Sur la théorie des satellites de Jupiter (Bull. astr. 1887), — Albert **Marth** (Colberg 1828 geb.; Obs. Markree in Irland), On the formulæ for computing the apparent positions

of a satellite, and for correcting the assumed elements of its orbit (Monthly Not. 1887), — E. J. **Spitta**, On the Appearances presented by the Satellites of Jupiter during Transit (Monthly Not. 48 von 1888), — etc."

550. Die Rotation, Gestalt, Grösse und Masse Jupiters. — Für die Rotationsdauer von Jupiter erhielt **Cassini** 1665 und später mehrfach aus Verfolgung dunkler Flecken, ganz den Anschauungen von **Kepler** entsprechend, den auffallend geringen Wert von $9^h\ 56^m$, — einmal sogar, wo er mutmasslich eine Art weisser Wolke benutzt hatte, nur $9^h\ 50^m$, — und diese beiden extremen, aber unvermittelten Beträge wurden nachmals auch von andern Beobachtern erhalten [a]. — Entsprechend dieser raschen Rotation ergab sich **Cassini** bei Jupiter die starke Abplattung von $^1/_{15}$, und auch dieses Resultat wurde durch die neuern Beobachtungen bestätigt, sowie dem entsprechend Jupiter auf einen Equatorealdurchmesser von nahe 11 Erddurchmesser nur ein Polardurchmesser von nicht voll $10^1/_3$ zugeschrieben [b]. — Da sich nun aus letztern Zahlen ergiebt, dass auf Jupiter dem Volumen nach etwa 1250 Erden kommen, während dagegen (270) seine Masse nur circa 338 mal so gross als diejenige der Erde ist, so folgt daraus, dass die mittlere Dichte Jupiters kaum volle $1^1/_4$ beträgt [c].

Zu 550: *a.* In seiner „Dissertatio" von 1610 sprach nämlich **Kepler** bereits die Erwartung aus, dass man die Rotation Jupiters erkennen und sie viel kleiner als 24^h finden werde, — und diese Erwartung wurde sodann von D. **Cassini** in oben angegebener Weise erfüllt, wie aus dessen „Lettere astronomiche al Sign. Ott. Falconieri sopra la varietà delle macchie osservate in Giove e loro diurne rivoluzioni. Roma 1665 in fol." hervorgeht. Mit welchem Rechte Gilles-François **Gottigniez** (Brüssel 1630 — Rom 1689; Jesuit; Prof. math. Rom) behauptete, dass **er** Cassini auf die Rotation Jupiters aufmerksam gemacht habe, und inwieweit seine Bemerkung „M. Cassini, bien loin d'estre de cette opinion, la combattait, et assurait que toutes ces taches n'estaient que l'ombre des satellites de Jupiter" wahrheitsgetreu war, kann ich nicht beurteilen; dagegen dürfte **Campani** die Rotation schon vor Cassini bemerkt haben, da er bereits (vgl. Journ. d. Sav. 1665 I 5) in seinem „Raggvaglio di nuove osservazioni. Roma 1664 in 12." darauf hindeutete, — vielleicht auch **Hooke**, der dieselbe (vgl. Ph. Tr. 1665 III 6, — also nach Kenntnis von Campanis Arbeit) schon 1664 V 9 beobachtet zu haben behauptete; aber wie dem auch sei, so bleibt **Cassini** jedenfalls für die erste genaue Bestimmung die Priorität, sowie das Verdienst, seine Beobachtungen längere Zeit fortgesetzt und dabei spätestens 1692 jenen anomal erscheinenden Wert von $9^h\ 50^m$ gefunden zu haben. Später konstatierte auch W. **Herschel**, vgl. seine Abhandlung „On the rotation of the planets round their axes (Ph. Tr. 1781)", dass die aus verschiedenen Flecken erhaltenen Werte im allgemeinen nur wenig von dem Mittel $9^h\ 55^m\ 40^s$ abweichen, während er aus einem 1779 beobachteten Flecken ebenfalls den anomalen, mit dem Cassini'schen nahe übereinstimmenden Wert $9^h\ 50^m\ 48^s$ erhielt, und so ziemlich zu denselben Resultaten gelangten auch die **Airy**, **Bessel**, **Mädler**, **Schmidt**, etc. Vgl. noch 552. — *b.* Während

Hevel in seiner „Selenographia" von 1647 Jupiter als „Globus satis rotundus" bezeichnete, fand **Cassini** bei ihm die seiner raschen Rotation entsprechende starke Abplattung $^1/_{15}$, und die Neuzeit hat dieses Ergebnis vollkommen bestätigt, indem die beiden Axen nach Messung von

	$2a$	$2b$		$\frac{a-b}{a}$
Bessel	$2a = 37'',60$	$2b = 35'',21$	betragen, also	$= 1 : 15,7$
Struve	38,33	35,54		13,7
Secchi	38,36	35,96		16,0
Kaiser	37,54	35,15		15,7

ergeben. — Setzen wir die mittlere Distanz Jupiters von der Sonne $R = 5,20280$, die Sonnenparallaxe $\pi = 8'',88$ und bezeichnen die in Durchmessern des Erdequators ausgedrückten Equatoreal- und Polar-Durchmesser Jupiters mit $2a'$ und $2b'$, so erhalten wir unter Benutzung der vorstehenden Bessel-schen Werte $2a' \risingdotseq R \cdot a : \pi = 11,01$ und $2b' \risingdotseq R \cdot b : \pi = 10,31$, also das Volumen Jupiters gleich $11,01^2 \cdot 10,31 \risingdotseq 1250$ Erdvolumina. — *c.* Setzt man in 270 : 4 die Sonnenmasse $M = 1$ und bezeichnet mit τ das siderische Erdjahr, mit α aber den scheinbaren Abstand des Mondes vom Planeten, so dass

$$r = R \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad T^2 : \tau^2 = R^3 : 1$$

ist, so erhält man

$$1 : m = t^2 : (\tau^2 \cdot R^3 \cdot \mathrm{Si}^3\,\alpha) \tag{1}$$

welche Formel von der durch **Bessel** in seiner „Bestimmung der Masse des Jupiter (Astr. Unters. II von 1842)" nach strengerer Methode abgeleiteten nur dadurch abweicht, dass Bessel rechts noch einen Faktor

$$A = (1 + \mu) \cdot [1 + k^2 \cdot (R - {}^1/_2\,\varphi)] : [(1 + m')\,(1 + \Sigma\,\mu)] \tag{2}$$

beifügte, in welcher m' die Masse der Erde, μ die in Jupitersmassen ausgedrückte Masse des benutzten Mondes, $\Sigma\,\mu$ die Summe der Massen aller Monde, k das Verhältnis des Equatorealhalbmesser Jupiters zu dessen Distanz zum Monde, und endlich φ das Verhältnis der Centrifugalkraft zur Schwere unter dem Equator Jupiters bezeichnet. Man kann jedoch diesen Faktor, der immer der Einheit sehr nahe kömmt, ohne grossen Schaden gleich derselben setzen, d. h. bei Formel 1 stehen bleiben. — Noch mag beigefügt werden, dass **Bessel** aus den vier Monden Jupiters im Mittel $^1/_m = 1047,879 \pm 0,235$ erhielt, also einen Wert der nur um wenige Zehntel von den (270) mitgeteilten neuern Bestimmungen abweicht, und somit auch keine Einsprache dagegen erhebt, dass die Jupitersmasse nur etwa 388 mal so gross als diejenige der Erde sei, während oben das Volumen 1250 mal so gross gefunden wurde. Es ist also die mittlere Dichte Jupiters nur $388 : 1250 \risingdotseq {}^1/_4$ mal so gross als diejenige der Erde, also (222) etwa 1,4, woraus auf eine noch ziemlich hohe Temperatur geschlossen werden dürfte.

551. Die physische Beschaffenheit Jupiters. — Während Galileis Fernrohr auf der Jupiterscheibe noch keinen Detail erkennen liess, nahmen dagegen **Zucchi** und mehrere seiner Zeitgenossen zwei sich mitten durch dieselbe ziehende, an die Fleckenzonen der Sonne erinnernde, dunkle Parallelstreifen wahr, welche man anfänglich mit den Flecken auf dem Monde zusammenstellen und zu einer Jovigraphie verwenden wollte, während sich dann allerdings bald zeigte, dass sie nach Lage, Ausdehnung und Färbung sehr veränderlich und also wahrscheinlich nur der Atmosphäre Ju-

piters zuzuteilen seien [a]. Die spätern Beobachter, wie namentlich **Schröter**, pflichteten letzterer Anschauung vollständig bei, brachten damit die oben (550) bei Bestimmung der Rotationsdauer hervorgetretene Ungleichheit in Verbindung und fanden ausser den Hauptstreifen verschiedene andere Bildungen und Nüancierungen untergeordneterer Art [b].

Zu 551: *a.* Dass auch **Torricelli, Fontana, Zupus,** etc. die Jupiterstreifen sahen, ist ziemlich sicher, — jedoch kaum vor **Zucchi,** dessen erste Beobachtung (vgl. Ricciolis Almagest I 487) schon 1630 V 17 stattfand. Der etwas spätere **Hevel** scheint (wenigstens 1647) die Streifen nicht bemerkt zu haben, wohl aber **Cassini,** der ausdrücklich auf ihre Veränderlichkeit hingewiesen haben soll. — *b.* Die von dem fleissigen **Schröter** verfassten „Beiträge zu den neuesten astronomischen Entdeckungen. Herausgeg. von J. E. Bode. Berlin 1788 in 8.", deren Hauptergebnisse seiner Zeit (vgl. Journ. d. S. 1788 p. 239) in den Worten „Les bandes de Jupiter éprouvent de si grands changemens qu'on ne peut pas les attribuer qu'à l'atmosphère et non au corps même de la planète; les bandes deviennent alternativement plus minces ou plus épaisses; les zones polaires sont d'une couleur plus grise, dont la matière parait être de la nature des bandes, et forme beaucoup de rayes interrompues, fines et étroites, parallèles aux grandes bandes, et change souvent, ce qui indique encore une matière atmosphérique", so trefflich resümiert wurden, bildeten lange, wenn auch die ebenfalls darin ausgesprochene Ansicht „qu'il y a dans l'atmosphère de Jupiter des vents qui ont des vîtesses et des directions différentes, et font paraître le mouvement des taches et des bandes plus ou moins différent de celui de la rotation de Jupiter" zur Erklärung der auch von Schröter beobachteten Anomalie nicht ausreichte, die Hauptquelle für Jupiters Beschaffenheit, und enthalten einen noch für die Gegenwart wichtigen Detail. — Die Angabe von **Arago** (Astronomie: A. Hankel IV 292), dass W. **Herschel** in einer 1793 veröffentlichten Abhandlung versichert habe, Jupiter einmal ganz ohne Streifen gesehen zu haben, scheint der Revision zu bedürfen, da die Phil. Tr. von 1793 von Herschel nur die Abhandlung „Observations of the planet Venus" enthalten, in welcher zwar beiläufig eine Jupitersbeobachtung von 1793 V 31 erwähnt, aber von den Streifen gar nicht gesprochen wird. — Anhangsweise füge ich bei, dass Marcellin **Ducarla** (Vabre 1738 — Villeneuve-du-Tharn 1816; Privatgel. Paris) in seiner Abhandlung „Des anneaux planétaires (Journ. de phys. 1782)" lehrte, dass man von den andern Planeten aus auch bei der Erde einen sich parallel zu ihrem Equator verschiebenden Ring sehen werde, welcher ähnlichen Ursachen wie die Streifen auf Jupiter und Saturn zuzuschreiben sein dürfte.

552. Die neuern Beobachtungen im Jupitersysteme. — Das wichtigste Ergebnis der neuern Zeit ist wohl die aus den Studien der **Draper, Houzeau** und **Vogel** mit ziemlicher Sicherheit hervorgehende Thatsache, dass Jupiter noch etwas eigenes Licht besitzt, also gewissermassen noch im Übergange von einem Selbstleuchter zu einem dunkeln Körper begriffen ist [a]. — Ausserdem sind aber auch die Beobachtungen an dem 1878 von **Tempel** und

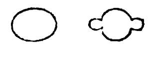
Lohse zuerst bemerkten, etwas südlich vom Südstreifen liegenden „roten Fleck“ von hohem Interesse [b], — ebenso die von **Ranyard** hervorgehobenen Beziehungen zwischen den Variationen der Jupiterstreifen und der Sonnenfleckenperiode [c], — und gewisse eigentümliche Erscheinungen, welche bei Sternbedeckungen durch Jupiter und bei Vorübergängen seiner Trabanten beobachtet worden sind [d].

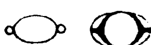
Zu 552: *a.* In seiner Note „On a photograph of Jupiters spectrum, showing evidence of intrinsic light from that planet (Monthly Not. 40 von 1880)“ leistete H. **Draper** den ziemlich sichern Nachweis, dass sich Jupiter noch im Zustande der Gluthitze befinde, und in seiner Equatorealgegend noch „periodisch in eruptiver Form“ zu strahlen vermöge, somit Eigenlicht besitze. Für letzteres spricht auch der von **Houzeau** (Ciel et terre 1885 V 15) hervorgehobene Umstand, dass uns Jupiter fast mehr Licht zusendet als er von der Sonne erhält, obschon von dem erhaltenen Lichte ein guter Teil durch Absorption verloren gehen muss, da ja selbst frischgefallener Schnee nur etwa ³/₄ des aufgefallenen Lichtes reflektiert. Und in der That, wenn auch bei Jupiter das von der Sonne erhaltene Licht die Hauptrolle spielt, da sein Spektrum im allgemeinen dem Sonnenspektrum entspricht, so hat immerhin H. C. **Vogel** (vgl. seine Preisschrift „Untersuchungen über die Spectra der Planeten. Leipzig 1874 in 8.“, u. a.) den Nachweis geleistet, dass dasselbe auch einige Eigentümlichkeiten besitzt, so z. B. in Rot ein auffallend dunkles Band zeigt. Da überdies kein Beweis für die Existenz eines festen Kernes vorhanden ist und sich nach dem vorhergehenden überhaupt bei Jupiter mehr Analogien mit der Sonne als mit der Erde finden, so hat **Houzeau** (l. c.) wohl ganz recht in Übereinstimmung mit **Lohse** „à voir dans Jupiter une planète qui, par suite de son énorme volume, n'est pas encore arrivée à la fin de la période ignée“. — *b.* Der sog. „rote Fleck“ wurde zuerst im August 1878 durch Wilh. **Tempel** (A. N. 2284 von 1879), bald darauf auch durch **Lohse** (vgl. Publ. Potsdam I 2 von 1878 und III 1 von 1882) gesehen und bis in die neueste Zeit auch sonst vielfach beobachtet und besprochen, so z. B. von T. **Bredichin** (A. N. 2280 von 1879), L. **Niesten** (Ann. Brux. 1885), A. **Wolfer** (Mitth. 55 und 58 von 1882—83), etc. Derselbe hatte namentlich anfänglich eine ziemlich intensive rote Färbung und die Gestalt eines Ovals (12″,5 Länge auf 3″,5 Breite), das sich nach und nach auf beiden Seiten etwas ausspitzte, und ist nach **Lohse** mutmasslich infolge einer heftigen Eruption aus dem Innern entstanden. Er ergab **Lohse** 1878 die Rotationszeit $9^h\ 55^m\ 36^s,6$, — 1879: $35^s,5$, — 1880: $36^s,2$, — 1881: $37^s,8$, — also Werte, welche sämtlich zwischen die Grenzwerte $9^h\ 55^m\ 32^s,5$ und $42^s,4$ fallen, die er aus andern Objekten auf der Nordhemisphäre erhielt, während ihm (vgl. 550: a) eine helle Wolke in der Equatorealzone 1879: $9^h\ 49^m\ 59^s,0$, — 1880: $68^s,4$, — 1881: $70^s,7$ ergab, so dass der rote Fleck gegen sie zurückblieb und etwa alle 54^d mit ihr in Konjunktion kam. — *c.* Durch Zusammenstellung aller aufgefundenen Angaben erhielt nämlich Arthur Cowper **Ranyard** (Swanscomb Court in Kent 1845 geb.; Privatastr. London; vgl. Monthly Not. 31 von 1871) das bemerkenswerte Resultat, dass die Jupiterstreifen zur Zeit der Sonnenfleckenminima matt und wenig ausgedehnt, zur Zeit der Maxima dagegen stark und sehr veränderlich sind, und auch **Lohse** kam (Beob. Bothkamp 2 von 1873) zu entsprechenden Resultaten. — *d.* Bei der 1879 IX in Melbourne beobachteten Bedeckung von 64 Aquarii durch Jupiter nahmen (Monthly Not. 40 von 1880) drei Beobachter übereinstimmend

wahr, „dass der Stern bei seiner Annäherung an Jupiter sichtlich dunkler wurde und, an den Rand des Planeten tretend, nicht plötzlich (wie vom Monde bedeckte Sterne) verschwand, sondern ganz allmälig an Glanz abnahm, wie wenn er successive sein Licht durch immer dichtere Gasschichten zu senden hätte", — ja einer derselben, H. **Turner**, meldete sogar, dass er den Stern nach seinem Eintritte in die Scheibe während mindestens 10ˢ durch die Atmosphäre des Planeten hindurch noch deutlich sehen konnte. — Zum Schlusse führe ich noch zur Ergänzung der Speciallitteratur über Jupiter folgende Schriften und Abhandlungen auf: „H. **Schwabe**, Die Streifen des Jupiter (Wöch. Unt. 1855—56), — W. **Beer** und H. **Mädler**, Beiträge zur physischen Kenntnis der himmlischen Körper im Sonnensysteme. Weimar 1841 in 4., — G. B. **Airy**, Remarks on the appearance of Jupiter (Monthly Not. 20 von 1860), — W. **Huggins**, On the periodical changes in the belts and surface of Jupiter (Monthly Not. 22 von 1862), und: Spectrum analysis, applied to the heavenly bodies. London 1866 in 8., — Fr. **Zöllner**, Photometrische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit der Himmelskörper. Leipzig 1865 in 8., — A. **Secchi**, Sugli spettri prismatici dei corpi celesti. Roma 1868 in 8., — W. of **Rosse**, Notes to accompany chromolithographs from drawings of the planet Jupiter (Monthly Not. 34 von 1874), — F. **Terby**, Etudes sur l'aspect physique de la planète Jupiter (Mém. cour. Brux. 47 und 49 von 1885 und 1888), — etc."

553. Die ersten Beobachtungen an Saturn. — Als **Galilei** bei Saturn oder Kronos sonderbare Gestaltungen wahrzunehmen glaubte, wie wenn dessen Scheibe mit Henkeln versehen wäre, verbarg er zur Wahrung der Priorität seine unfertige Entdeckung vorläufig in einem Anagramme, kam aber auch später nicht an ein sicheres Ziel und liess schliesslich die Sache ganz fallen [a]. Auch **Fontana, Gassendi, Hevel**, etc. hatten, obschon sie mit etwas bessern Waffen fochten, keinen wesentlich bessern Erfolg, und so blieb, vor Anbruch der unter der folgenden Nummer zu besprechenden Zeit, eine Bestimmung von **Grimaldi**, aus welcher für Saturn die nahe richtige Abplattung $^1/_{12}$ folgte, so ziemlich das einzige sichere Ergebnis [b].

Zu 553: *a.* Bald nachdem **Kepler** im Frühjahr 1610 seine „Dissertatio" geschrieben hatte, erhielt er von **Galilei** die Nachricht, dass er noch eine andere Entdeckung gemacht habe, die er aber einstweilen nicht veröffentlichen könne, sondern nur in dem Anagramme „s m a i s m r m i l m e p o e t a l e v m i b u n e n u g t t a v i r a s" niederlegen wolle. Wenn man nun bedenkt, dass die 37 Buchstaben des Anagrammes nicht weniger als $(37!) : (2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5) \fallingdotseq 7200$ Quintillionen Versetzungen erlauben und ein Schreiber für eine einzige Million etwa ein Jahr und 5 Ries Papier bedürfte, so kann man begreifen, dass auch der unermüdliche **Kepler** das Anagramm nicht entziffern konnte und froh war, aus einem 1610 XI 13 von **Galilei** an den toskanischen Gesandten in Prag, Giuliano de Medici, geschriebenen Briefe zu erfahren, dass derselbe Saturn in verschiedener Gestalt, meist aber so gesehen habe, wie wenn zu beiden Seiten der Saturnskugel kleinere Kugeln stehen würden, gewisser-





massen zwei Bediente, um den alten Herrn zu stützen, und dass er dieses in dem Satze „Altissimum planetam tergeminum observavi“, zu welchem sich die mitgeteilte Buchstabenfolge leicht ordnen lasse, auszudrücken suchte. — Als sodann **Galilei** 1612 Saturn mehrmals in rein elliptischer Form sah, glaubte er sich früher getäuscht zu haben und verfolgte die Sache nicht weiter. — *b.* Etwas später wurde Saturn durch **Fontana** von 1630—45, — durch **Gassendi** von 1633—43, — durch **Hevel** von 1642—45, — durch **Riccioli** und **Grimaldi** von 1643—48, — etc., wiederholt beobachtet und abgezeichnet, aber ebenfalls ohne die sonderbaren Anhängsel und ihr zeitweiliges Fehlen vermitteln und erklären zu können, so nahe sie auch einige Male daran waren, die richtige Gestalt zu verzeichnen, wie dies z. B. bei **Hevel** im Herbst 1645 und bei **Riccioli** im Winter 1648/9 der Fall war. Letzterer tröstete sich mit den seiner Zeit von **Seneca** bei Anlass der Kometen gesprochenen Worten: „Veniet tempus quo ista, quæ nunc latent, in lucem dies extrahat“, und hatte sogar die Freude, diesen Tag noch anbrechen zu sehen, wie wir unter der folgenden Nummer hören werden.

554. Entdeckung von Ring und Monden. — Was seinen Vorgängern unerklärlich geblieben war, gelang **Huygens,** dank seiner Sagacität und seinen (vgl. 139) selbstgeschaffenen bessern optischen Hilfsmitteln, zu enträtseln: Nachdem er 1655 bei Saturn einen Mond aufgefunden und bei längerm Verfolgen desselben auch den Planeten selbst häufig ins Auge gefasst hatte, kam er nämlich zu der festen Ansicht, dass letzterer einen ihn frei umschwebenden Ring besitze und alle jene Gestaltwechsel sich durch die verschiedenen Stellungen von Erde und Sonne zu der Ebene des Ringes erklären lassen [a]. Seine, alsbald auch von andern verifizierten Entdeckungen und Theorien machten begreiflich grosses Aufsehen und veranlassten unter anderm **Cassini,** seine Aufmerksamkeit ebenfalls dem neuen Systeme zuzuwenden, wobei er nach und nach noch vier Monde entdeckte und die Teilung des Ringes erkannte, während **Huygens** selbst die Lage dieses letztern genauer bestimmte und in seinen „Kosmotheoros“ manche interessante Notiz über die seltsame Familie einflocht [b].

Zu 554: *a.* Aus „**Huygens,** De Saturni luna observatio nova. Hagæ 1656 in 4.“ ersieht man, dass dieser grosse holländische Gelehrte 1655 III 25 mit einem 50 mal vergrössernden Fernrohr von 12′ Länge bei Saturn einen Mond auffand, — denselben monatelang verfolgte, — für ihn eine Umlaufszeit von etwa 16^d erhielt, — und fast gleichzeitig noch eine andere Entdeckung machte, deren Priorität er sich durch das Anagramm „$a^7 c^5 d e^5 g h i^7 l^4 m^2 n^9 o^4 p^2 q r^2 s t^5 u^5$“ zu wahren suchte. In einer zweiten Schrift, seinem „Systema Saturnium, sive de causis mirandorum Saturni phænomenorum et comite ejus planeta nova. Hagæ 1659 in 4.“ setzte er sodann namentlich auch seine bereits oben erwähnte Entdeckung des Saturnringes auseinander, und teilte die Phrase „Annulo cingitur, tenui plano, nusquam cohærente, ad eclipticam inclinato“ mit, welche er seinem Anagramme zu Grunde gelegt hatte. — Auf eine Kontroverse,





welche sich infolge letzterer Schrift zwischen **Huygens** und dem römischen Optiker Eustachio **Divini** entspann, glaube ich hier nicht näher eintreten zu sollen, — und ebensowenig auf die für **Roberval** (aber ohne die nötige Begründung) erhobenen Prioritätsansprüche, oder die kaum richtige Angabe, es sei **Huygens** durch die vorgefasste Meinung, es könne nicht mehr Monde als Planeten geben, davon abgehalten worden noch nach weitern Saturnmonden zu suchen und so sein Saturnssystem selbst weiter auszubauen. — *b.* Sicher ist, dass **Huygens** seine Saturnsbeobachtungen fortsetzte und namentlich (vgl. Journ. d. S. 1669 und 1672) ermittelte, dass der Ring um 31° gegen die Ekliptik geneigt ist und sein Knoten in 169½° Länge fällt, — dass er dagegen ausser dem 1655 entdeckten Monde (dem jetzt nach seiner Distanz von Saturn als Nro. 6 bezeichneten Titan) keinen solchen fand, und erst **Cassini** 1671 einen zweiten (Nro. 8 oder Japhet), sowie 1672 einen dritten (Nro. 5 oder Rhea) beifügte, — dass der schlaue Italiener die nunmehrige Gesamtzahl 14 der Planeten und Monde in so geschickter Weise mit dem 14. Louis in Parallele zu setzen wusste, dass dieser die Entdeckung durch eine Medaille verherrlichen liess, — dass etwa von 1675 hinweg **Cassini** die, zuweilen (vgl. J. C. Adams in Monthly Not. 43 von 1883) irrtümlich William **Ball** zugeschriebene, Entdeckung einer Teilung des Ringes machte und dieselbe (Journ. d. S. 1677) mit den Worten „La largeur de l'anneau était divisée par une ligne obscure en deux parties égales, dont l'intérieure et plus proche du bord était fort claire et l'extérieure un peu obscure; cette apparence donne une idée comme d'un **anneau double**, dont l'inférieur plus large et plus obscure fut chargé d'un plus étroit et plus clair" beschrieb, während allerdings erst etwa 1714 sein Neffe **Maraldi** die Teilung als eine „durchgehende" erwies, — dass Ch. **Gallet** (vgl. Journ. d. S. 1684) darauf aufmerksam machte, es stehe Saturn, wie dies in der neuern Zeit namentlich **Schwabe** durch Messungen belegte, etwas excentrisch zu seinen Ringen, — und dass endlich in demselben Jahre 1684 **Cassini** noch zwei neue Monde (Nro. 4 oder Dione, und Nro. 3 oder Thetys) auffand. — Ich füge bei, dass **Huygens** in der aus seinem Nachlasse erschienenen Schrift „*Κοσμοθέωρος*, sive de terris coelestibus. Hagæ 1698 in 4. (auch 1709 und später; deutsch Leipzig 1703 und Zürich 1767)" erzählt, dass ihm **Cassini** 1672 den 8. und 5. Mond gezeigt, sowie 1684 seine Entdeckung von zwei neuen Monden mitgeteilt habe, die aber so schwer zu sehen seien, dass er dieselben noch nicht mit Sicherheit gefunden habe, und dass man vielleicht vor dem 5. noch einen Mond, nach ihm sogar noch mehrere finden werde. Diese neuen Entdeckungen, und überhaupt das Saturnssystem, spielen begreiflich in der erwähnten Schrift, welche sich zunächst mit Betrachtungen über die Mehrheit der Welten und ihre Bewohnbarkeit in ähnlicher Weise befasst, wie es schon vorher in „**Kircher**, Iter exstaticum coeleste. Roma 1656 in 4., und in: **Fontenelle**, Entretiens sur la pluralité des mondes. Paris 1686 in 8. (auch später vielfach, ja noch 1800 mit Anmerkungen von Lalande; deutsch durch Gottsched Leipzig 1730, durch Bode Berlin 1789)" geschah, eine Hauptrolle. Von den „Entretiens" bildet die Schrift „Henri **Favre** (Vevey 1780 — Lutry 1840; Informator in Moskau und Wien, dann „Secrétaire traducteur" in Lausanne; vgl. Notiz 454), Fontenelle et la marquise de G. dans les mondes. Genève 1821 in 8." eine Art Fortsetzung.

555. Neuere Forschungen im Saturnssysteme. — Während sich noch Cassini vergeblich bemühte, die Rotationsdauer

Saturns zu bestimmen, fand W. **Herschel** dafür den mit seiner starken Abplattung (553) gut harmonierenden Wert von $10^h\ 16^m$, welcher auch seither nur wenig abgeändert worden ist [a]. — In Beziehung auf seine Oberflächenbeschaffenheit scheint Saturn nahe mit Jupiter übereinzustimmen und ebenfalls noch etwas eigenes Licht zu besitzen [b]. — Die Anzahl der Saturnsmonde ist in der neuern Zeit noch um drei vermehrt worden; ferner wurden zwischen ihren Distanzen einige ähnliche Beziehungen gefunden wie solche (549) für die Jupitersmonde existieren, und mit ihrer Hilfe ebenfalls Massenbestimmungen vorgenommen [c]. — Auch die Lage der Ringe und die sich in ihren Dimensionen zeigenden Verhältnisse wurden genauer ermittelt, ferner die Existenz von wenigstens momentanen weitern Teilungen, sowie von innern und äussern Nebelringen nachgewiesen [d].

Zu 555: *a.* Wie schon (553) angedeutet, wurde Grimaldis Bestimmung der Abplattung Saturns zu $^1/_{12}$ durch die neuern Messungen in schönster Weise bestätigt, indem sich aus 5 Werten, welche W. **Herschel** (Ph. Tr. 1790), **Bessel** (A. N. 274 von 1835), **Encke** (Berl. Abh. 1838), **Kaiser** (Ann. Leyden 3 von 1872) und W. **Meyer** (Mém. Genève 27 von 1881) publizierten, statt 12 der Mittelwert 11, 82 ± 1,38 ergiebt. — Ebenso stimmt der von W. **Herschel** (Ph. Tr. 1794) für die Rotationsdauer erhaltene Wert von $10^h\ 16^m$ mit den neuern Ermittlungen überein, indem z. B. noch Asaph **Hall** (vgl. Smiths. misc. coll. 20 von 1881) mit $10^h\ 15^m$ nur um eine Minute davon abwich. — *b.* Die durch W. **Herschel** vermutete, und von ihm mit einer durch die rasche Rotation bewirkten Ablösung am Equator in Verbindung gebrachte Unregelmässigkeit in der Gestalt Saturns, konnten neuere Beobachter nicht finden, wohl aber stimmen sie mit ihm darin überein, dass Saturn einen ähnlichen Wechsel von hellern und dunklern Zonen zeige, wie ein solcher bei Jupiter vorkömmt: Speciell fand **Herschel** die Polarzonen im Saturns-Sommer weniger glänzend als im Frühling, und bemerkte zuweilen wie ein „Kleben" der Monde am Planeten, so dass er auf eine merkliche Atmosphäre und das Vorkommen von Niederschlägen zu schliessen hatte, — William **Lassell** (Bolton in Lancastershire 1799 — Maidenhead 1880; vgl. 142) und **Dawes** glaubten wiederholt farbige Zonen zu sehen, — **Vogel** konstatierte im Saturnsspektrum ähnliche Abweichungen vom Sonnenspektrum, wie er solche bei Jupiter gefunden hatte, und damit Spuren von eigenem Licht, — etc. — *c.* Zu den fünf frühern Monden entdeckte **Herschel** 1798 noch zwei neue (Nro. 1 oder Mimas, und Nro. 2 oder Enceladus), und 1848 endlich fanden ziemlich gleichzeitig **Bond** und **Lassell** einen achten Mond (Nro. 7 oder Hyperion), womit der Abschluss des Systemes erreicht scheint. — Die acht Monde haben die Umlaufszeiten: $a = 0{,}94^d$, $b = 1{,}37$, $c = 1{,}89$, $d = 2{,}74$, $e = 4{,}52$, $f = 15{,}94$, $g = 22{,}50$, $h = 79^d{,}33$, welche, wie wohl **d'Arrest** zuerst hervorhob, die Relationen: $494 \cdot a = 340 \cdot b = 247 \cdot c = 170 \cdot d$, $g = 5 \cdot e$, $h = 5 \cdot f$ einzugehen scheinen. — Mit Hilfe seiner Monde kann natürlich auch Saturn seiner Masse nach mit der Sonne, gestützt auf die früher (270 und 550) entwickelten Beziehungen, verglichen werden, und zwar findet man z. B., wenn man Titan benutzt und mit A. **Hall** $\tau = 365{,}25636$, $R = 9{,}53887$, $t = 15{,}9454$, $\alpha = 156''{,}570$, $A = 1{,}000040278$ setzt, sowohl nach 550: 1 als nach

550 : 2, dass die Sonne 3500 mal so viel Masse als Saturn besitze, während **Newton** (Princ. 3 ed. von 1726) auf entsprechende Weise 3021, **Bouvard** (Tabl. astr. von 1821) aus den Störungen 3512, **Leverrier** (Par. Ann. Mém. 12 von 1876) aus ebendenselben 3530, und W. **Meyer** (Mém. Gen. 27 von 1881) mit Hilfe der Monde 3519 erhielten. — *d.* Für die Lage des Ringes gegen die Saturnsbahn gab **Bessel** (vgl. Berl. Jahrb. 1829) die Werte

$$\Omega = 170^\circ\, 49'\, 54'' + 41'',00 \cdot (t - 1800) \qquad i = 27^\circ\, 0'\, 9''$$

wobei jedoch zu bemerken ist, dass die beiden Ringe nicht genau in derselben Ebene zu liegen scheinen. Nach „**Schröter**, Kronographische Fragmente. Göttingen 1808 in 8." participieren sie an der Rotation Saturns, während sie nach W. **Herschel** (Ph. Tr. 1790) erst in $10^h\, 29^m$ eine Rotation vollenden würden, — eine Zahl, welche **Secchi** sogar auf $14^1/_2{}^h$ erhöht haben soll. — Die äussern und innern Durchmesser der beiden Ringe betragen nach „W. **Struve**, Micrometrical observations of Saturn (Mem. astr. Soc. 3 von 1828)"

$$40'',09 = 2{,}23 \qquad 35'',29 = 1{,}97 \qquad 34'',47 = 1{,}92 \qquad 26'',67 = 1{,}49$$

wo je die ersten Zahlen die scheinbaren Durchmesser, die zweiten ihr Verhältnis zu dem nach ihm 17",95 betragenden scheinbaren Durchmesser Saturns geben. Diese Durchmesser sind jedoch mutmasslich wenigstens zum Teil nichts weniger als konstant, sondern eigentümlichen sekulären Veränderungen unterworfen: Bezeichnet nämlich α die Distanz von Saturn bis zum innern Rande des innern Ringes und β die Distanz von allda bis zum äussern Rande des äussern Ringes, so wurden für sie im Laufe der Zeiten unter anderm folgende Werte erhalten:

Jahr	Beobachter	α	β	$\alpha : \beta$	$\alpha + \beta$
1657	Huygens	6",5	4",6	1,41	11",10
1695	Cassini	6,0	5,1	1,18	10
1719	Bradley	5,4	5,7	0,95	10
1799	Herschel	5,12	5,98	0,86	10
1828	W. Struve	4,36	6,71	0,65	07
1838	Encke	4,04	7,06	0,57	10
1851	O. Struve	3,67	7,43	0,49	10
1881	Meyer	4,14	7,15	0,58	29

Es haben somit (abgesehen von der letzten Bestimmung) α und $\alpha : \beta$ seit mehr als zwei Jahrhunderten beständig abgenommen, während β grösser geworden und $\alpha + \beta$ gleich geblieben ist, — **es hat sich also das Ringsystem nach aussen jedenfalls nicht verändert, nach innen dagegen bedeutend ausgedehnt.** — Die Dicke der Ringe wurde von **Herschel** auf 0",3, von andern Beobachtern sogar auf noch weniger eingeschätzt, — jedenfalls ist dieselbe so unbedeutend, dass die Ringe zu Zeiten, wo die Erde in ihre Ebene eintritt, nur in starken Instrumenten sichtbar bleiben, und z. B. 1789, wo ein solcher Fall eintrat und zugleich ein Mond zwischen der Erde und ihnen stand, von **Herschel** (vgl. Berl. Jahrb. 1793) kaum gesehen wurden, wobei sie „das Ansehen einer auf einen Rosenkranz aufgereihten Koralle" hatten. Von neuern Beobachtern hat namentlich auch Jul. **Schmidt** (vgl. A. N. 650 von 1848, und später) die Ringe zu solchen Zeiten wahrgenommen und abgebildet. — Ferner ist noch anzuführen, dass schon die **Short**, **Herschel**, etc., und dann wieder die **Kater**, de **Vico**, **Encke**, etc.,

zuweilen in den Ringen noch weitere Teillinien zu bemerken glaubten, — dass man von 1850 hinweg durch die **Bond** und **Lassell** auf die wirkliche, allerdings schon von **Campani** (1664), **Picard** (1673), **Pound, Hadley** (1720), **Herschel, Galle** (1838), **Secchi**, etc. geahnte Existenz eines innern, durchscheinenden, nebelartigen Ringes, des sog. **Crape-Ring** (Kreppschleier), hingewiesen worden ist, — dass Dom **Lamey** (vgl. Compt. rend. 1888) seit 1868 bei besonders günstigen Verhältnissen auch vier äussere Nebelringe gesehen haben will, welche im Verhältnisse zu Saturn die Durchmesser 2,45, 3,36, 4,90, 8,17 besitzen, — etc. — Zum Schlusse verweise ich für weitern Detail auf die Abhandlungen: „R. J. **Boscovich**, De apparitione et disparitione annuli Saturni (Opera V von 1785), — **Lalande**, Sur les apparences de l'anneau de Saturne en 1773 et 1774 (Mém. Par. 1773), und: Sur la disparition de l'anneau de Saturne en 1780 et 1790 (Mém. Par. 1790—91), — W. **Herschel**, Account of the discovery of a sixt and seventh satellit of the planet Saturn; with remarks on the construction of the ring, its atmosphere, its rotation on an axis, and its spheroidical figure (Ph. Tr. 1790), — O. **Struve**, Sur les dimensions des anneaux de Saturne (Mém. Pét. 1852; sachlich und historisch erschöpfend), — W. **Meyer**, Recherches sur Saturne, ses anneaux et ses satellites. Genève 1881 in 4., und: Le système de Saturne. Genève 1884 in 4. (sehr wertvolle Arbeit), — Asaph **Hall**, The orbit of Japetus. Washington 1885 in 4., ferner: The six inner satellites of Saturn. Washington 1886 in 4., sodann: Determination of the orbit of Titan and the mass of Saturn (Yale Tr. 1889), und: Saturn and its Ring, 1875—89. Washington 1889 in 4., — H. **Seeliger**, Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesonders des Saturn. München 1887 in 4., — Herm. **Struve**, Beobachtungen der Saturnstrabanten. St. Petersburg 1888 in 4. (vgl. auch A. N. 2945—46 und 2983—84 von 1890), — etc."

556. Ansichten über die Bildung des Saturnssystemes. — Höchst merkwürdig ist ein 1843 von **Plateau** beschriebener Versuch, bei dessen Ausführung ein Analogon zum Saturnssysteme erhalten wird [a], und wenn man auch nicht gerade annehmen will, dass letzteres wirklich auf diese Weise entstanden sei, ja dass (vgl. 298) das ganze Sonnensystem sich durch successive Abschleuderungen gebildet habe, so stützt er immerhin die, zwar in neuester Zeit durch **Maxwell, Hirn**, etc., wieder sehr in Frage gestellten Ansichten der **Kant, Horner**, etc., in auffallender Weise [b].

Zu 556: *a.* Der von Joseph-Antoine-Ferdinand **Plateau** (Brüssel 1801 — Gent 1883; Prof. phys. Gent; leider schon 1843 infolge seiner Untersuchungen erblindet) in seinem „Mémoire sur les phénomènes que présente une masse liquide libre et soustraite à l'action de la pesanteur (Mém. Brux. 1843)" beschriebene Versuch besteht darin, dass man Öl in eine mit ihm gleich dichte Mischung von Wasser und Weingeist tröpfelt, dasselbe aus dem anfänglichen Chaos zu einer Kugel sammelt, durch diese einen rauhen Draht steckt, und nun letztern samt der adhärierenden Kugel mittelst einer Kurbel rasch umdreht: Die Kugel plattet sich hiebei ab, und wenn die Geschwindigkeit gehörig gesteigert wird, so lösen sich von ihr equatoreale Teile ab, die sofort als Kugeln oder Ringe ihre Bewegung selbständig fortsetzen. — *b.* Wie das Saturnssystem und speciell die Saturnringe entstanden sind, wird man wohl

nie mit Sicherheit ermitteln können; aber immerhin dürfte die Ablösungstheorie plausibler erscheinen als die von **Maupertuis** und dann wieder von O. **Struve** portierte Meinung, dass diese Bildungen ihren Ursprung dem Treffen Saturns auf einen Kometenschweif oder chaotische Materie, also einer Annexion, verdanken. — Für die Ansichten von **Kant** im allgemeinen auf 298 verweisend, mag hier noch folgende, von ihm speciell in Beziehung auf Saturn ausgeführte Rechnung nachgetragen werden: Bezeichnen C, R, T und c, r, t für einen Saturnmond und ein Partikelchen am innern Rande des Saturnsringes, unter Voraussetzung einer Kreisbahn, Geschwindigkeit, Radius und Umlaufszeit, so hat man

$$C \cdot T = 2 R \pi \qquad c \cdot t = 2 r \pi \qquad \text{und nach 484} \qquad C^2 : c^2 = r : R$$

und somit

$$T^2 : t^2 = R^3 : r^3 \qquad 1$$

so dass man nach dieser dem dritten Kepler'schen Gesetze entsprechenden Proportion aus bekannten Werten von T, R, r ohne Schwierigkeit t und damit die Rotationsdauer τ Saturns berechnen kann, sofern man mit **Kant** (vgl. seine Naturgeschichte des Himmels, A. von 1797, pag. 55) annimmt, dass „die Geschwindigkeit, womit die Partikeln des Rings in seinem inwendigen Rande umlaufen, gleich derjenigen ist, die der Planet auf seinem Equator hat“; denn setzt man den Radius dieses letztern gleich ϱ, so hat man in diesem Falle

$$\tau : t = \varrho : r \qquad \text{also nach 1} \qquad \tau = \varrho \cdot T \cdot \sqrt{r : R} : R \qquad 2$$

Nach dieser mutmasslich auch von **Kant** (der den Detail seiner Rechnung nicht giebt) benutzten Formel erhält man, wenn man nach **Huygens** $\varrho = 9'',00$, $r = 17'',90$ und für Titan $R = 206'',50$, $T = 382^h,68$ setzt, den allerdings viel zu kleinen Wert $\tau = 4^h,91$, oder, wenn man nach W. **Meyer** $\varrho = 8'',72$, $r = 13'',33$, $R = 176'',89$, $T = 382^h,68$ annimmt, den wenig grössern Wert $\tau = 5^h,18$, während **Kant** selbst (ohne Angabe der benutzten Daten) $\tau = 6^h,40$ fand, und (555) nach direkter Bestimmung $\tau = 10^h,25$ erhalten wurde; aber die Methode bleibt deshalb doch bemerkenswert. — Längst sich zu der, wesentlich mit Kant übereinstimmenden Ansicht bekennend, dass der Saturnring aus einer durch die Centrifugalkraft von Saturn abgelösten Wassermasse bestehe, welche in Dunstform das Maximum der Abplattung annehmen, sowie in Dimension und Teilung veränderlich bleiben konnte, schrieb **Horner**, bei Anlass einiger von **Valz** (vgl. A. N. 243 von 1833) veröffentlichten Beobachtungen, noch 1834 II 16 in seinem letzten Briefe an Gautier: „Les variations qu'il a remarquées dans l'apparence de l'anneau, me confirment dans l'idée, que l'anneau de Saturne n'est qu'un énorme bandeau de nuages ou quelque autre forme de vapeurs aqueuses, et nullement un corps solide, qui ne saurait subsister sous cette forme“. — Diesem letztern Ausspruche treten nun allerdings die neuern Untersuchungen wenigstens insofern entgegen, als sie den Saturnring in Parallele zu dem Asteroidenringe zwischen Mars und Jupiter stellen. Ich muss mich jedoch hier darauf beschränken, für deren Detail auf die betreffenden Abhandlungen „J. C. **Maxwell**, On the stability of the motion of Saturn's ring. Cambridge 1859 (auch Monthly Not. 1859), und: On theories of the constitution of Saturn's rings (Edimbourg Proc. 1862), — G. A. **Hirn**, Le monde de Saturne, ses conditions d'existence et de durée (Bull. Colmar 1872), und: Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. Nancy 1872 in 4., — F. **Tisserand**, Théorie de Maxwell sur l'anneau de Saturne (Bull. astr. 1889), — etc.“ zu verweisen, und hier nur **einerseits** die Worte: „Ces immenses ceintures ne peuvent durer qu'à la condition d'être formées de fragments

solides, dont les dimensions d'ailleurs peuvent varier dans des limites étendues, mais qui sont séparés les uns des autres par des intervalles relativement considérables, aussi vide de matières que l'espace stellaire en général, et qui décrivent chacun autour de la planète une orbite spéciale" beizufügen, in welchen **Hirn** das Resultat seiner Untersuchungen selbst resümiert hat, — und anderseits zu erwähnen, dass auch **Seeliger** (vgl. Abh. in 555) durch photometrische Studien zu der Annahme geführt wurde, dass der Ring weder gasförmig noch flüssig sein könne, sondern aus einem Schwarme diskreter undurchsichtiger Körper bestehen müsse, womit sich auch der von **Kirkwood** und W. **Meyer** geäusserte Gedanke, es möchten die Teilungen in den Ringen Saturns den Lücken im Asteroidenringe entsprechen, ganz gut verträgt.

557. Herschels Entdeckung des Uranus. — Als **Herschel** am 13. März 1781 bei der von ihm kurz zuvor begonnenen Durchmusterung des Himmels einen kleinen Wandelstern entdeckte, hielt er denselben für einen Kometen, und erst als sich die erhaltenen Positionen weder durch eine Parabel noch durch eine langgestreckte Ellipse, wohl aber nahezu durch einen Kreis von etwa 19 Sonnenweiten Radius darstellen liessen, ergab sich zu allseitiger Überraschung, dass ein transsaturnischer Planet entdeckt und dadurch das Sonnensystem in der von **Clairaut** (558) geahnten Weise erweitert worden sei [a]. Zwar wollten auch da noch einzelne behaupten, dass der neue Planet, welcher den Namen **Uranus** erhielt, eigentlich doch ein Komet und erst in den letzten Jahren durch Einwirkung der alten Planeten in eine Kreisbahn übergeführt worden sei; aber sie wurden alsbald durch **Bode** eines Bessern belehrt, indem dieser zeigte, dass **Flamsteed** schon 1690 und später, sowie nach ihm noch mehrere Astronomen diesen Uranus beobachtet, aber allerdings nicht als Planeten erkannt hatten, und seither hat man sogar erfahren, dass ihn die Bewohner von Otaheiti noch viel früher von freiem Auge bemerkten und als Wandelstern bezeichneten [b].

Zu 557: *a.* Nachdem es W. **Herschel** etwa 1779 gelungen war, sich selbst ein leistungsfähiges Spiegelteleskop zu erbauen, unternahm er eine konsequente Durchmusterung des Himmels, um alles Bekannte zu sehen und allfällig auch Neues zu finden. Als er so im März 1781 das Sternbild der Zwillinge vornahm, fand er am 13. einen ihm sofort etwas verdächtig vorkommenden Stern und konnte noch am gleichen Abend konstatieren, dass sein scheinbarer Durchmesser bei stärkerer Vergrösserung entsprechend zunehme und dass er seine Stellung gegen die übrigen Sterne merklich verändere: Es war also kein Fixstern, sondern ein Wandelstern, — mutmasslich ein Komet. In diesem Glauben schrieb sodann **Herschel** seinen „Account of a Comet", welcher der Royal Society 1781 IV 26 vorgelesen wurde, und in demselben Glauben wurde anfänglich auch überall, wohin die Kunde dieser Entdeckung drang, der neue Wandelstern beobachtet, — wohl zuerst 1781 III 17 durch **Maskelyne**, dann bald auch von den Pariser Astronomen, sowie von Ende 1781 an (vgl. Berl. Jahrb. 1788) während mehreren Jahren durch die beiden **Pigott**, etc. — Schon

1781 V 8 zeigte Jean-Baptiste-Gaspard Bochart de **Saron** (Paris 1730 — ebenda 1794; Akad. Paris, dann erster Präsident des Parlamentes und Opfer der Schreckensregierung), dass die Periheldistanz des neuen Gestirnes mindestens gleich 14 gesetzt werden müsse und dass dasselbe planetarischer Natur sei, ja im Februar 1782 konnte das Journal des Savants erzählen: „Monsieur de **La Lande**, ayant calculé des observations éloignées de huit mois, trouve qu'on les représente fort bien, en supposant que cette Planète décrit un cercle autour du Soleil à la distance de 18,931 fois celle de la terre dans un interval de $82^a,37$", zugleich beifügend: „La découverte de cette nouvelle Planète, une des plus extraordinaires que l'on a faites en Astronomie, prouve l'utilité qu'il y a de s'appliquer à faire un Catalogue exact des plus petites étoiles; il pourrait bien s'en trouver d'autres qui seraient de véritables Planètes". Auch **Lexell**, **Laplace**, etc. erhielten bei ihren betreffenden Untersuchungen ähnliche Resultate, und es blieb schliesslich den Engländern, die mit grosser Hartnäckigkeit für die Kometennatur eingestanden waren, nichts anderes übrig, als dieselben ebenfalls anzuerkennen, ja sogar W. **Herschel**, dem 1781 XI 30 für seine verschiedenen Entdeckungen durch die Royal Society die Copley-Medaille zugesprochen worden war, erklärte in einem an letztere 1782 XI 7 gerichteten Schreiben „On the diameter and magnitude of the Georgium Sidus", es sei nun ausgemacht, dass er einen transsaturnischen Planeten entdeckt habe. Mit dem von ihm vorgeschlagenen Namen „Georgs-Stern" war dagegen niemand recht einverstanden, und nach längerer Diskussion vereinigte man sich endlich so ziemlich allgemein darauf, nach dem Vorschlage von **Bode** den neuen Planeten **Uranus** zu heissen und ihm das Zeichen ⛢ beizulegen; nur **Lalande** opponierte eifrig gegen diese Benennung, die er mit „Herschel (♅)" vertauscht wissen wollte, ja sagte noch 1789 im Journal des Savants: „Il me semble que tous les Astronomes devraient se réunir pour proscrire une dénomination aussi abusive, aussi mal fondée, et aussi injuste à l'égard de l'auteur célèbre à qui nous devons la découverte d'une Planète". — Für weitern Detail vergleiche die Schriften: „**Klinkenberg**, Verhandeling over eene kleene doch ongewoone Sterre, dewelke het allereerst in Engeland is outdekt in de maand Maart 1781. In 4., — **Lalande**, Mémoire sur la planète de Herschel (Mém. Paris 1779, ausgegeben 1783; ferner 1787; auch deutsch mit Anmerkungen von Hell in Beiträgen von 1792), — **Lexell**, Recherches sur la nouvelle Planète découverte par M. Herschel (Nova Acta Petrop. 1787, aber schon gelesen 1783 III 11), — **Boscovich**, Sur la nouvelle Planète (Opera III von 1785), — **Bode**, Von dem neu entdeckten Planeten. Berlin 1784 in 8., — **Wurm**, Geschichte des neuen Planeten Uranus, sammt Tafeln. Gotha 1791 in 8., — etc." — ***b.*** Auch **Bradley** hatte Uranus 1753 als Fixstern beobachtet, Tob. **Mayer** 1756, und **Lemonnier** von 1763—1769 sogar bei 12 mal, — ja letzterer hätte die planetarische Natur erkennen müssen, wenn er seine Register nur etwas übersichtlicher geführt hätte. — Ausnahmsweise ist Uranus auch bei uns von freiem Auge sichtbar, und so sah ihn z. B. **Heis** 1848 und **Schmidt** 1874, ohne ihn speciell zu suchen und sogar anfänglich im Glauben, es sei ein kleiner Fixstern.

558. Die spätern Beobachtungen und die sich ergebenden Anomalien. — Bei der grossen Entfernung des Uranus ist es sehr schwierig, Genaueres über seine Beschaffenheit in Erfahrung zu bringen; aber dennoch konnte schon **Herschel** die Existenz mehrerer Monde desselben nachweisen und wahrscheinlich

machen, dass er eine starke, seither in der That durch **Young** zu $^1/_{14}$ bestimmte Abplattung besitze. Auch ist es in der neuern Zeit **Buffham** gelungen, seine Rotationsdauer auf etwa 12^h festzusetzen und durch die Bestimmung, dass sein Equator bei 80° gegen die Bahn geneigt sei, den mutmasslichen Grund gewisser rätselhafter Vorkommnisse in Betreff seiner Gestalt aufzufinden. Und endlich verdankt man **Perrotin** wenigstens einige Andeutungen über die Natur des Uranus[a]. — Am folgereichsten waren allerdings die Ergebnisse einer Vergleichung zwischen den beobachteten und berechneten Positionen, indem dieselben **Bouvard** schon 1821 dazu führten, einen transuranischen Planeten zu vermuten und die Aufgabe zu stellen, denselben durch Umkehrung der Störungsrechnungen theoretisch aufzusuchen. Diese Aufgabe wurde sodann etwas später, auf Anregung von Bessel, durch dessen talentvollen Schüler **Flemming** mit bester Aussicht auf Erfolg wirklich an die Hand genommen; leider starb jedoch derselbe vor Vollendung der umfangreichen Rechnungen, und so blieb es **Adams** und **Leverrier** vorbehalten, dieselbe definitiv zu lösen: Mit gleichem Scharfsinne und gleicher Ausdauer arbeitend, erreichten auch beide nahe gleichzeitig das Ziel, indem ersterer im Herbst 1845 und letzterer wenigstens vor dem Spätjahr 1846 über die zur Auffindung des Störefrieds am Himmel notwendigen Daten Auskunft geben konnten[b].

Zu 558: *a.* Als der Halley'sche Komet 1759 (vgl. 576) an der äussersten Grenze der dafür vorausberechneten Zeit zur Sonnennähe zurückkehrte, gab **Clairaut** als Ursache der geringen Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung den Umstand an, dass man über die Planetenmassen noch zu sehr im Ungewissen sei, deutete aber auch an, dass die „**action d'une planète inconnue, circulant au delà de Saturne**“ ebenfalls einen Teil der Schuld tragen könnte. Dieser von dem grossen Geometer geahnte transsaturnische Planet war nun also wirklich durch **Herschel** aufgefunden, ja es gelang ihm 1787 auch noch zwei Begleiter zu entdecken, welche später die Namen **Titania** und **Oberon** erhielten; vier andere Monde, die er ebenfalls einmal zu sehen glaubte, jedoch selbst als „kaum sichtbar“ bezeichnete, sind seither nicht wieder gesehen worden, während dagegen **Lassell** 1851 auf Malta noch zwei innere Monde, den **Ariel** und **Umbriel**, fand, so dass jetzt immerhin vier Uranusmonde bekannt sind, nämlich also

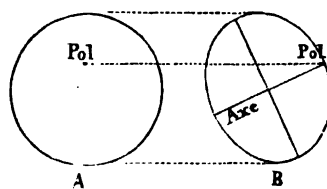
1. Ariel	2. Umbriel	3. Titania	4. Oberon

welchen nach S. **Newcomb** die Umlaufszeiten

$2^d,52038$	$4^d,14418$	$8^d,70590$	$13^d,46327$

entsprechen. Ferner fand letzterer, dass die mittlere Ebene der Bahnen dieser Monde gegen die Ekliptik um 97°,85 geneigt sei, also in unserm Sonnensysteme auch die retrograde Bewegung vorkomme und damit die Grundlage gewisser kosmogenetischer Theorien (298) dahinfalle. — Schon **Herschel** mutmasste, dass **Uranus** eine starke Abplattung besitze, und **Mädler** glaubte sogar, dieselbe auf $^1/_{10}$ setzen, sowie entsprechend Uranus eine sehr rasche Rotation beischreiben

zu müssen, während O. **Struve** gar keine Abplattung fand, weil er wahrscheinlich, wie schon **Arago** vermutete, seine Messungen zu einer Zeit machte, wo uns Uranus (wie bei A) seinen Pol zuwandte, anstatt zu einer Zeit, wo uns (wie bei B und für Mädler) seine nahe in die Ekliptik fallende Axe zugekehrt war. Neuere Beobachter haben denn auch (obschon mit bemerkenswerten und an 539 erinnernden



Ausnahmen) für Mädler Partei genommen, und so hat namentlich **Young** für die beiden Durchmesser des Uranus die Werte 3",97 und 4",28 erhalten, was der oben angeführten Abplattung $^1/_{14}$ entspricht, während W. **Buffham** aus Verfolgung von Flecken die ebenfalls bereits mitgeteilten und mit dem Vorstehenden gut harmonierenden Rotationselemente ermittelte; aber dennoch ist die Sache noch keineswegs endgiltig ausgetragen. — Sehr interessant ist es, in dem von **Perrotin** über die in Nizza erhaltenen Uranus-Beobachtungen erhaltenen Berichte (Compt. rend. 1884 III 24) zu lesen: „L'aspect général rappelait, à certains égards, celui de Mars. On voyait, vers le milieu, des taches sombres comparables à celles de cette planète; dans l'angle de position de 38°, au bord du disque, on appercevait un point blanc, rappelant un pôle de Mars. Deux teintes différentes se distinguaient sur la surface du disque; la teinte de l'hémisphère nord-ouest était sombre, celle de l'hémisphère sud-est était blanc-bleuâtre". — *b.* Schon 1821 hatte **Bouvard** bei Publikation seiner Uranus-Tafeln ausgesprochen, dass sich nicht sämtliche Beobachtungen des Uranus durch ein und dasselbe System von Elementen darstellen lassen, — später sich sogar der Annahme eines unbekannten störenden Planeten zugeneigt, — ja sogar den Plan gefasst, die Bahn dieses letztern durch eine umgekehrte Störungsrechnung zu bestimmen. Nachher hatte sich sodann **Bessel** besonders lebhaft für einen solchen transuranischen Planeten interessiert und war nicht nur darüber mit Arago, J. Herschel und Airy in Korrespondenz getreten, sondern hatte Ende der Dreissigerjahre verschiedene seiner Schüler aufgemuntert, die von Bouvard gestellte Aufgabe an die Hand zu nehmen. Es geschah dies dann auch, wie er 1840 in seiner Vorlesung „Über die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie" erwähnte, mehrfach, jedoch meistenteils nicht mit der nötigen Umsicht und Ausdauer, so dass er beizufügen hatte: „Nur Einer hat sich durchgearbeitet, und dieser ist einer meiner hiesigen jungen Freunde, **Flemming**, dem ich, falls er hier gegenwärtig ist, ein **Glückauf** zurufe". Leider konnte aber auch Friedrich Wilhelm **Flemming** (Danzig 1812 — ebenda 1840; designierter Astronom der naturf. Ges. in Danzig) die Erwartungen seines Lehrers nicht erfüllen, da er noch in demselben Jahre vor Vollendung der bereits zweijährigen Arbeit starb, und da niemand dessen Rechnungen fortsetzte, ja erst nachträglich ein Teil der Vorarbeiten unter dem Titel „Reductionen der in Greenwich, Paris und Königsberg gemachten Beobachtungen des Uranus von 1781—1837 (A. N. 705 u. f. von 1850)" veröffentlicht wurde, so blieb die Untersuchung wieder liegen, bis einige Jahre später, wohl nicht ganz unabhängig von Flemming, aber jedenfalls unabhängig von einander, zwei junge Mathematiker, U. **Leverrier** und J. C. **Adams**, dieselbe neuerdings begannen und nun glücklich zum Abschlusse brachten: **Adams** legte schon im September 1845 James **Challis** (Bramtree in Essex 1803 — Cambridge 1882; Prof. phys. et astron. Cambridge; vgl. Monthly Not. Vol. 43) und einen

Monat später auch **Airy** erste Resultate seiner Rechnungen vor, und wenn er dieselben auch nicht vor 1846, wo er seine „Explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus on the hypothesis of disturbances caused by a more distant planet. London 1846 in 8." publizierte, vollständig abgeschlossen haben mag, so reichten jene Angaben doch bereits für **Challis** hin, um am Himmel mit Erfolg nach dem neuen Planeten zu suchen, welchen er (wie sich später zeigte) auch wirklich 1846 VIII 4 und 12 sah, aber wegen Mangel an detaillierten Karten der betreffenden Himmelsgegend leider nicht sofort erkannte. Unterdessen hatte **Leverrier** der Pariser Akademie 1845 XI 10, 1846 VI 1 und 1846 VIII 31 ebenfalls Vorlagen über seine entsprechenden, zum Teil (vgl. Mitth. 79 von 1892) durch Em. **Gautier** kontrolierten Rechnungen gemacht, — ihr namentlich unter letzterm Datum die von ihm gefundenen mutmasslichen Bahnelemente

$$E = 1847\ \mathrm{I}\ 1 \qquad a = 36{,}154 \qquad T = 217^a{,}387$$
$$P = 284^0\ 51' \qquad e = 0{,}10761 \qquad M = 318^0\ 47'$$

des störenden Körpers mitgeteilt, für den er die Masse $^1/_{9300}$ annahm, — sofort auch in der Conn. d. t. pour 1849 seine „Recherches sur les mouvements de la planète Herschel dite Uranus. Paris 1846 in 8." publiziert, — und endlich Verschiedene, wie namentlich den über einen der besten damaligen Refraktoren verfügenden Observator **Galle** in Berlin, mit Zuschrift aufgefordert, nach dem damals etwa in der Nähe von δ Capricorni stehenden Störefried zu suchen. Mit welchem Erfolge letzteres geschah, wird unter der folgenden Nummer erzählt werden; dagegen füge ich hier noch zu etwelcher Ergänzung der Uranus-Litteratur die Abhandlungen „Sim. **Newcomb**, An investigation of the orbit of Uranus, with general tables of its motion. Washington 1873 in 4., — H. **Seeliger**, Über die Gestalt des Planeten Uranus. München 1884 in 8., — und: Asaph **Hall**, The orbits of Oberon and Titania, the outer satellites of Uranus. Washington 1885 in 4." bei.

559. Die Entdeckung Neptuns. — Als **Galle** am 23. September 1846 durch Zuschrift von Leverrier erfuhr, dass der transuranische Planet nunmehr in der Nähe von δ Capricorni stehen sollte, verglich er noch am gleichen Abend, unter Assistenz von **d'Arrest**, die zwar schon seit einem Jahr im Stiche vollendete, aber noch nicht versandte, also immerhin nur für ihn benutzbare Hora XXI der bereits (546) erwähnten akademischen Sternkarten, mit dem Himmel und fand sofort den Gesuchten, was nicht nur der Mechanik und Topographie des Himmels einen grossartigen, auch dem Laien imponierenden Triumph, sondern speciell **Leverrier** und **Galle** grossen Ruhm einbrachte, während **Adams** und **Challis** anfänglich das reine Nachsehen hatten und erst in neuerer Zeit zu dem ihnen gehörenden Anteil gelangen konnten. — Begreiflich wurde der neue Planet, welcher den Namen **Neptun** erhielt, sofort vielfach beobachtet und da sich überdies noch einige ältere Positionen finden liessen, so konnten bald auch aus den Beobachtungen Elemente berechnet

werden, welche aber natürlich nicht ganz mit den aus den Störungen erhaltenen übereinstimmten, so dass einigen Neidern Gelegenheit geboten war, die Entdeckung nachträglich zu bemängeln, wofür sie aber nach Verdienen zurechtgewiesen wurden [a].

Zu 559: *a.* Mit Ausnahme der guten alten Karoline **Herschel,** welche es schmerzlich empfunden haben soll, die ihrem Bruder gelungene Erweiterung des Sonnensystemes durch die neue Entdeckung noch übertroffen zu sehen, wurde letztere anfänglich überall freudig begrüsst, und auch die über Benennung des neuen Planeten, für welchen einzelne (wie namentlich **Arago**) den Namen „Leverrier", andere den Namen „Janus", etc., belieben wollten, entstandene Kontroverse in Minne beigelegt, indem der vom Bureau des longitudes unmittelbar nach der Entdeckung vorgeschlagene Name **Neptun** (♆) bald allgemein Eingang fand. Als dann aber **Petersen** (vgl. A. N. 594—95 von 1847) den sichern Nachweis leisten konnte, dass **Lalande** bereits 1795 V 10 Neptun als Fixstern beobachtet hatte, ferner **Lamont** in einem 1845.6 mehrmals beobachteten kleinen Fixstern Neptun erkannte, — hierauf in Verbindung dieser alten Positionen mit den neu erhaltenen sichere Elemente berechnet werden konnten, — und diese mit den von **Leverrier** gegebenen nicht völlig übereinstimmten, so machten **Babinet** und Konsorten, wie schon oben angedeutet wurde, gehässige Versuche, auf diese Differenz gestützt das Verdienst von **Leverrier** herabzusetzen, wurden dann aber allerdings teils durch ihn selbst in zwei der Académie des sciences gehaltenen Vorträgen, teils durch **Jacobi** in seiner Note „Über Leverriers Entdeckung des Neptun (A. N. 651 von 1849)", sowie durch O. **Struve** in seinen „Bemerkungen über die gegen Herrn Leverrier erhobenen Angriffe in Betreff des Neptun (Bull. Pét. 1848)" gründlich heimgeschickt. Immerhin wurde **Leverrier** durch diese Vorkommnisse sehr unangenehm berührt, und es war wohl zunächst unter ihrem Eindrucke, dass er die Worte niederschrieb: „Il y a des gens qui font et laissent faire; il y en a d'autres qui ne font pas, mais laissent faire; la pire espèce, ce sont ceux qui ne font pas et ne veulent pas qu'on fasse". — Für weitern Detail verweise ich teils auf den in 13 erwähnten „Précis" von **Biot** und die mit vielen Dokumenten belegte Geschichte, welche K. v. **Littrow** 1878 der von ihm besorgten 6. A. der „Wunder des Himmels" einverleibte, teils auf die Publikationen: „**Walker**, Memoir on Neptune (Smiths. Contr. 1848), — **Lindenau**, Beitrag zur Geschichte der Neptuns-Entdeckung (A. N. suppl. 1849), — **Gould**, Report on the history of the discovery of Neptune. Washington 1850 in 8., — G. J. **Sidler**, Les inégalités du moyen mouvement d'Uranus dues à l'action perturbatrice de Neptune. Zurich 1854 in 8., und: Über die Acceleration des Uranus durch Neptun (A. N. 1149 von 1858), — M. **Kowalski**, Recherches sur les mouvements de Neptune suivies des tables de cette planète. Kasan 1855 in 4., — **Newcomb**, An investigation of the orbit of Neptune, with general tables of its motion (Smiths. Contr. 1865), — W. **Meyer**, Über die Entdeckung Neptuns (Zürch. Viert. 1874), — **Dreyer**, Historical note concerning the discovery of Neptune (Copernicus 1881), — etc."

560. Die neuesten Ergebnisse. — Dass von Neptun, dessen grosse Distanz ihn sogar beinahe der mikrometrischen Messung entzieht, nur wenige nähere Angaben vorliegen, ist selbstverständlich;

immerhin hat **Lassell** schon 1846 einen Mond bei ihm aufgefunden, — **Newcomb** mit Hilfe desselben seine Masse bestimmt, — und **Hall** für seine Rotationsdauer $7^h\,54^m,8$ erhalten [a]. — Ob über Neptun noch ein Planet steht, und der Rechnungsplanet Leverriers strenge genommen aus diesem und Neptun resultierte, wird die Zukunft zeigen, — gesucht wird nach einem transneptunischen Planeten schon einige Zeit [b].

Zu 560: *a.* Der von **Lassell** aufgefundene Mond wurde auch von O. **Struve**, W. **Bond**, etc., wiederholt beobachtet, und beschreibt nach den Untersuchungen von S. **Newcomb** in $5^d,8769$ eine Bahn, die mit dem Erdequator einen Winkel von $121^0,7$ und somit ein neues Belege für das in 558 erwähnte Vorkommen von Ausnahmefällen bildet. Mit seiner Hilfe erhielt der Ebengenannte für Neptun die Masse $^1/_{19380}$, während die durch ihn veranlassten Störungen $^1/_{18700}$ ergaben. Die durch M. **Hall** (vgl. Nature 1885 I 1) aus Beobachtung einer periodischen Ungleichheit in der Lichtstärke Neptuns geschlossene kurze Rotationsdauer desselben lässt auf eine starke Abplattung schliessen, und diese dürfte nach F. **Tisserand** (Compt. rend. 1888 XI 19) die von **Marth** (Monthly Not. 1886) in den Bahnelementen des Neptunmondes bemerkten Veränderungen (wie namentlich einer von 1852—83 erfolgten Zunahme der Länge des aufsteigenden Knotens von $176^0,20$ auf $184^0,31$ bei einer Abnahme der Neigung von $148^0,33$ auf $142^0,38$) erklären. Weitere Monde sind bis jetzt bei Neptun nicht mit Sicherheit aufgefunden worden, und ein bei ihm anfänglich durch **Lassell** vermutetes Ringsystem liess er später selbst wieder fallen. — Vgl. auch „Asaph **Hall**, Orbit of the satellite of Neptune. Washington 1885 in 4.“ — *b.* Schon 1846 X 1 sprach **Leverrier** in einem Briefe an E. Gautier aus, dass wohl Neptun nicht der letzte Planet unsers Sonnensystemes sein werde, und aus der Note „David P. **Todd**, Telescopic search for the Trans-Neptunian Planet (A. N. 2698 von 1885)“ erfahren wir, dass bereits seit 1877 nach einem solchen obern Planeten gesucht wird.

XXII. Die Sternschnuppen und Kometen.

> Croire tout découvert est une erreur profonde,
> — C'est prendre l'horizon pour les bornes du monde. *(Lemierre.)*

561. Die Sternschnuppen, Feuerkugeln und Meteoriten. — Der ältern Wahrnehmungen und Ansichten ist schon früher (278) ziemlich einlässlich gedacht worden, so dass hier nur noch weniges nachzutragen bleibt [a]. Dagegen ist hervorzuheben, wie noch im vorigen Jahrhundert dieses Gebiet der Naturlehre vernachlässigt wurde: Nicht nur hatte der Aufruf von J. J. **Scheuchzer**, die Meteore wenigstens zu beobachten, fast keinen Erfolg [b], — nicht nur blieb der Nachweis von **Halley**, dass sie kosmische Natur besitzen, so ziemlich unbeachtet [c], — sondern es wurden sogar die bestkonstatierten Erscheinungen angezweifelt und deren Bedeutung total verkannt [d].

Zu 561: *a.* Ob der schon in 278 erwähnte „heilige Stein" zu Mekka wirklich vom Himmel niederfiel, ist fraglich; dagegen unterliegt es keinem Zweifel, dass am 7. November (nicht am 3. April, wie in 278 fälschlich gesagt wurde) 1492 gegen Mittag und unter weithin hörbarem Getöse bei Ensisheim im Elsass ein aus Kieselerde und Eisenoxyd bestehender, mit schwarzbrauner Rinde versehener, bei drei Centner wiegender Stein zur Erde niederstürzte und in der dortigen Kirche niedergelegt wurde, wo noch jetzt ein ansehnliches Stück desselben zu sehen sein soll. — Bemerkenswert ist, dass sich schon Joh. Rudolf **Glauber** (Karlstadt in Franken 1603? — Amsterdam 1668; technischer Chemiker; meist auf Reisen) in seinem „Opus minerale. Amstelodami 1651 in 8." mit der chemischen Untersuchung von Meteoriten befasste, wenn auch allerdings erst viel später Ed. **Howard** (Ph. Tr. 1802) eine erste eigentliche Analyse ausführte. — *b.* Als 1697 Joh. Jak. **Scheuchzer** seine Zeitgenossen in einer „Charta invitatoria" einlud, den Naturerscheinungen und speciell auch den Meteoren grössere Aufmerksamkeit zuzuwenden, fiel seine Aufforderung fast ausschliesslich auf tauben Boden, und wenn er nicht selbst in seinen „Naturgeschichten des Schweizerlandes. Zürich 1706—8, 3 Bde. in 4." eine Reihe solcher Erscheinungen aufgezeichnet hätte, so würden wir mutmasslich von den noch für die Gegenwart wichtigen Sternschnuppenregen von 1698 X 29 a. St. und 1709 VIII 8 n. St. keine Kenntnis besitzen. — *c.* Schon **Halley** hatte nämlich in seinem „Account of several extraordinary meteors (Ph. Tr. 1714)" bei

einigen mehrfach beobachteten Meteoren so grosse Höhen und Geschwindigkeiten gefunden, dass er nicht umhin konnte, denselben einen kosmischen Ursprung beizulegen — während allerdings ähnliche Rechnungsresultate, welche der sonst so verdiente Joh. Esaias **Silberschlag** (Aschersleben 1721 — Berlin 1791; Prediger, dann Oberbaurat und Akad. Berlin) für die Feuerkugel von 1762 VII 28 (vgl. seine 1764 erschienene Monographie) erhielt, denselben nicht hinderten, sie aus den auf den Schlachtfeldern lagernden Dünsten entstehen zu lassen. — *d.* Sogar als 1751 V 26, nachdem man in einem grossen Teile von Deutschland eine Feuerkugel von W nach E ziehen gesehen hatte, bei Agram in Kroatien nach starker Detonation zwei Eisenmassen niederfielen, von denen die grössere bei 71 Pfund wog, vermochte eine so laut sprechende und durch ein förmliches Protokoll beglaubigte Thatsache noch nicht, die Zweifler zu überzeugen und einer richtigen Anschauung zum Durchbruche zu verhelfen, — sagte ja noch 1790 der Wiener Naturforscher Andreas **Stütz** (Wien 1747 — ebenda 1806; Dir. Mus. Wien) in seiner „Bergbaukunde" mit Beziehung darauf: „Dass das Eisen vom Himmel gefallen sein soll, mögen wohl 1751 selbst Deutschlands aufgeklärte Köpfe bei der damals unter uns herrschenden Ungewissheit in der Naturgeschichte und Physik geglaubt haben; aber in unsern Zeiten wäre es unverzeihlich, solche Mährchen auch nur wahrscheinlich zu finden". Immerhin leugnete wenigstens Stütz das Fallen der Steine nicht, sondern wollte nur die Ansicht belieben, dieselben seien in der Atmosphäre „durch Entladen elektrischer Materie" gebildet worden, während dagegen, als im gleichen Jahre 1790 die Municipalität von Juillac in der Gascogne einen von mehr als 300 Augenzeugen beglaubigten Procès-verbal über einen dort stattgefundenen Steinfall an die Pariser Akademie einsandte, bei den Pariser Gelehrten die Ansicht die Oberhand behielt, man müsse so unglaubliche Dinge lieber wegleugnen, als sich auf Erklärungen einlassen, — ja der Physiker Pierre **Bertholon** de Saint Lazare (Lyon 1742 — ebenda 1800; Prof. phys. Montpellier) sagte damals im „Journal des Sciences utiles" sogar: „Wie traurig ist es nicht, eine ganze Municipalität durch ein Protokoll in aller Form Volkssagen bescheinigen zu sehen, die nur zu bemitleiden sind. Was soll ich einem solchen Protokoll weiter beifügen? Alle Bemerkungen ergeben sich dem philosophischen Leser von selbst, wenn er dieses authentische Zeugnis eines offenbar **falschen Faktums**, eines **physisch unmöglichen Phänomenes** liest". Auch **Lalande** teilte die alten Ansichten über die Sternschnuppen und sagte noch 1792 (vgl. Astronomie, 3 éd. II 555): „L'atmosphère est toujours chargée d'exhalaisons, de vapeurs, de nuages aqueux ou de feux électriques; de là naissent une multitude de météores, et surtout ces feux que l'on prend quelquefois pour des étoiles tombantes, mais qui ne sont que des exhalaisons légères, dont la lumière ne dure qu'un instant; quand elles sont près de nous, ce sont des globes de feu qui paraissent étonnants"; von Meteoriten habe ich bei ihm keine Erwähnung gefunden.

562. Chladni und die Pariser Akademie. — Der Erste, der sich mit wirklichem Erfolge bemühte, richtigere Ideen in Umlauf zu bringen, namentlich den kosmischen Ursprung der Meteorsteine, sowie ihren Zusammenhang mit Feuerkugeln und Sternschnuppen, plausibel zu machen, war entschieden **Chladni**; denn wenn auch seine Schrift „Über den Ursprung der von Pallas ge-

fundenen und andern ähnlichen Eisenmassen. Riga 1794 in 4." anfänglich nicht sehr beachtet wurde, ja er selbst und seine wenigen Anhänger mehr Spott als Anerkennung ernteten, so ergab sich doch nach und nach ein Umschlag, welchem sogar die in ihre gegenteiligen Ansichten verrannte Pariser Akademie vorläufig soweit Rechnung tragen musste, dass sie 1803 **Biot** zur Untersuchung des zu Aigle im Département de l'Orne gefallenen Steinregens abordnete, um sodann auf dessen Bericht hin von ihrer vorgefassten Meinung abzulassen [a].

Zu 562: *a.* Schon längere Zeit war aufgefallen, dass sich an verschiedenen Orten, an welchen man es nach der übrigen Bodenbeschaffenheit gar nicht zu erwarten hatte, grosse Massen gediegenen Eisens vorfinden, und so hatte namentlich 1771 der Reisende Peter Simon **Pallas** (Berlin 1741 — ebenda 1811; Akad. St. Petersburg) eine solche Masse kennen gelernt und (vgl. seine Note „D'une masse de fer natif trouvée en Sibérie" in Acta Petrop. 1778) beschrieben, welche 1749 von einem Kosaken in Sibirien auf einer der höchsten Spitzen eines Schiefergebirges und überhaupt an einer Stelle entdeckt worden war, wo sich weit und breit weder Bergwerke noch Schmelzhütten finden. Als **Chladni** hievon Kenntnis erhielt, fragte er sich, ob nicht auch diese Eisenmassen, entsprechend den (561) erwähnten Meteoriten von Ensisheim und Agram, nur in vorhistorischer Zeit, vom Himmel gefallen sein möchten, — stellte sodann alle ihm zugänglichen Berichte über Steinfälle und Meteore aller Art zusammen, — und kam hiebei schliesslich zu den oben mitgeteilten und in seiner Schrift von 1794 im Detail entwickelten Ansichten, mit denen er aber anfänglich wenig Glück machte. Namentlich glaubte die Pariser Akademie trotz alledem das durch **Deluc**, **Lavoisier** und **Laplace** gegen die Realität der Meteorsteinfälle abgegebene Verdikt aufrecht halten zu sollen, — ja hörte noch 1802 einen von **Pictet** zu Gunsten der Realität abgegebenen Bericht nur mit solchem Widerwillen an „qu'il lui fallut un vrai courage pour achever sa lecture", — ein Vorgang, durch welchen **Arago** zunächst zu dem Ausspruche veranlasst wurde: „Les physiciens qui ne veulent admettre que des faits dont ils entrevoient une explication, nuisent certainement plus à l'avancement des sciences que les hommes auxquels on peut reprocher une trop grande crédulité". Die Macht der Thatsachen überwältigte jedoch bald nachher auch noch diesen Widerstand; denn als die Nachricht einging, dass 1803 IV 26 bei l'Aigle im Département de l'Orne neuerdings Steine gefallen seien, verstand sich die Pariser Akademie, wie oben gesagt, bereits dazu, **Biot** zur genauen Feststellung aller Verumständungen an Ort und Stelle zu senden, und als dieser nun in seiner „Relation d'un voyage fait dans le Dép. de l'Orne pour constater la réalité d'un météore observé à l'Aigle. Paris An. XI in 4. (auch Mélanges II)" zu berichten hatte, dass man an jenem Tage zu Caen, etc., gegen 1^h Nachmittags unzweifelhaft eine Feuerkugel gesehen, und bei l'Aigle in einem Umkreise von 30 Stunden Radius eine $5-6^m$ andauernde heftige Explosion gehört habe, welche von einem am sonst hellen Himmel über letzterer Gegend stehenden Wölkchen auszugehen schien, — dass unmittelbar darauf 2—3000 Steine von $7-8500^{gr}$ Einzelgewicht niedergefallen seien, von denen wenigstens die grössern heiss waren, nach Schwefel rochen, sich anfänglich leicht brechen liessen, dann aber hart wurden, — und dass alle diese Steine auf eine ellip-

tische Fläche zu liegen kamen, deren grosse, nach NW gerichtete Axe 2½ Stunden, die kleine aber nur 1 Stunde betrug, — wagten auch die heftigsten Gegner nicht mehr, den kosmischen Ursprung der Meteoriten zu bezweifeln, — ja gegenteils wurde nunmehr den Zeugen alter, sowie den Erscheinungen neuer Steinfälle grosse Aufmerksamkeit zugewandt. — Noch bleibt beizufügen, dass die bei Aigle gefundenen Steine zu den sog. **Steinmeteoriten** gehörten, indem sie nach der Analyse von Louis-Jacques **Thénard** (Louptière 1777 — Paris 1857; Prof. chem. Paris und Akad.), analog dem Steine von Ensisheim, zunächst Kieselerde und Eisenoxyde, daneben allerdings auch noch kleine Mengen von Magnesia, Nickel und Schwefel enthielten, — derjenige von Pallas aber, von welchem später etwa 14 Centner nach Petersburg übergeführt wurden, entsprechend dem von Agram, zu den sog. **Eisenmeteoriten**, da er nach der Untersuchung von Jöns Jacob **Berzelius** (Väfversunda — Sörgard 1779 — Stockholm 1848; Prof. pharm. und Sekret. Akad. Stockholm) nicht weniger als 88% Eisen ergab, daneben fast 11% Nickel und nur Spuren von Kieselerde, Schwefel, etc.

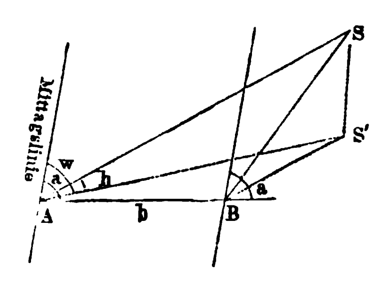
563. Die durch Brandes und Benzenberg eingeführten Beobachtungen. — Zur Berichtigung der Ansichten über die Sternschnuppen trugen, neben Chladnis Arbeiten, namentlich auch die sehr verständig angelegten Beobachtungen bei, welche im Herbst 1798 zwei Göttinger Studenten, **Brandes** und **Benzenberg**, begannen, und sodann nach der unter der folgenden Nummer auseinandergesetzten Methode berechneten [a]. Die Ergebnisse waren nämlich der Art, dass die kosmische Natur der Sternschnuppen ebenfalls nicht länger in Zweifel gezogen werden konnte, und die von den beiden Freunden herausgegebene Schrift „Versuche die Entfernung, die Geschwindigkeit und die Bahnen der Sternschnuppen zu bestimmen. Hamburg 1800 in 8.“ ist gewissermassen als Bürgerbrief zu betrachten, der diesen eigenartigen Erscheinungen für das Sonnensystem ausgestellt wurde [b].

Zu 563: *a.* Nachdem **Brandes** und **Benzenberg** auf der Göttinger Bibliothek vergeblich Aufschluss über die Grösse, Entfernung, Geschwindigkeit, etc., der Sternschnuppen zu erhalten gesucht hatten, entwarfen sie sich einen Plan, um sich diesen durch eigene Beobachtungen zu verschaffen, und schritten, nachdem derselbe durch ihren Lehrer **Lichtenberg** gebilligt worden war, sofort zu seiner Ausführung: Das wesentlichste bestand darin, dass sie zwischen Clausberg und Ellershausen eine Basis von 27040′ P. massen, welche sie orientierten und später noch um 20000′ über letztern Ort hinaus verlängerten, — und sodann von 1798 IX 11 bis XI 4 je Abends die Endpunkte der gemessenen Linie bezogen, um daselbst jede in Sicht kommende Sternschnuppe zu protokollieren, sowie ihre scheinbare Bahn bestmöglich in eine Sternkarte einzutragen. Da letzteres nur nach dem Gedächtnis ausgeführt wurde, so waren natürlich die später der Karte entnommenen Coordinaten der Endpunkte der Bahn ziemlich unsicher, und es war ein wesentlicher Fortschritt, als 1837 Karl **v. Littrow** zur direkten Coordinatenbestimmung ein eigenes **Meteoroskop** einführte, d. h. ein parallaktisch montiertes Absehen, das rasch auf den zu bestimmenden Punkt eingestellt werden konnte, während grobe Teilungen dessen approximative Lage

auf den ersten Blick ergaben. — *b.* Die grösstenteils durch **Brandes** redigierte Schrift von 1800 giebt zwar neben dem Detail der Beobachtungen nur eine kurze Zusammenstellung der aus denselben abgeleiteten Resultate; aber immerhin erfährt man, dass die Höhe der Sternschnuppen bei ihrem Sichtbarwerden zwischen 5 und 17 Meilen schwankte, — dass ihre Geschwindigkeit zwischen 4 und 6 Meilen variierte oder eine planetarische war, — dass die Länge der sichtbaren Bahn 8 bis 10 Meilen betrug, — dass die Endhöhe bald kleiner und bald grösser als die Anfangshöhe war, etc. Für Einzelheiten, sowie für eingehende Darlegung der angewandten Beobachtungs- und Rechnungsverfahren muss dagegen auf die spätern Schriften „**Benzenberg**, Über die Bestimmung der geographischen Länge durch Sternschnuppen. Hamburg 1802 in 8., und: Die Sternschnuppen. Hamburg 1839 in 8., — **Brandes**, Anleitung zur Beobachtung von Sternschnuppen (Gilberts Annalen 62 von 1819), und: Beobachtungen über Sternschnuppen und Untersuchungen über die Resultate derselben. Leipzig 1825 in 8., — etc." verwiesen werden, auf welche wir auch unter spätern Nummern zurückzugreifen haben. — Vorläufig mag noch erwähnt werden, dass sich auf dem durch Brandes und Benzenberg erschlossenen Gebiete nach und nach auch andere Arbeiter einfanden, und so z. B. **Quetelet** schon 1826 X 22 an Gautier schrieb: „Dans le moment je m'occupe avec une douzaine de mes anciens élèves repartis dans plusieurs villes du royaume, de faire des observations sur les étoiles filantes, afin de déterminer leurs directions, leurs hauteurs, leur vitesse, etc. J'ai déjà obtenu des résultats intéressants". Vgl. auch seine Corresp. math. et phys. von 1826 und später.

564. Die Berechnung der Beobachtungen. — Die von **Brandes** für die Verwertung der Göttinger Beobachtungen aufgestellte Vorschrift war sehr einfach und für den ihm vorliegenden Fall, wo es sich noch nicht um möglichst präcise Resultate handelte, ganz genügend [a]. Bald darauf wurde ihm dann aber allerdings durch **Olbers** ein wesentlich vollkommneres Rechnungsverfahren mitgeteilt [b], und auch in der neuern Zeit sind noch verschiedene andere Formelnsysteme zu demselben Zwecke entwickelt worden [c].

Zu 564: *a.* Das von **Brandes** anfänglich benutzte Rechnungsverfahren bestand darin, dass auf Grundlage der für die beiden Beobachtungsorte A und B in die Sternkarten eingetragenen scheinbaren Bahnen einer Sternschnuppe die Æ und D des Anfangs- oder Endpunktes S abgelesen, und daraus in gewöhnlicher Weise die der Sternzeit t der Beobachtung entsprechenden Wertepaare von Azimut w und Höhe h berechnet wurden. Man kannte so, wenn a das Azimut der Basis b bezeichnet, in dem rechtwinkligen Raumdreiecke A — SBS' die Seiten SAS' = h und S'AB = a — w, konnte also SAB und entsprechend aus B — SAS' auch SBA,



— somit aus dem ebenen Dreiecke SAB die Distanzen AS und BS, — folglich mit Hilfe der Höhenwinkel h die Höhe SS' sogar doppelt berechnen. Aus

den z. B. für A erhaltenen Æ und D der beiden Endpunkte kann man aber entsprechend 429 deren sphärische Distanz oder den Winkel der beiden, ihrer Länge nach bereits bekannten A S, also schliesslich auch noch die Länge der Bahn, und, im Vergleich mit der beobachteten Zeitdauer, die Geschwindigkeit bestimmen. — *b.* Natürlich ist das von **Brandes** aufgestellte Rechnungsverfahren, wie er auch selbst ganz gut einsah, nur anwendbar, wenn die Basis A B klein genug ist, um von der Krümmung der Erde absehen zu dürfen; andernfalls kann man z. B. in der von **Olbers** (vgl. dessen Brief von 1801 IV 6 in Benzenbergs Schrift von 1801) beliebten Weise vorgehen, die wesentlich in folgendem besteht: Bezeichnen ϱ', φ', t' die geocentrischen Coordinaten des Beobachters A zur Zeit einer Beobachtung, $\triangle'$, d', a' und R, D, A aber Distanz, Deklination und Rektascension des beobachteten Punktes in Beziehung auf Beobachter und Erdcentrum, so hat man (93:15), wenn die Willkürliche n durch a' ersetzt wird,

$$\begin{aligned} \triangle' \cdot \mathrm{Co}\, d' &= R \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(A - a') - \varrho' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Co}\,(t' - a') \\ 0 &= R \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Si}\,(A - a') - \varrho' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(t' - a') \\ \triangle' \cdot \mathrm{Si}\, d' &= R \cdot \mathrm{Si}\, D \qquad\qquad - \varrho' \cdot \mathrm{Si}\, \varphi' \end{aligned} \qquad 1$$

und analog bei Beobachtung desselben Punktes in B

$$\begin{aligned} \triangle'' \cdot \mathrm{Co}\, d'' &= R \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Co}\,(A - a'') - \varrho'' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi'' \cdot \mathrm{Co}\,(t'' - a'') \\ 0 &= R \cdot \mathrm{Co}\, D \cdot \mathrm{Si}\,(A - a'') - \varrho'' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,(t'' - a'') \\ \triangle'' \cdot \mathrm{Si}\, d'' &= R \cdot \mathrm{Si}\, D \qquad\qquad - \varrho'' \cdot \mathrm{Si}\, \varphi'' \end{aligned} \qquad 2$$

Setzt man nun

$$\varrho' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(t' - a') = M \qquad \varrho'' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,(t'' - a'') = N \qquad 3$$

so erhält man aus 1'' und 2''

$$\frac{\mathrm{Si}\,(A - a')}{\mathrm{Si}\,(A - a'')} = \frac{M}{N} \qquad \text{oder} \qquad \mathrm{Tg}\, A = \frac{M \cdot \mathrm{Si}\, a'' - N \cdot \mathrm{Si}\, a'}{M \cdot \mathrm{Co}\, a'' - N \cdot \mathrm{Co}\, a'} \qquad 4$$

ferner, indem man 1' · Si (A — a') — 1'' · Co (A — a') und 2' · Si (A — a'') — 2'' · Co (A — a'') bildet,

$$\triangle' = \frac{\varrho' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(A - t')}{\mathrm{Co}\, d' \cdot \mathrm{Si}\,(a' - A)} \qquad \triangle'' = \frac{\varrho'' \cdot \mathrm{Co}\, \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,(A - t'')}{\mathrm{Co}\, d'' \cdot \mathrm{Si}\,(a'' - A)} \qquad 5$$

und mit deren Hilfe aus 1''' und 1'', 2''' und 2''

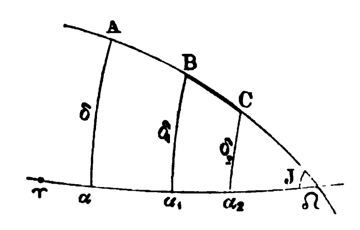
$$\begin{aligned} \mathrm{Tg}\, D &= [\mathrm{Tg}\, \varphi' \cdot \mathrm{Si}\,(a' - A) + \mathrm{Tg}\, d' \cdot \mathrm{Si}\,(A - t')] : \mathrm{Si}\,(a' - t') \\ &= [\mathrm{Tg}\, \varphi'' \cdot \mathrm{Si}\,(a'' - A) + \mathrm{Tg}\, d'' \cdot \mathrm{Si}\,(A - t'')] : \mathrm{Si}\,(a'' - t'') \end{aligned} \qquad 6$$

sowie endlich aus 1'' und 2''

$$R = M \cdot \mathrm{Se}\, D \cdot \mathrm{Cs}\,(A - a') = N \cdot \mathrm{Se}\, D \cdot \mathrm{Cs}\,(A - a'') \qquad 7$$

Man kann daher successive, und zum Teil sogar doppelt, die Unbekannten A, D, R, $\triangle'$, $\triangle''$ leicht finden, womit, wenn man die Rechnung für Anfangs- und Endpunkt durchführt, auch alles übrige ohne die mindeste Schwierigkeit erhältlich ist. — *c.* Es würde sich angesichts des beschränkten Raumes kaum rechtfertigen, hier auch die in „**Bessel**, Über Sternschnuppen (A. N. 380—81 von 1839), — **Grunert**, Die verschiedenen Auflösungen des Sternschnuppenproblemes aus einem allgemeinen Gesichtspunkte dargestellt (Archiv I von 1841), — **Goulier**, Etudes géométriques sur les étoiles filantes. Metz 1868 in 8., — **E. Weiss**, Beiträge zur Kenntniss der Sternschnuppen (Wien. Sitz. 57 und 62 von 1868—70), — **Galle**, Über die Berechnung der Bahnen heller, an vielen Orten beobachteter Meteore (A. N. 1989—90 von 1874), — R. **Lehmann**-Filhés, Die Bestimmung von Meteorbahnen. Berlin 1883 in 4., — etc." enthaltenen

neuern Methoden im Detail auseinanderzusetzen, obschon einige derselben sehr bemerkenswert sind; dagegen bleibt mir noch zu zeigen, wie der Radiationspunkt (282) einer Sternschnuppe, sei es durch Doppelbeobachtung oder **aus zwei Ständen**, sei es unter der Voraussetzung, es haben denselben (wie bei den Schwärmen in 567—69) mehrere an Einem Punkte beobachtete Sternschnuppen gemein, aus diesen, also **aus Einem Stande**, bestimmt werden kann: Zwischen den Coordinaten dreier Punkte A, B, C einer scheinbaren Bahn bestehen nämlich (87 : 1‴) die Beziehungen



$$\begin{aligned} \text{Tg}\,\delta &= \text{Tg J} \cdot \text{Si}\,(\Omega - \alpha\,) \\ \text{Tg}\,\delta_1 &= \text{Tg J} \cdot \text{Si}\,(\Omega - \alpha_1) \\ \text{Tg}\,\delta_2 &= \text{Tg J} \cdot \text{Si}\,(\Omega - \alpha_2) \end{aligned} \qquad \mathbf{8}$$

und aus diesen folgt durch Elimination von J und Ω die Relation

$$x = \text{I} - \text{II} \cdot y \qquad \text{wo} \qquad x = \text{Tg}\,\delta \cdot \text{Se}\,\alpha \qquad y = \text{Tg}\,\alpha \qquad \mathbf{9}$$

und

$$\text{I} = \frac{\text{Tg}\,\delta_1 \cdot \text{Si}\,\alpha_2 - \text{Tg}\,\delta_2 \cdot \text{Si}\,\alpha_1}{\text{Si}\,(\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad \text{II} = \frac{\text{Tg}\,\delta_1 \cdot \text{Co}\,\alpha_2 - \text{Tg}\,\delta_2 \cdot \text{Co}\,\alpha_1}{\text{Si}\,(\alpha_2 - \alpha_1)} \qquad \mathbf{10}$$

Da nun bei jeder vollständig beobachteten Sternschnuppe zwei Punkte B und C (Anfang und Ende) nach ihren Coordinaten, also nach 10 die zugehörigen Werte von I und II, bekannt sind, — ferner 9' für jeden Punkt A, also auch für den Radiationspunkt, besteht, und für diesen in ersterm Falle zweimal, in letzterm sogar mehr als zweimal aufgeschrieben werden kann, — so lassen sich in beiden Fällen x und y, somit auch α und β, wirklich berechnen, — ja man erhält im zweiten Falle sogar Anhaltspunkte, um die Zulässigkeit der Voraussetzung und die nach den Untersuchungen von **Bessel, Schmidt, Weiss**, etc., durchschnittlich bei $1^1/_2{}^0$ betragende Unsicherheit der einzelnen Eintragungen und Ablesungen zu beurteilen.

565. Die Zählungen und deren erste Ergebnisse. — Schon ein einfaches Abzählen der während einer bestimmten Zeit aufleuchtenden Sternschnuppen führt zu ganz interessanten Resultaten, und namentlich ist auf diese Weise, schon lange ehe die unter der folgenden Nummer zu behandelnden denkwürdigen Untersuchungen das wünschbare Licht über dieses Gebiet verbreiteten, der Beweis geleistet worden, dass in der Häufigkeit der Sternschnuppen sich sowohl ein **täglicher** als ein **jährlicher Gang** sehr bemerkbar macht [a].

Zu 565: *a.* Die Wahl der Zeitdauer für eine einzelne Zählung ist ziemlich gleichgiltig, doch ist nach meinen Erfahrungen die Viertelstunde zu empfehlen, und erst aus dieser auf die Stunde zu schliessen. Wesentlich ist es, dass der Beobachter während einer Beobachtung immer dieselbe Stelle des Himmels ins Auge fasst; soll der ganze Himmel beherrscht werden, so muss er mindestens noch 4 Hilfsbeobachter haben: So wählte ich für die von mir 1851 in Bern begonnenen und dann in Zürich bis 1859 fortgesetzten Zählungen entweder den Polarstern als Richtpunkt, — oder dann einen der um ihn ein sphärisches Sechseck bildenden Sterne α Serpentis, α Aquilæ, γ Pegasi, α Tauri, α Canis minoris und β Leonis, — bei hinlänglichen Hilfsbeobachtern sogar alle

über dem Horizonte befindlichen dieser Sterne. — Nachdem schon **Brandes** und **Herrick** darauf hingewiesen hatten, dass die Häufigkeit der Sternschnuppen von Abend gegen Morgen zuzunehmen scheine, wurde die wirkliche Existenz einer solchen täglichen Periode durch die R. A. **Coulvier-Gravier** (1803 — Paris 1868; Privatgel. Paris) und Jacques-Frédéric **Saigey** (Montbéliard 1797 — Paris 1871; Litterat und Verf. phys. Instr. Paris) nachgewiesen, indem sie in ihren „Recherches sur les étoiles filantes. Paris 1847 in 8.", gestützt auf zahlreiche Beobachtungen in den Jahren 1841—45, für die Stunden von 6^h Abends bis 6^h Morgens die durchschnittlichen Häufigkeitszahlen

3,3 3,5 3,7 4,0 4,5 5,0 5,8 6,4 7,1 7,6 8,0 8,2

fanden. Später gab der Erstgenannte, gestützt auf zwölfjährige Beobachtungen, die neue Reihe

6,5 7,0 6,3 7,9 8,0 9,5 10,7 13,1 16,8 15,6 13,8 13,7

während Jul. **Schmidt**, vgl. dessen „Resultate aus zehnjährigen Beobachtungen über Sternschnuppen. Berlin 1852 in 8. (auch A. N. 1756 von 1869)" aus 2840 stündlichen Beobachtungen die Reihe

5,3 5,7 6,7 7,9 9,5 11,6 14,1 16,3 17,9 18,2 18,7 14,9

erhielt. — Auch die bereits von **Brandes** hervorgehobene Thatsache, dass die Sternschnuppen im Herbst viel häufiger als im Frühjahr gesehen werden, wurde durch die erwähnten Zählungen in schönster Weise belegt, indem **Coulvier-Gravier** (l. c.) aus fünfjährigen Beobachtungen für Einen Beobachter und die 12 Monate als mittlere stündliche Häufigkeit die Werte

3,6 3,6 2,7 3,7 3,8 3,2 7,0 8,5 6,8 9,1 9,5 7,2

erhielt, deren Mittel 5,72 beträgt, — ich selbst (vgl. Zürch. Viert. von 1859) aus neunjährigen und fast ausschliesslich vormitternächtlichen Zählungen die Reihe 5,5 5,4 5,2 4,6 4,1 5,4 9,8 12,9 7,4 6,4 5,0 4,1

mit dem Mittelwerte 6,34 ableitete, — und endlich **Schmidt** (l. c.) aus 27-jährigen Bestimmungen

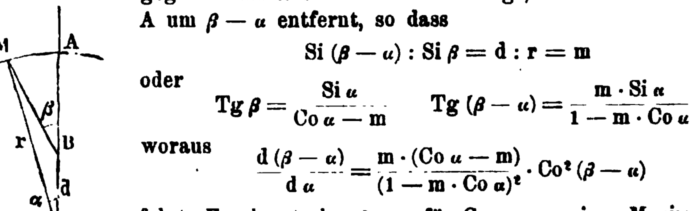
13,1 6,4 10,7 11,6 8,7 9,4 18,3 25,0 11,7 18,1 16,6 18,0

mit dem Mittelwerte 13,97 fand. Dass die im folgenden zu besprechenden Sternschnuppenregen diese letztern Reihen bedeutend stören, ist leicht ersichtlich.

566. Die Arbeiten von und seit Schiaparelli. — Die Lehre von dem Sternschnuppen-Phänomene wurde in der neuern Zeit namentlich durch **Schiaparelli** gefördert, indem es ihm gelang, unter der plausibeln Annahme, dass man die meisten dieser Meteore gegen den **Apex** hin sehen werde, sowohl die tägliche als die jährliche Häufigkeitsperiode befriedigend zu erklären, und überhaupt die ganze Erscheinung nach ihren Hauptzügen klar zu legen [a]. — Dagegen ist man allerdings über die eigentliche Natur der Sternschnuppen noch jetzt nicht vollständig im reinen, wenn man auch die ältern Ansichten ganz fallen gelassen hat und fast ausschliesslich mit **Chladni** annimmt, dass dieselben kleine kosmische Körper seien, welche beim Eintritte in die Atmosphäre sich bis zum Leuchten erhitzen, ja zum Teil in derselben verbrennen, wobei die allfälligen

Rückstände als Meteorstaub oder Meteorsteine zur Erde niederfallen [b]. — Charakteristisch ist, dass die Sternschnuppen zwar durchschnittlich parabolische Geschwindigkeit besitzen, aber sich denn doch wieder von den Kometen durch ihr Spektrum wesentlich unterscheiden [c].

Zu 566: *a.* So gross die Verdienste waren, welche sich die **Chladni** und **Brandes**, nebst ihren Mitarbeitern und nächsten Nachfolgern, um die Lehre von den Sternschnuppen erwarben, so hat dieselbe doch eigentlich erst durch die im folgenden skizzierten Untersuchungen von **Schiaparelli** eine sichere Grundlage erhalten, so dass dessen betreffende Publikationen „Intorno al corso ed all' origine probabile delle stelle meteoriche. Lettere al P. A. Secchi. Roma 1866 in 4. (auch Bull. met. V), und: Note e riflessioni intorno alla teoria astronomica delle stelle cadenti. Firenze 1867 in 4. (deutsch durch G. v. Boguławski. Stettin 1871)", als Marksteine einer neuen Aera bezeichnet werden können: Denken wir uns mit **Schiaparelli** die Erde mitten in einem, überall gleich dichten Haufen von kleinen Körperchen ruhend, so werden wir von jedem Punkte aus nach jeder Richtung nahe gleich viele dieser Körperchen zu sehen glauben. Wie sich dagegen die Erde gegen den Haufen verschiebt, so verändern sich auch diese Verhältnisse, indem, wenn ein Beobachter sich von C gegen A um $BC = d = m \cdot r$ bewegt, sich scheinbar M von A um $\beta - \alpha$ entfernt, so dass



$$\text{Si}(\beta - \alpha) : \text{Si}\,\beta = d : r = m$$

oder

$$\text{Tg}\,\beta = \frac{\text{Si}\,\alpha}{\text{Co}\,\alpha - m} \qquad \text{Tg}(\beta - \alpha) = \frac{m \cdot \text{Si}\,\alpha}{1 - m \cdot \text{Co}\,\alpha} \qquad 1$$

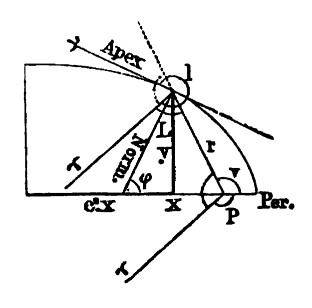
woraus

$$\frac{d(\beta - \alpha)}{d\alpha} = \frac{m \cdot (\text{Co}\,\alpha - m)}{(1 - m \cdot \text{Co}\,\alpha)^2} \cdot \text{Co}^2(\beta - \alpha) \qquad 2$$

folgt. Es nimmt also $\beta - \alpha$ für $\text{Co}\,\alpha = m$ einen Maximalwert $\beta - \alpha = \text{Atg}(m : \sqrt{1 - m^2})$ an, und zwar erhält man nach 1 mit den Argumenten m und α, für $\beta - \alpha$ die in der beifolgenden Tafel eingetragenen Werte, so dass sich sofort zeigt, wie stark seitliche Punkte schon bei geringen Werten von m, ja selbst nähere Punkte bei etwas grösserer Ge-

m	α						
	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
0,0	0°,0	0°,0	0°,0	0°,0	0°,0	0°,0	0°,0
0,1	0,0	1,6	3,1	4,4	5,2	**5,7**	**5,7**
0,2	0,0	3,7	6,9	9,4	10,9	**11,5**	11,3
0,3	0,0	6,2	11,5	15,1	17,0	**17,4**	16,7
0,4	0,0	9,6	17,0	21,5	**23,4**	23,3	21,8
0,5	0,0	14,0	23,8	28,7	**30,0**	29,0	26,1
0,6	0,0	20,3	32,0	36,4	**36,6**	34,4	31,0
0,7	0,0	29,2	41,6	**45,6**	43,0	39,5	35,0
0,8	0,0	42,3	**52,5**	**52,5**	49,1	44,3	38,7
0,9	0,0	60,7	**63,9**	60,3	54,8	49,0	42,0
1,0	0,0	**82,5**	75,0	67,5	61,0	52,5	45,0

schwindigkeit anseinander zu gehen scheinen. Es muss daher einem Beobachter, der rasch mitten durch einen Meteorschwarm fährt, vorkommen, es stehen die Meteore gegen seinen Apex hin am dichtesten. Über die Lage dieses letztern und die mit ihr zusammenhängenden Verhältnisse geben aber folgende Rechnungen den wünschbaren Aufschluss: Bezeichnen L und l die Längen der Sonne und des Apex, P die nach Hansen für 1850,0 gleich 100° 21′ 41″ anzunehmende Länge des Perihels der Erde und v ihre wahre Anomalie, endlich a und a e halbe grosse Axe und Excentricität der Erdbahn, so hat man



$$v = 180^0 + L - P \qquad l = 270^0 + L - (v - \varphi) \qquad \mathbf{3}$$

und mit Hilfe von 74 : 6, etc.

$$\operatorname{Tg} \varphi = \frac{y}{x(1-e^2)} = \frac{\operatorname{Si} v}{e + \operatorname{Co} v} \qquad \mathbf{4}$$
$$\operatorname{Tg}(v - \varphi) = \frac{e \cdot \operatorname{Si} v}{1 + e \cdot \operatorname{Co} v}$$

Aus 4″ folgt aber durch Differentiation

$$\frac{d(v-\varphi)}{dv} = \frac{e \cdot \operatorname{Co}^2(v-\varphi)}{(1+e \cdot \operatorname{Co} v)^2} \cdot (e + \operatorname{Co} v) \quad \text{also im Max.} \quad \operatorname{Tg}(v-\varphi)' = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \qquad \mathbf{5}$$

Nun war für die Erdbahn 1850,0 nach Hansen $e = 0{,}0167712$ und man erhält daher nach 4″ unter Beihilfe von 40 : 23, 24, wenn $v - \varphi$ in Bogenminuten ausgedrückt werden soll,

$$v - \varphi = \frac{e}{\operatorname{Si} 1'} \cdot \operatorname{Si} v - \frac{e^2}{2 \cdot \operatorname{Si} 1'} \cdot \operatorname{Si} 2v + \ldots \coloneqq 57^2/_3{}' \cdot \operatorname{Si} v \qquad (v-\varphi)' \coloneqq 57^2/_3{}' \qquad \mathbf{6}$$

Hat man aber $v - \varphi$ bestimmt, so kann man nach 3″ auch die einem gewissen v oder Datum entsprechende Länge l des Apex, — somit (197 : 11, 12) nach

$$\operatorname{Tg} a = \operatorname{Co} \varepsilon \cdot \operatorname{Tg} l \qquad \operatorname{Si} d = \operatorname{Si} \varepsilon \cdot \operatorname{Si} l \qquad \mathbf{7}$$

wo für 1850,0 nach Hansen $\varepsilon = 23^0\ 27'\ 30''$ ist, Æ und D desselben, — und sodann in gewohnter Weise die Zeiten t′, t″, t‴ von dessen Aufgang, Culmination und Untergang, sowie dessen Höhe h bei der Culmination, für irgend eine Polhöhe finden. So z. B. erhält man für die Polhöhe von 47° unter Benutzung des Berliner Jahrbuches für 1850,0 die korrespondierenden Werte:

v	L	oder Datum	v — φ	a	d	t′	t″	t‴	h
				h m		h m	h m	h m	
0°	280°22′	I 1	0′	12 38	— 4° 6′	12 10	17 53	23 36	38°54′
30	310 22	— 30	29	14 30	— 14 47	12 55	17 49	22 43	28 13
60	340 22	III 1	50	16 31	— 21 54	13 34	17 52	22 10	21 6
90	10 22	— 31	58	18 41	— 23 7	13 52	18 3	22 14	19 53
120	40 22	V 1	50	20 48	— 17 53	13 29	18 8	22 47	25 7
150	70 22	VI 1	29	22 46	— 7 52	12 38	18 4	23 30	35 8
180	100 22	VII 2	0	0 38	4 6	11 37	17 54	0 11	47 6
210	130 22	VIII 3	— 29	2 34	15 6	10 36	17 43	0 50	58 6
240	160 22	IX 3	— 50	4 39	22 8	10 2	17 46	1 30	65 8
270	190 22	X 3	— 58	6 49	22 58	10 10	17 58	1 46	65 58
300	220 22	XI 2	— 50	8 55	17 26	10 47	18 6	1 25	60 26
330	250 22	XII 2	— 29	10 49	7 30	11 30	18 2	0 34	50 30

Der Apex geht also im Herbst bald nach 10^h Abends, im Frühjahr dagegen erst etwas vor 2^h Morgens auf, — culminiert immer circa um 6^h Morgens, — und erreicht im Herbst eine sehr bedeutende Höhe, während er im Frühjahr immer nahe am Horizont bleibt. Hieraus ergiebt sich aber notwendig teils eine **tägliche** Häufigkeitsperiode mit Abendminimum und Morgenmaximum, teils eine **jährliche** mit Frühjahrminimum und Herbstmaximum, — und da diese Resultate ganz mit den Zählungsergebnissen (565) harmonieren, so darf wohl umgekehrt die unserer Rechnung zu Grunde liegende Anschauung als richtig betrachtet werden. — Für weitere Entwicklungen muss auf die eingangs erwähnten Publikationen und überhaupt auf die Speciallitteratur verwiesen werden. — *b.* Über die eigentliche Natur der Sternschnuppen ist man noch keineswegs im klaren; doch hält sie jetzt höchstens noch der ganz Ungebildete (entsprechend dem Namen) für „Sternputzen“ oder „fallende Sterne“, und auch die in frühern Jahrhunderten vertretene Ansicht, sie seien den Irrlichtern entsprechende schweflige Dünste oder brennbare Gase, ist fast ganz verschwunden: Die verbreitetste und plausibelste Anschauung ist die (vgl. Marie II 151) schon durch Roger **Baco**, dann aber namentlich durch **Chladni** aufgestellte und von **Schiaparelli** auch rechnerisch belegte Lehre, die Sternschnuppen seien kleine kosmische Körper, welche beim Eintritte in die Atmosphäre sich bis zum Schmelzen, Leuchten und Verbrennen erhitzen, — wohl zunächst durch Umsetzen lebendiger Kraft in Wärme, — vielleicht teilweise auch, wenn sich unter ihnen nach der Meinung von „W. **Knobloch**, Über Meteorerscheinungen. Berlin 1868 in 8.“ poröse Metallklümpchen finden sollten, durch (dem Platinschwamm analoges) Verdichten des Sauerstoffes. Je nach der Richtung und Geschwindigkeit, mit der sie in die Atmosphäre eindringen, verlassen sie dieselbe entweder wieder, wenn auch da kaum ohne Modifikation ihrer Bahnen und ohne zum Teil verbrannt zu sein, — oder bleiben in derselben zurück und fallen, wenn die Verbrennung nicht vollkommen stattgefunden hat, teilweise als Meteorstaub, oder sogar als Meteorsteine zur Erde nieder. Aus den erwähnten Modifikationen auf den Zustand der obern Atmosphäre schliessen und die Beobachtung der Sternschnuppen auch zu meteorologischen Zwecken verwerten zu wollen, wie dies z. B. **Coulvier-Gravier** in seinem „Précis des recherches sur les météores et sur les lois qui les régissent. Paris 1863 in 8.“ angestrebt hat, scheint mir etwas gewagt. — *c.* Setzt man nach den bisherigen Erfahrungen die mittlere Länge des scheinbaren Weges einer Sternschnuppe gleich 12°, die mittlere Höhe gleich 100^{km}, und die Zeitdauer der Sichtbarkeit gleich $^1/_2{}^s$, so ist die Länge des wirklich beschriebenen Weges gleich $100 \cdot \pi \cdot {}^{12}/_{180} \risingdotseq 20^{km}$ und somit die Geschwindigkeit gleich $40^{km} \risingdotseq 5^1/_2$ g. M. Es ist also letztere durchschnittlich entschieden grösser als die etwa 4 g. M. betragende Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, — ja kömmt, da $5^1/_2 : 4 \risingdotseq 1{,}375$ ist, der sog. parabolischen Geschwindigkeit 1,414 (vgl. 484) sehr nahe. Schon Hubert A. **Newton** (Sherburn in N. Y. 1830 geb.; Dir. Obs. New Haven) erkannte dieses merkwürdige Verhältnis und schloss daraus mit vollem Rechte, dass die Bahnen der Sternschnuppen mehr mit den Kometen- als mit den Planeten-Bahnen übereinstimmen, — war also schon nahe daran, den glücklichen Griff zu thun, von welchem wir später (583) hören werden. — Die allerdings noch wenig zahlreichen spektroskopischen Beobachtungen, welche bis jetzt an Sternschnuppen angestellt werden konnten, sprechen dagegen eher dafür, dass sie eine von den Kometen etwas verschiedene Natur besitzen: Von den für letztere charakteristischen Streifen (587) wurde nichts

bemerkt, sondern sowohl Alex. **Herschel** als Nic. v. **Konkoly** erhielten ein kontinuierliches Spektrum, wie es feste und flüssige Körper ergeben. Immerhin ist interessant, dass die helle Natriumlinie, welche letzterer auf den Spektren einzelner Sternschnuppen gelagert fand und der durch den Meteoriten kondensierten Luft zuteilte, auch bei einem Kometen (587) gesehen wurde.

567. Die Leoniden. — Von den schon früher (282) erwähnten, sich nicht nur durch die Häufigkeitsverhältnisse, sondern namentlich auch durch eine bestimmte **siderische Zeit**[a], das Vorherrschen eines einzelnen Radiationspunktes und dessen Teilnahme an der täglichen Bewegung charakterisierenden und als kosmischer Natur erweisenden **Meteorregen**, ist derjenige am längsten und besten bekannt, der gegenwärtig um den 12. November herum in Sicht kömmt und, da sein Radiationspunkt in den Löwen fällt, als derjenige der **Leoniden** bezeichnet wird. Er wurde zuerst 1799 durch **Humboldt** wirklich beobachtet, und seither 1832/4 und 1865/7 wieder gesehen, konnte aber auch rückwärts in alten Aufzeichnungen bis in das 10. Jahrhundert verfolgt werden, — ja es ist bereits gelungen, die bei demselben vorhandenen Hauptverhältnisse ziemlich sicher zu ermitteln und den Schluss zu ziehen, dass er durch eine Meteorwolke veranlasst wird, welche in $33^1/_4$ Jahren die Sonne umwandert und dabei jeweilen die Ebene der Ekliptik an einer Stelle passiert, in deren Nähe die Erde zu der angegebenen Zeit gelangt[b].

Zu 567: *a.* Unter **siderischer Zeit** einer im Jahre n zur Zeit t beobachteten Erscheinung versteht man die Zeit $t + x$, zu welcher in einem als Epoche gewählten Jahre (wie z. B. 1850) die Erde zu derselben Länge zurückkehrt, die sie zu jener Zeit t besass. Unter Voraussetzung, dass sich t auf den julianischen Kalender beziehe und bereits annähernd (z. B. für China durch Verminderung um $0^d,3$, für Amerika durch Vermehrung um $0^d,2$, — überdies, bei Ermanglung genauerer Zeitangabe, für eine Tagesbeobachtung 0^h, für eine Nachtbeobachtung 12^h in Rechnung bringend) auf Mittel-Europa reduziert sei, ergiebt sich nun die Korrektion x durch folgende Betrachtung: Da ein gemeines Jahr gegen ein siderisches um $0^d,25637$ zu kurz, ein Schaltjahr um $0^d,74363$ zu lang, also eine Schaltperiode noch um $0^d,02548$ zu kurz ist, so wird nach Ablauf einer längern Reihe von Jahren ein erhebliches Vordatieren eingetreten sein, folglich demselben Datum des spätern Jahres eine geringere Länge der Erde entsprechen. Man hat daher, um die der Epoche 1850 entsprechende siderische Zeit zu erhalten, t eine nach

$$x = 0,02548 \cdot p + r \qquad \text{wo} \qquad 1850 - n = 4p + q \qquad \mathbf{1}$$

angenommen ist, zu berechnende Grösse zuzufügen, und zwar korrespondieren, da 1850 das zweite Jahr nach einem Schaltjahre ist,

$$q = 1 \text{ und } r = 0,256 \qquad q = 2 \text{ und } r = -0,487 \qquad q = 3 \text{ und } r = -0,231 \qquad \mathbf{2}$$

So z. B. wird dem julianischen Datum 1095 IV 3,6, da $1850 - 1095 = 4 \cdot 188 + 3$, also $x = 188 \times 0,02578 - 0,231 = 4,6$ ist, die siderische Zeit IV $3,6 + 4,6 =$ IV 8,2 jul. = IV 20,2 greg. entsprechen. — *b.* Den November-Strom hatte **Humboldt** 1799 XI 11,6 zu Cumana in Venezuela beobachtet, wo man sich an eine

ähnliche Erscheinung im Jahre 1766 zu erinnern glaubte; sodann war er wieder 1832/4 mit Max. 1833 XI 12,9 m. Z. Par. in Europa und Amerika gesehen und dadurch Olbers u. a. veranlasst worden, eine mutmassliche Wiederkehr auf 1866 anzukündigen, die dann auch wirklich in reichem Masse erfolgte. Überdies fand man nach und nach einige sichere Spuren von ältern Erscheinungen, so dass man gegenwärtig zum mindesten über die folgenden ziemlich sichern Daten verfügt:

Nr.	Zeit	Ort	Autorität	Reduzierte Zeit I	II	III	Jahres-Diff.
1	902 X 12,8 jul.	Italien .	Herrick . .	12,8	18,8	32,1	
2	931 X 14,5 -	Italien .	Quetelet .	14,5	20,0	32,9	32 = P
3	934 X 14,5 -	China . .	Biot	14,2	20,0	32,8	
4	1002 X 14,5 -	China . .	Biot	14,2	19,6	31,5	68 = 2 P
5	1101 X 16,5 -	Frankr.	Perrey . .	16,5	21,5	32,0	99 = 3 P
6	1202 X 19,5 -	Kairo .	Herrick . .	19,4	23,5	32,6	101 = 3 P
7	1366 X 21,7 -	Prag . .	Bogulawski	21,6	25,7	32,5	164 = 5 P
8	1533 X 24,5 -	China . .	Biot	24,2	26,5	30,9	167 = 5 P
9	1698 X 29,7 -	Zürich .	Wolf . . .	29,7	30,7	32,8	165 = 5 P
10	1799 XI 11,6 gr.	Cumana	Humboldt	31,8	31,8	32,5	101 = 3 P
11	1833 XI 12,7 -	New Hav.	Herrick . .	31,9	32,3	32,5	34 = P
12	1867 XI 13,6 -	Toronto	Newton . .	32,8	32,4	32,2	34 = P
	Mittel			21,97	25,23	32,27	965 = 29 P'
	Mittlere Abweichung vom Mittel . . .			± 7,50	± 5,17	± 0,56	2619 = 109 P''

Den gegebenen Beobachtungszeiten entsprechen nun die reduzierten Zeiten I, II, III: Die I sind die auf den julianischen Kalender bezogenen, so gut als möglich auf Mittel-Europa reduzierten Tage Oktober. Die II sind die aus den I mit Hilfe von 1 und 2 abgeleiteten siderischen Zeiten, welche nun in der That schon bedeutend weniger voneinander abweichen, aber doch noch eine sehr ausgesprochene systematische Verschiedenheit zeigen, welche wahrscheinlich mit einer Verschiebung des Knotens zusammenhängt. Nimmt man nämlich an, der Knoten der Sternschnuppenbahn in der Ekliptik rücke jährlich um y Tage vor, so sind die II behufs ihrer wirklichen Reduktion auf die Epoche 1850 um $(1850 - n) \cdot y$ Tage zu vermehren, und bestimmt man nun dieser Annahme entsprechend y aus den 12 Gleichungen $(1850 - n) \cdot y + II = Const.$, so erhält man als wahrscheinlichsten Wert $y = 0{,}0140$, damit aber die III, welche nun so gut übereinstimmen, dass man an der Richtigkeit der Hypothese kaum zweifeln kann. Das Mittel der III stimmt mit dem gregorianischen Datum XI 13,27 zusammen. — Lässt man die Erscheinung Nr. 2, welche offenbar nur Vorläufer der Nr. 3 war, weg und setzt die Länge der Periode gleich P, so erhält man die 10 in obige Tafel eingetragenen Gleichungen $a = b \cdot P$, und aus diesen entweder durch einfache Summation $\Sigma' a = P' \cdot \Sigma b$ oder, der Methode der kleinsten Quadrate entsprechend, $\Sigma a \cdot b = P'' \cdot \Sigma b^2$, woraus $P' = 33{,}28$ und $P'' = 33{,}20$ folgen, so dass sich die Richtigkeit der schon früher durch Denison **Olmsted** (East Hartford in Connecticut 1791 — New-Haven 1859; Prof. math. et phys. New-Haven), E. C. **Herrick**, H. C. **Newton**, etc., in naher

Übereinstimmung mit **Olbers**, zu $33^1/_4{}^a$ angenommenen Periodenlänge auf das Schönste bestätigt. Da nach dem dritten Kepler'schen Gesetze $1^2 : 33^1/_4{}^2 = 1^3 : a^3$ sein muss, so ist die grosse Bahnaxe dieses Schwarmes $a \fallingdotseq 10{,}34$, und da der Durchgang durch den Knoten teils nahe mit der Periheldistanz, teils nahe mit der Erde zusammenfallen muss, so lässt sich die Excentricität der Bahn zur Not aus $a \cdot (1 - e) = 1$ berechnen, woraus $e \fallingdotseq 0{,}90$ folgt. Der Radiationspunkt liegt im Mittel aus den Bestimmungen von **Schmidt** und **Heis** in 149° Æ und 26° D. — Anhangsweise bleibt zu erwähnen, dass die noch von **Quetelet** und einigen seiner Zeitgenossen gehegte Meinung, es möchten die Sternschnuppenschwärme in Beziehung zu meteorologischen Vorgängen stehen, schon 1863 durch H. A. **Newton** in seiner Note „Evidence of the cosmical origin of shooting stars (Amer. Journ. of Science)“ gründlich aus dem Felde geschlagen wurde, indem er mit Recht sagte: „Die Wiederkehr von Meteoren an bestimmten Tagen des Jahres müsste, wenn ihnen atmosphärische Verhältnisse zu Grunde liegen würden, auch an die, dem Wechsel der Jahreszeiten zu Grunde liegende Periode des **tropischen** Jahres gebunden sein. Wenn dagegen Ringe von Körperchen, welche um die Sonne kreisen und der Erde zu jenen Zeiten begegnen, die Meteorschauer veranlassen, so muss der Cyklus, je nachdem die Knoten des Ringes in der Ekliptik feststehen oder sich längs derselben langsam verschieben, mit dem **siderischen** Jahre oder einer kleinen Abänderung desselben übereinstimmen, — jedenfalls aber schwerlich mit dem tropischen Jahre, da kaum anzunehmen ist, dass die Schnelligkeit einer allfälligen Bewegung der Knoten gerade mit derjenigen der Nachtgleichenpunkte übereinstimmen werde“. Und in der That, wenn auch letzteres für die Leoniden, wo der für y erhaltene Wert nur um etwa $0^d{,}0002 = 17^s$ kleiner als der Unterschied der beiden Jahre ist, nahezu eintrifft, so zeigt sich z. B. bei den Perseiden (568) eine so starke Differenz, dass darin der kosmische Charakter unzweifelhaft hervortritt.

568. Die Perseiden. — Auf einen zweiten Meteorregen, der alljährlich mit ziemlich konstanter, aber diejenige der Leoniden bei weitem nicht erreichender Intensität, um den 10. August herum aus dem Perseus niederfällt und daher als derjenige der **Perseiden** bezeichnet wird, wies allerdings, abgesehen von einer betreffenden Sage, **Musschenbroek** schon 1762 hin, aber es gelang erst **Quetelet**, die allgemeine Aufmerksamkeit auf denselben zu lenken [a]. Er ist seither ziemlich regelmässig beobachtet und auch rückwärts bis in das 9. Jahrhundert verfolgt worden, jedoch ohne dass es bisdahin gelungen wäre, die Umlaufszeit des ihn bedingenden Schwarmes mit voller Sicherheit zu ermitteln, — was damit zusammenhängen dürfte, dass er nicht aus einer einzelnen Wolke, sondern aus vielen, längs der ganzen Bahn verteilten Anhäufungen besteht [b].

Zu 568: *a.* Inwieweit die irische Sage von den feurigen Thränen des heil. **Laurentius**, der um 250 als Christ auf Befehl des Kaisers Decius förmlich auf einem Rost gebraten wurde, mit Recht auf den Auguststrom bezogen wird, will ich hier nicht untersuchen, jedoch darauf aufmerksam machen, dass schon im alten Kalender (vgl. Regiomontans Ephemeriden), wo ja derselbe schon Ende Juli eintrat, Laurentius am 10. August gefeiert wurde; dagegen ist zu

erinnern, dass **Musschenbroek** (nach Arago) bereits in seiner 1762 posthum erschienenen „Introductio" von diesem Phänomene sprechen soll, wenn auch allerdings erst in unserm Jahrhundert **Olbers**, und ganz besonders der hiefür (vgl. Brief an Gautier von 1854 I 20 in Notiz 387) die Priorität ansprechende **Quetelet**, des nähern auf die Periodicität dieser Erscheinung aufmerksam machten und deren genauere Beobachtung veranlassten; doch hatte letzterer schon in einem 1840 IX 22 an Gautier geschriebenen Briefe zu klagen: „Cette année, il n'a point été question des étoiles filantes du mois d'août; il semblerait que ce phénomène ait déjà passé de mode, car la science paie aussi son tribut aux caprices de la mode". — *b.* Für die Perseiden liegen unter anderm folgende 12 ziemlich zuverlässige Daten vor:

Nr.	Zeit	Ort	Autorität	Reduzierte Zeit		
				I	II	III
1	835 VII 22,5 jul.	China . . .	Biot . . .	22,2	28,4	30,1
2	926 VII 22,5 -	China . . .	Biot . . .	22,2	28,1	29,7
3	1243 VII 26,5 -	England. .	Herrick .	26,5	30,1	31,1
4	1451 VII 27,5 -	China . . .	Biot . . .	27,2	29,5	30,2
5	1709 VIII 8,5 gr.	Zürich . . .	Wolf . . .	28,5	29,6	29,8
6	1779 VIII 9,5 -	Neapel . .	Quetelet .	29,5	29,7	29,8
7	1781 VIII 8,5 -	Boston . .	Herrick .	28,7	29,4	29,5
8	1789 VIII 10,5 -	Apenninen	Quetelet .	30,5	31,1	31,1
9	1799 VIII 9,5 -	Göttingen .	Quetelet .	29,5	29,6	29,7
10	1822 VIII 9,5 -	New-York	Herrick .	29,7	29,9	29,9
11	1831 VIII 10,5 -	Westindien	Quetelet .	30,7	30,6	30,6
12	1852 VIII 10,6 -	Bern	Wolf . . .	30,6	30,2	30,2
	Mittel			27,98	29,68	30,14
	Mittlere Abweichung vom Mittel			± 2,87	± 0,80	± 0,51

aus welchen sich unter Anwendung der frühern Methode (567) die drei reduzierten Zeiten ergeben, welche zu entsprechenden Schlüssen führen, wie solche für die Leoniden erhalten wurden. Speziell ist anzuführen, dass sich hier $y = 0{,}0017$, also ein grosser Unterschied von der Jahresdifferenz ergiebt. — Nicht so einfach und sicher wie bei den intermittierenden Leoniden wird dagegen die Bestimmung der Periode bei den Perseiden, da diese letztern jedes Jahr, nur nicht immer in gleicher Häufigkeit, auftreten, und so sind auch wirklich dafür sehr verschiedene Resultate erhalten worden: Während **Coulvier-Gravier** glaubte, aus seinen Zählungen auf eine Periode von 20ª schliessen zu sollen, erhöhte sein Nachfolger **Chapelas**, sich zunächst an die Maxima von 1848 und 1879 haltend, dieselbe auf 31ª; R. P. **Greg** nahm dagegen an, dass 1846, 1854 und 1862 Minimaljahre gewesen seien, also eine Periode von 8ª bestehen müsse, und W. F. **Denning** kam zu demselben Resultate, als er 1839, 1847, 1863 und 1871 als Maximaljahre feststellte; **Schiaparelli** endlich, der auch die frühern Erscheinungen konsultierte, kam auf eine Periode von 108ª, und **mir** ergab eine sorgfältige, wenn auch nicht abschliessende Prüfung, für welche ich zu den oben aufgezählten 12 Erscheinungen noch eine ziemliche Anzahl älterer und neuerer Daten beizog, dass die erwähnten Perioden von 20 und

31^a absolut unhaltbar seien, dass dagegen in nahem Anschlusse an die übrigen Bestimmungen **nebeneinander** zwei Perioden von $8^a,05$ und $104^a,60 = 13 \times 8,05$ in der Weise bestehen dürften, dass der Ring der Perseiden aus 13 einzelnen Wolken gebildet werde, welche abwechselnd je nach 8^a für uns ein Max. bewirken, während der ganze Ring in $104^1/_2{}^a$ umlaufe. — Der Hauptradiationspunkt des August-Stromes liegt im Mittel aus vielfachen Bestimmungen in $43^0,0 \pm 1^0,5$ Æ und $53^0,0 \pm 0^0,7$ D, also nahe an γ Persei; jedoch hat neuerlich **Bredichin** nachgewiesen, dass man eigentlich bei den Meteorschwärmen nicht von einem einzelnen Radiationspunkte, sondern von einer Ausstrahlungsfläche zu sprechen habe, welche bei den Perseiden die Gestalt eines Ovales besitze, dessen grösster Durchmesser volle 20° betrage. — Die stündliche Häufigkeit schwankt bei den Perseiden etwa zwischen 30 (1867) und 150 (1863), kömmt also mit derjenigen der Leoniden, welche nach Tausenden zählt, gar nicht in Vergleich.

569. Einige andere Sternschnuppenschwärme. — Ausser den beiden Hauptschwärmen der Leoniden und Perseiden hat die neuere Zeit noch eine ganze Reihe anderer und zum Teil ebenfalls schon in früherer Zeit repräsentierter Schwärme aufgefunden. Insbesondere dürfte noch auf die im April erscheinenden **Lyriden** und die uns noch später (583) beschäftigenden, jetzt gegen Ende November auftretenden **Andromediden** aufmerksam zu machen sein [a].

Zu 569: *a.* Ich beschränke mich darauf, die von William Frederic **Denning** (Braysdown bei Bath 1848 geb.; Astronom in Bristol) für die Epoche 1890 zusammengestellte, auch die beiden Hauptströme umfassende Tafel der wichtigsten Meteorregen aufzunehmen

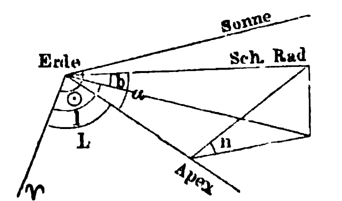
Schwärme	Epoche	Max.	Radiat.		Entdecker
			Æ	D	
Quadrantiden.	XII 28 — I 4	I 2	$15^h,3$	$52^0,5$	Heis
Lyriden	IV 16 — IV 22	IV 20	18,0	32,5	Herrick
Aquariden { η	IV 30 — V 6	V 6	22,5	— 2,1	Tupman
Aquariden { δ	VII 23 — VIII 23	VII 28	22,6	— 11,6	Quetelet
Perseiden . . .	VII 11 — VIII 22	VIII 10	3,1	56,9	Musschenbroek
Orioniden . . .	X 9 — X 29	X 18	6,1	15,5	Schmidt
Leoniden . . .	XI 9 — XI 17	XI 13	10,0	22,9	Humboldt
Andromediden	XI 25 — XI 30	XI 27	1,7	43,8	Brandes
Geminiden . .	XII 1 — XII 14	XII 10	7,2	32,6	Greg

und derselben folgende Bemerkungen über die Lyriden beizufügen: Der Aprilstrom, der einer Periode von 7^a oder einem Vielfachen von 7^a (wie etwa von 42^a) zu unterliegen scheint, dürfte zu den ältest beobachteten gehören, indem **Chasles** schon eine dahin gehörende Erscheinung von 582 anführt, — ferner eine 1122 IV 11,5 in Italien beachtete, zu welcher mein lieber Freund Georg **v. Wyss** (Zürich 1816 geb.; Prof. Gesch. Zürich) in einem 1123 IV 11,5 in Unterfranken bemerkten Meteorschauer ein wertvolles Pendant auffand. Ob ein 1782 V 15,4 durch Joh. Jakob **Kitt** (Zürich 1747 — St. Margrethen im Rheinthal 1797; Pfarrer zu St. Margrethen) beobachteter reicher Sternschnuppenfall

einem Nebenzweige der Lyriden, mit welchen er einen ähnlichen Radiationspunkt besessen zu haben scheint, angehörte, kann ich nicht mit Sicherheit bestimmen.

570. Bestimmung der Bahnen von Sternschnuppenschwärmen. — Macht man die Voraussetzung, dass sich die Sternschnuppenschwärme nach den Kepler'schen Gesetzen um die Sonne bewegen, so kennt man von ihrer Bahn, ausser dem Brennpunkte und dem als nahe mit dem Orte der Erde zur Zeit der Erscheinung übereinstimmenden Durchgangspunkte durch die Ekliptik, die diesem letztern zugehörige, abgesehen von der unten zu besprechenden Aberration, mit der Geraden nach dem beobachteten oder scheinbaren Radiationspunkte zusammenfallende Tangente, was offenbar hinreichen muss, um eine parabolische oder sogar, wenn man noch aus der Periodicität der Erscheinung auf die Umlaufszeit schliessen zu können glaubt, eine elliptische Bahn zu berechnen, und es sind in der That für solche Rechnungen bereits verschiedene Methoden aufgestellt, sowie nach denselben mehrfach solche Bestimmungen ausgeführt worden [a].

Zu 570: *a.* Bezeichnen ⊙ und L die geocentrischen Längen von Sonne und Apex der Erde zur Zeit eines Meteorregens, dessen Beobachtung für den scheinbaren Radiationspunkt (kürzer: Radiant) die Ekliptikcoordinaten l und b ergeben hat, und ist r die Entfernung der Sonne von der Erde, so hat man nach 70 (z. 51) : 10



$$L = \odot - 90^\circ - \overline{7{,}4348} \cdot d\,Lg\,r : d\odot \qquad 1$$

wo d Lg r und d⊙ durch die aus den Tafeln erhältlichen täglichen Zunahmen von Lg r und ⊙ zu ersetzen sind. Mit Hilfe von L findet man sodann successive nach

$$Ct\,n = Si\,(l - L) \cdot Ct\,b \qquad Ct\,\alpha = Ct\,(l - L) \cdot Co\,n \qquad 2$$

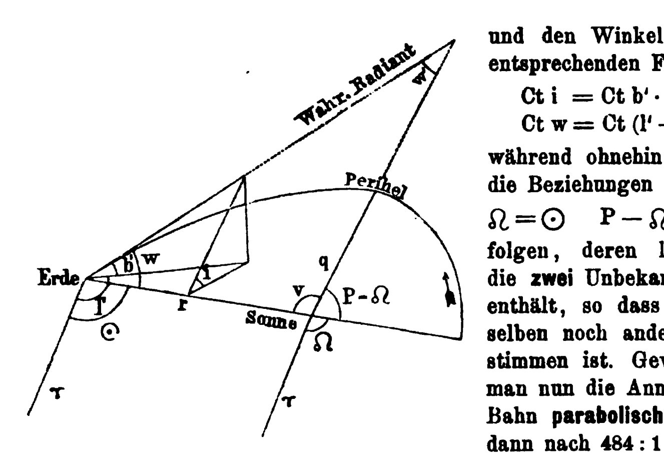
die scheinbare Elongation α des Radianten, — aus dieser, wenn c das (allerdings nach 484 : 1 nur unter Annahme eines Wertes für die grosse Axe der Meteorbahn bestimmbare) Verhältnis der Geschwindigkeit der Meteore zur Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn um die Sonne ist, nach der 264 : 1 entsprechenden Proportion

$$Si\,(\alpha' - \alpha) : Si\,\alpha = 1 : c \qquad 3$$

die wahre Elongation α', — und endlich umgekehrt aus dieser nach den 2 entsprechenden Formeln

$$Tg\,(l' - L) = Tg\,\alpha' \cdot Co\,n \qquad Tg\,b' = Si\,(l' - L) \cdot Tg\,n \qquad 4$$

successive die Ekliptikcoordinaten des wahren Radianten. Da nun die Richtung nach diesem letztern (als Tangente der Meteorbahn) mit der Knotenlinie die Bahnebene bestimmen muss, so erhält man die Neigung i der Bahnebene



und den Winkel w aus den 2 entsprechenden Formeln

$$\begin{aligned} \mathrm{Ct}\, i &= \mathrm{Ct}\, b' \cdot \mathrm{Si}\,(l' - \odot) \\ \mathrm{Ct}\, w &= \mathrm{Ct}\,(l' - \odot) \cdot \mathrm{Co}\, i \end{aligned} \qquad 5$$

während ohnehin aus der Figur die Beziehungen

$$☊ = \odot \qquad P - ☊ = 180^0 - v \qquad 6$$

folgen, deren letztere jedoch die **zwei** Unbekannten P und v enthält, so dass die Eine derselben noch anderweitig zu bestimmen ist. Gewöhnlich macht man nun die Annahme, dass die Bahn **parabolisch** sei, — erhält dann nach 484 : 1

$$c = g \cdot \sqrt{2 : r} : [g \cdot \sqrt{(2 : r) - 1}] = \sqrt{2 : (2 - r)} \qquad 7$$

kann somit c und die davon abhängigen Grössen wirklich berechnen, — weiss überdies, dass nun $w' = w$, also

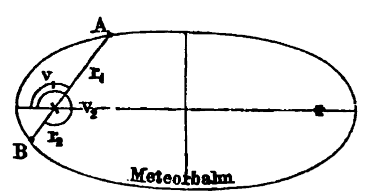
$$v = 180 - 2w \qquad P = ☊ + 2w \qquad q = r \cdot \mathrm{Co}^2\, {}^1\!/_2\, v = r \cdot \mathrm{Si}^2\, w \qquad 8$$

ist, — und kann nach 501 : 6 auch noch die seit dem Periheldurchgange verflossene Zeit berechnen. In den wenigen Fällen, wo man die Umlaufszeit des Schwarmes und somit nach dem dritten Kepler'schen Gesetze a zu kennen glaubt, kann man die Rechnung auch unter der Annahme, dass die Bahn **elliptisch** sei, zu Ende führen, indem man nun c nach 484 : 1 ebenfalls berechnen, — ferner v und e nach 74 (z. 53) : 28—30, — und endlich successive u, m, t nach 484 : 2, 6 ermitteln kann. — Vgl. für verschiedene Behandlungen dieser Aufgabe die Publikationen von A. **Erman** (A. N. 385 von 1839), S. C. **Walker** (Proc. Amer. Phil. Soc. 1840), E. **Weiss** (Beiträge in 564), Th. **Oppolzer** (Lehrbuch in 504), W. **Klinkerfues** (Astronomie in 504), R. **Lehmann**-Filhés (Meteorbahnen in 564), J. A. **Kleiber** (Opredelenije orbit meteornych potokof. St. Petersburg 1891 in 8.; vgl. Referat Harzer in Astr. Viert. 1891), etc., und voraus die von mir zunächst benutzte von G. D. E. **Weyer** (A. N. 2744—45 von 1886), — für einige Rechnungsresultate unsere 583.

571. Die neuern Beobachtungen und Ansichten. — Über die in der neuern Zeit aufgefundenen Beziehungen der Sternschnuppen zu den Kometen kann erst etwas später (583) eingetreten werden, und über die Bemühungen, erstere spektroskopisch zu analysieren, wurde bereits früher (566) Einiges beigebracht; dagegen bleibt hier noch zu erwähnen, dass der zur Zeit von Ad. **Erman** vermutete Zusammenhang der kalten Tage im Mai mit Meteorschwärmen, welche vor der Sonne vorübergehen, kaum existiert, jedenfalls noch viel fraglicher ist als die (566 u. 568) vermutete Bedeutung der Sternschnuppen für Witterungsprognosen [a]. Ferner ist an die zuerst von **Widmannstätten** bei einzelnen Meteoriten entdeckten und also mit Recht seinen Namen tragenden charakteristischen Figuren zu er-

innern, welche in Verbindung mit den Ergebnissen der chemischen Analyse die bereits oben (562) angedeutete Einteilung in Klassen veranlasst haben [b]. Es würde mich jedoch hier zu weit führen, näher auf diese letztere einzutreten und es muss dafür, sowie für die zum Teil noch unreifen oder wenigstens noch nicht genügend begründeten Ansichten über Natur und Ursprung, und überhaupt für weitern Detail über diese merkwürdige, uns noch viele ungelöste Rätsel darbietende Familie, auf die Speciallitteratur verwiesen werden [c].

Zu 571: *a.* Vgl. „Georg Adolf **Erman** (Berlin 1806 — ebenda 1877; Prof. phys. Berlin; Nachkomme der Ermendinger in Mülhausen), Über einige Thatsachen, welche wahrscheinlich machen, dass die Asteroiden der Augustperiode sich im Februar, und die der Novemberperiode im Mai eines jeden Jahres zwischen der Sonne und der Erde, auf dem Radius vector der letzteren befinden (A. N. 390 von 1840)". — Ist aber A B die Knotenlinie einer Meteoritenbahn mit der Ekliptik, und trifft das Meteor in A mit der Erde zusammen, so ist $r_1 = 1$, also (73 : 21)



$$1 + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{p} \quad \text{oder} \quad r_2 = \frac{p}{2 - p} \qquad 1$$

also z. B. für eine Parabel der Perihel-distanz $q = \frac{1}{2} p$ notwendig $r_2 = q : (1 - q)$. Setzt man daher nach „Joseph **Kleiber** (1865 — Nizza 1892; Doc. Petersburg), Les étoiles filantes et la température (Ciel et terre 1887)", dem ich hier folge, für die Perseiden $q = 0{,}964$ oder für die Leoniden $q = 0{,}987$, so erhält man in ersterm Falle $r_2 = 27$, im zweiten $r_2 = 76$. Es kann also keine Rede davon sein, dass einer dieser beiden Meteorschauer bei seinem Durchgange durch den zweiten Knoten zwischen Erde und Sonne durchgeht; aber allerdings ist es nicht unmöglich, dass ein anderer Schauer ein solches Wagnis unternimmt. Vgl. übrigens **Billwiller** in Zürch. Viert. 1877. — *b.* Aloys Beck Edler **v. Widmannstätten** (1753? bis Wien 1849; Dir. Fabrikproduktenkab. Wien) fand die nach ihm benannten, aus einer Menge sich unter verschiedenen Winkeln kreuzenden Linien bestehenden, eigentümlichen Figuren, als er 1808 eine polierte Schnittfläche des Agramer Meteorits mit Salpetersäure behandelte. Sie sind z. B. in „Franz Anton **v. Schreibers** (Pressburg 1775 — Wien 1852; Dir. Naturalienkab. Wien), Beiträge zur Geschichte und Kenntniss meteorischer Stein- und Metallmassen. Wien 1820 in fol." abgebildet. — *c.* Den bereits citierten Schriften mögen noch folgende beigefügt werden: „**Chladni**, Catalogue de la chute des pierres ou des masses de fer. Paris 1809 in 8., und: Über Feuermeteore und die mit denselben herabgefallenen Massen. Wien 1819 in 8., — **Quetelet**, Catalogue des principales apparitions d'étoiles filantes (Mém. Brux. 1839—41), — **Herrick**, Contribution to a history of star-showers of former times (Sillim. 1840), — **Chasles**, Sur les apparitions périodiques d'étoiles filantes observées du 6. au 12. siècle (Compt. rend. 1841), — Paul Maria **Partsch** (Wien 1791 bis ebenda 1856; Custos Mineralienkab. Wien), Die Meteoriten oder vom Himmel gefallenen Steine und Eisenmassen im k. k. Hof-Mineralienkabinet. Wien 1843 in 8. (Neue A. durch Brezina 1885), — Ed. **Biot**, Catalogue général des étoiles filantes et des autres météores observés en Chine pendant 24 siècles.

Paris 1846 in 4., — **Heis**, Die periodischen Sternschnuppen und die Resultate der Erscheinungen, abgeleitet aus den während der letzten 10 Jahre zu Aachen angestellten Beobachtungen. Köln 1849 in 4., — Karl **v. Reichenbach** (Stuttgart 1788 — Leipzig 1869; Hüttenmann), Über die Meteoriten (Pogg. Annal. 1857—60), — Otto **Buchner**, Die Feuermeteore, insbesondere die Meteoriten. Giessen 1859 in 8., und: Die Meteoriten in Sammlungen, ihre Geschichte, mineralogische und chemische Beschaffenheit. Leipzig 1863 in 8., — Wilhelm **Haidinger** (Wien 1795 — ebenda 1871; Dir. k. k. geol. Reichsanstalt), Über die Natur der Meteoriten in ihrer Zusammensetzung und Erscheinung (Wien. Sitz. 1861; auch später betreffende Artikel), — P. A. **Kesselmeyer**, Über den Ursprung der Meteorsteine. Frankfurt 1860 in 4., — Gustav **Rose** (Berlin 1798 — ebenda 1873; Prof. miner. Berlin), Beschreibung und Eintheilung der Meteoriten (Berl. Abh. 1863), — Gustav Adolf **Kenngott** (Breslau 1818 geb.; Prof. miner. Zürich), Über die Meteoriten. Leipzig 1863 in 8., — Gabriel-Auguste **Daubrée** (Metz 1814 geb.; Prof. geol. Paris), Classification adoptée pour la collection de météorites du Muséum (Compt. rend. 1867), — D. **Kirkwood**, Comets and meteors. Philadelphia 1873 in 8., — Stanislas **Meunier**, Cours de géologie comparée (Météorites). Paris 1874 in 8., — etc."

572. Fatios Beobachtung des Zodiakallichtes. — In mittlern Breiten sieht man im Frühjahr etwa $1^1/_2{}^h$ nach Sonnenuntergang und im Herbst etwa $1^1/_2{}^h$ vor Sonnenaufgang, in der heissen Zone fast täglich zweimal, einen vom Horizonte längs der Ekliptik aufsteigenden weisslichen, in Länge, Breite und Intensität wechselnden Schimmer, das sog. **Zodiakallicht** [a]. Es wurde schon frühe zuweilen bemerkt, aber erst von 1683 hinweg durch **Fatio** wirklich und andauernd beobachtet, wobei er zu der Ansicht gelangte, dass sich alle Erscheinungen und Wechsel erklären lassen, wenn man annehme, dass die Sonne von einem Gürtel kleiner und durch sie beleuchteter Körper umgeben sei [b].

Zu 572: *a.* Da das Zodiakallicht nahe in die Ebene der Ekliptik fällt, so muss es offenbar um so sichtbarer sein, je mehr sich letztere zur Zeit von Sonnenuntergang oder Sonnenaufgang vom Horizonte ablöst, d. h. je grösser der (197:19) durch

$$\begin{aligned} \text{Co}\,\mathfrak{n} &= \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Co}\,(\mu + e) \cdot \text{Se}\,\mu \qquad \text{wo} \qquad \text{Tg}\,\mu = \text{Ct}\,\varphi \cdot \text{Si}\,t \\ &= \text{Si}\,\varphi \cdot \text{Co}\,e - \text{Co}\,\varphi \cdot \text{Si}\,e \cdot \text{Si}\,t \end{aligned} \qquad 1$$

gegebene Winkel $\mathfrak{n}$ wird, welchen die Ekliptik mit dem Horizonte bildet, — also je kleiner φ ist, und je näher für Auf- oder Untergang die Sternzeit t an $90^0 = 6^h$ fällt, wie dies im Herbst und Frühjahr der Fall ist. Für $t = 6^h$ wird im Maximum $\mathfrak{n} = 90^0 - (\varphi - e)$, für $t = 18^h$ im Minimum $\mathfrak{n} = 90^0 - (\varphi + e)$, — schwankt also am Equator zwischen $113^1/_2{}^0$ und $66^1/_2{}^0$, unter der Breite von $47^1/_2{}^0$ aber zwischen 66^0 und 19^0. — *b.* Das Zodiakallicht wurde im Orient, wo die religiösen Gebräuche vorschrieben, auf den Anfang der Morgendämmerung zu achten, schon frühe bemerkt (vgl. Redhouse im Journ. asiat. Soc. 1878 und 1880) und als „falsche Morgendämmerung" bezeichnet, — war den Mexikanern schon vor Entdeckung Amerikas, jedenfalls (vgl. Humboldts Kosmos I 145) seit 1509 bekannt, — wurde im Abendlande von den **Tycho**, **Rothmann**,

Wendelin, etc. wiederholt gesehen, — und von Joshua **Childrey** (1623 — Upway in Dorsetshire 1670; Schullehrer in Kent, dann Pfarrer in Upway) in seiner „Britannia Baconica. London 1661 in 4." sogar einlässlich beschrieben; aber eigentlich beobachtet wurde es erst von 1683 III 18 hinweg, wo Dom. **Cassini** und der damals bei ihm auf der Pariser Sternwarte arbeitende Nic. **Fatio** auf dasselbe aufmerksam wurden. Namentlich verfolgte der letztere, zuerst in Paris und dann noch während zwei Jahren auf seiner Privatsternwarte in Duiller bei Genf, die vermeintliche neue Erscheinung mit der nötigen Konsequenz, — stellte dadurch fest, dass das Zodiakallicht der Sonne in ihrer jährlichen Bewegung folge und seine Sichtbarkeit in der oben angegebenen Weise wechsle, — und gab überhaupt Cassini, was manche Berichterstatter vollständig übersehen zu haben scheinen, das Hauptmaterial zu seiner Schrift „Découverte de la lumière céleste qui paroit dans le Zodiaque. Paris 1685 in fol." Während ferner **Cassini** die unhaltbare Vermutung aussprach, wir möchten die stark abgeplattete Sonnenatmosphäre als Zodiakallicht sehen, so hatte sich dagegen sein junger Freund eine viel plausiblere Ansicht gebildet, welche sodann ersterer in den Worten resümierte: „Mr **Fatio** suppose dans l'Ether des particules capables de détourner et de réfléchir la lumière. Il les dispose tout autour du Soleil comme dans un Zodiaque solide, large et irrégulier, compris entre deux surfaces courbes et ondoyantes, en sorte qu'elles puissent comprendre dans un moindre espace les orbites des planètes décrites autour du Soleil, placées à diverses distances, et inclinées diversement l'une vers l'autre. Le milieu de l'épaisseur qu'elles renferment est marqué par une surface pareillement courbe et ondoyante, qui passe par les orbites de toutes les planètes et détermine le milieu de la lumière. Les particules qui la renvoyent, sont comprises dans l'orbe annuel au temps qu'elle paroist". Nachdem **Fatio** auch noch in Holland einige weitere Beobachtungen gemacht und dort seine „Lettre à Mr. Cassini sur une lumière extraordinaire qui paroît dans le ciel depuis quelques années. Amsterdam 1686 in 8." geschrieben hatte, war das Studium dieser Erscheinung für einstweilen abgeschlossen.

573. Die neuern Beobachtungen und Ansichten. — Nach der Zeit von Fatio wurde das Zodiakallicht bis in unser Jahrhundert hinein wieder nur gelegentlich beobachtet, aber immerhin 1730 durch **Pézénas** sein sog. „Gegenschein" entdeckt, d. h. ein zuweilen gleichzeitig mit ihm gesehener, ähnlicher, nur etwas schwächerer Lichtschein, dessen hellste Partie dem Sonnenorte gegenüberliegt, und der zuweilen wie durch eine „Lichtbrücke" mit dem eigentlichen Zodiakallichte verbunden erscheint [a]. — Diese und einige untergeordnete Wahrnehmungen vermag nun allerdings die Theorie von Fatio nicht zu erklären, während z. B. die durch A. **Wright** beobachteten Polarisationserscheinungen und der von **Houzeau** nachgewiesene Mangel einer merklichen Parallaxe dieselbe stützen, und dagegen mit andern Theorien, durch welche sie ersetzt werden sollte, im Widerspruche stehen, — etc. Man muss daher schliesslich eingestehen, dass das Zodiakallicht gegenwärtig noch eines der vielen ungelösten Rätsel repräsentiert [b].

Zu 573: *a.* Gelegentlich wurde z. B. das Zodiakallicht von Franz **Noël** (Helstrud im Hennegau 1651 — ? 1729; Jesuit; Missionär in China) in China beobachtet, vgl. dessen „Observationes math. et phys. in India et China factæ ab A. 1684 ad A. 1708. Pragæ 1710 in 4., — von Gottfried **Kirch** und Christoph **Eimmart** in Deutschland, vgl. Misc. Nat. Cur. 1694, — von **Mairan**, **Messier**, **Pingré**, etc. in Frankreich, vgl. namentlich des erstern „Traité de l'aurore boréale", — von **Lacaille** am Cap und von **Foulquier** auf Guadeloupe, vgl. Lalandes Astronomie (3 éd. 276/7), — von **Horner** 1803 auf dem atlantischen Ocean, vgl. Mon. Corr. X, — von **Humboldt** in Südamerika, vgl. Kosmos I 142 u. f., — etc. — Der Erste, welcher den sog. „Gegenschein" bemerkte, dürfte **Pézénas** gewesen sein, vgl. Mém. Par. 1731; sodann wurde er, namentlich 1803 III 16, von **Humboldt** (l. c.) in Südamerika deutlich gesehen, sowie seither, zum Teil mit der „Lichtbrücke", von Th. **Brorsen**, G. **Jones**, V. **Schiaparelli**, etc. vielfach beobachtet, und dadurch die frühere Lehre von einem die Sonne weit innerhalb der Erdbahn umgebenden Meteorringe so ziemlich in Frage gestellt. — *b.* Aus der schönen Beobachtungsreihe, welche G. **Jones** erhielt und in seinen „Observations on the Zodiacal-Light from 1853 to 1855. Washington 1856 in 4." publizierte, glaubte derselbe schliessen zu dürfen, dass das Zodiakallicht auf einem Nebelringe beruhe, der die Erde innerhalb der Mondbahn umschwebe, und A. **Serpieri** kam (vgl. Mem. Spettr. 1876 u. f.) bei sorgfältiger Diskussion derselben Beobachtungsreihe sogar zu dem Schlusse, dass jenes Licht eine dem Nordlichte analoge, rein terrestrische Erscheinung sei, während dagegen **Houzeau** (vgl. Mém. cour. Brux. 1875) durch seine Untersuchungen fand, dass es jedenfalls weit über der Erdatmosphäre liegen müsse, da sich keine Parallaxe bemerken lasse. Auch die Spektralanalyse hat noch kein sicheres Votum über das Zodiakallicht abzugeben vermocht; denn während **Angström** in dessen Spektrum die sog. Nordlichtlinie wahrzunehmen glaubte, behauptete A. **Wright** (vgl. Am. Journ. 1874), dass sich dasselbe von dem Sonnenspektrum absolut nicht unterscheide, und überdies fand der letztere, dass das Zodiakallicht in einer durch die Sonne gehenden Ebene polarisiert sei, dass es uns also wahrscheinlich von kleinen festen Körperchen zukomme, welche um die Sonne kreisen und von ihr beleuchtet werden, wie dies zur Zeit Fatio angenommen hatte. Auch dass die Axe des Zodiakallichtes nahe in die Ekliptik fällt, und dass dasselbe (wie das Nordlicht) zu derselben Lokalzeit beobachtet wird, darf nicht übersehen werden. — Da mir nun aus dem Mitgeteilten hervorzugehen scheint, dass die Summe unserer positiven Kenntnisse noch viel zu klein ist und dass uns noch gewisse Bindeglieder fehlen, um die Erscheinungen als ein Ganzes auffassen zu können, so verzichte ich darauf, mich über eine betreffende Theorie auszusprechen und ziehe vor, zum Schlusse der bereits gegebenen Litteratur noch folgende Schriften beizufügen: „L. **Euler**, Recherches physiques sur la cause de la lumière zodiacale (Mém. Berl. 1746), — Adam Ehregott **Schön** (Görlitz 1725 — Messersdorf in der Lausitz 1805; Diakon zu Messersdorf), Bemerkungen über das Zodiacallicht (Berl. Jahrb. 1789; er beobachtete etwa 20 Jahre), — J. H. **Westphal**, Sur la lumière zodiacale en Egypte (Berl. Jahrb. 1827), — Theodor **Brorsen** (Norburg auf Alsen 1819 geb.; früher Obs. Senkenberg in Böhmen, jetzt Priv. in Norburg), Über eine neue Erscheinung am Zodiakallicht (Wöch. Unt. 1854; auch Monthly Not. 1856, A. N. 1859, etc.), — Jul. **Schmidt**, Das Zodiacallicht. Braunschweig 1856 in 8., — Ed. **Heis**, Das Zodiakallicht (Wöch. Unt. 1857), und: Zodiakallicht-Beobachtungen 1847—75. Münster 1875 in 4., — H. **Faye**, Sur l'observation de la lumière zodiacale au

Méxique, et sur le rôle qu'elle joue dans la théorie dynamique de la chaleur solaire (Compt. rend. 1862), — H. **Weber**, Beobachtungen des Zodiakallichtes (Wöch. Unt. 1873 u. f.), — **Backhouse**, On the aspect of the zodiacal light opposite the Sun (Monthly Not. 1876), — M. **Decheverens**, La lumière zodiacale étudiée d'après les observations faites de 1875 à 1879 à l'Observatoire de Zi-Ka-Wei en Chine. Zi-Ka-Wei 1879 in 4., — Hans **Geelmuyden** (Fredriksvoern 1844 geb.; damals Obs., jetzt Dir. Obs. Christiania), Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale (Arch. f. math. og nat. 1881), — Arthur **Searle**, The Zodiacal Light (Proc. Amer. Acad. 1883), — etc."

574. Die Kometenbeobachtungen und die sich darauf basierenden Anschauungen. — Über die bemerkenswerten Arbeiten, welche in der Zeit von **Regiomontan** bis und mit **Tycho** in betreff der Kometen ausgeführt wurden und zur Folge hatten, dass man diese ehemaligen Irrsterne im Sinne von **Seneca** unter die eigentlichen Gestirne versetzte, sowie über die Vermutungen, welche sowohl darauf als auf die nunmehr fortlaufenden neuen Beobachtungen gestützt, in der Zeit von **Kepler** bis und mit **Borelli** und **Petit** über die Beschaffenheit ihrer Bahnen geäussert wurden, ist zwar schon früher (280) Einiges mitgeteilt worden; jedoch bleibt, um für diese Vorgeschichte der Kometen auch nur eine leidliche Vollständigkeit beanspruchen zu dürfen, noch gar manches beizufügen, um sodann zum Schlusse noch hervorzuheben, wie in weiterer Verfolgung der Arbeiten von **Hevel** und bei Anlass desselben Kometen von 1680, bei dessen Erscheinen der Kometenschwindel (279 : f) sein Maximum erreichte, der Magister **Dörffel** aus eigenen Beobachtungen den wichtigen und ihn ungemein ehrenden Schluss zog, **dass dieser Komet während seiner Sichtbarkeit einen parabolischen Bogen durchlaufen habe, dessen Brennpunkt in die Sonne fiel** [a].

Zu 574: *a.* Nachdem (280) **Regiomontan** bei Anlass des Kometen von 1472 die Reihe der eigentlichen Kometen-Beobachtungen eröffnet hatte, fand sich für ihn ein halbes Jahrhundert später in Peter **Apian** ein eifriger Nachfolger: Nicht nur verdankt man nämlich diesem letztern (vgl. sein „Astronomicon Cæsareum" in 7) relativ gute Beobachtungen der Kometen von 1531 bis 1538, sowie die interessante, aber sich allerdings fast gleichzeitig auch in „Hier. **Fracastoro**, Homocentrica seu de stellis. Veronæ 1538 in 8." findende Bemerkung, dass die Kometenschweife (wie wenn sie Schatten wären) von der Sonne abstehen, folglich der bei **Seneca** erscheinende Ausspruch „Comæ radios Solis effugiunt" sich vollständig bewähre, — sondern **Apian** teilt sich mit **Regiomontan** in das Verdienst, bereits die parallaktischen Verhältnisse klar ins Auge gefasst zu haben, indem er sich in seiner „Practica auff dz 1532 Jar. Landshut 1531 in 4." entschuldigte, über die Entfernung des Kometen nichts Bestimmtes sagen zu können, denn hiefür wäre es nötig gewesen, dass „ire zwen zugleich in einem augenblick, hundert meylen mer oder minder ungefärlich von einander, die höch über den horizont observirt hätten". Auf **Apian** folgten zunächst Paul **Fabricius** und Joach. **Heller**, welche namentlich den noch

in unserer Zeit (577) eine gewisse Rolle spielenden Kometen von 1556 fleissig beobachteten, so dass deren äusserst selten gewordene betreffende Publikationen, für welche auf „K. v. **Littrow**, Drei Quellen über den Kometen von 1556 (Wien. Sitz. 1856)" verwiesen werden kann, von grossem Werte sind. Sodann ist Landgraf **Wilhelm** zu erwähnen, der den Kometen von 1558 entdeckte und denselben, sowie denjenigen von 1577, sorgfältig verfolgte. Mit letzterm Kometen, den auch Paul **Fabricius** und Joh. **Prätorius** wahrnahmen, sowie der berühmte Alchymist Leonhard **Thurneysser** (Basel 1531 — Köln 1596; erst Goldschmied, dann Metallurg und Arzt, — sehr talentvoll, aber etwas mauvais sujet) in seinem „Bericht über den in diesem lauffenden 77. Jar erschienenen Cometen. Berlin 1577 in 4." gar nicht übel beschrieb, begann ferner **Tycho** seine ergiebigen, in den erst neuerlich durch Friis aus dessen Nachlass herausgegebenen „Observationes septem Cometarum. Hafniæ 1867 in 4." niedergelegten Kometen-Beobachtungen, und erwarb sich sofort das Verdienst, dasjenige wirklich auszuführen, was schon **Regiomontan** und dann wieder **Apian** angestrebt hatten: Er mass nämlich unter anderm 1577 XI 30, 6^h Abends, die Distanz des Kometen von α Aquilæ, fand sie gleich 17° 45′, während **Hageccius** in Prag fast gleichzeitig 17° 52′ erhielt, und konnte nun, da Komet und Stern nahe in demselben Vertikal einen tiefen Stand hatten, aus dieser geringen Differenz mit aller Sicherheit schliessen, dass die Parallaxe des Kometen zu jener Zeit viel kleiner als die des Mondes gewesen sei, also der Komet weit über der Sphäre des Mondes gestanden, folglich nicht nach der alten Lehre „der untern Luft" angehört habe, wodurch die kosmische Natur mit aller Evidenz erwiesen war. Waren aber die Kometen Gestirne, so mussten sie auch gesetzmässige Bahnen besitzen, und da sprach sich der unvergleichliche **Kepler**, der als Bewegungsform um die Sonne nur die Ellipse kannte, welche bei den Kometen wegen mangelnder Periodicität ausgeschlossen schien, in seinem „Aussführlichen Bericht von dem 1607 erschienenen Haarstern. Hall 1608 in 4." dahin aus, dass „der Cometen Bewegung eine gerade Linie sey, wie eines Ragetels, und nicht circularisch wie die der Planeten", — eine Meinung, welche auch den meisten seiner Zeitgenossen einleuchtete, so z. B. dem durch **erste** Anwendung des Fernrohrs auf den Kometen von 1618 verdienten **Cysat**, auf dessen „Mathemata astronomica de loco, motu, magnitudine et causis Cometæ qui 1618—19 in coelo fulsit. Ingolstadii 1619 in 4." bei dieser Gelegenheit hingewiesen werden mag. — Einen wesentlichen Fortschritt leitete ein „Pisa 1665 II 10" datierter Brief ein, welchen Giovanni Alfonso **Borelli** (Castelnuova 1608 — Rom 1679; Prof. math. Messina und Pisa; dann eine Hauptzierde der in 10 erwähnten Accademia del Cimento in Florenz) unter dem angenommenen Namen „Pier' Maria Mutoli" an Pater Stefano de Angeli nach Padua schrieb und dann noch im gleichen Jahre zu Pisa unter der Aufschrift „Del movimento della Cometa apparsa il mese di Dicembre 1664" abdrucken liess: Man sieht nämlich aus diesem höchst selten gewordenen und sogar von Pingré übersehenen Aktenstücke, dass Borelli den besagten Kometen nicht nur beobachtete, sondern auch allseitig studierte, — dass er hierauf gestützt die Kometen als Gestirne ansah, zur Erklärung ihres Laufes aber der Bewegung der Erde bedurfte, und somit dem von ihm vorsichtiglich als „Ipotesi Pitagorica" aufgeführten Coppernicanischen Systeme den Vorzug vor dem Ptolemäischen und Tychonischen Systeme geben musste, — und es damals wahrscheinlich fand, dass der untersuchte Komet sich in einer Ellipse bewege, immerhin beifügend „o per altra linea curva". Erst in einem, von Borelli 1665 V 4 aus Pisa an

Leopold von Toscana geschriebenen Briefe (vgl. Zach in Zeitschr. f. Astron. III von 1817) ist sodann von einer der Parabel ähnlichen Kurve die Rede, aber von zugleich erwähnten weitern Untersuchungen und Rechnungen scheint nie etwas veröffentlicht worden zu sein. — Bei Anlass desselben Kometen von 1664, welcher auch noch dadurch bemerkenswert ist, dass **Auzout** bei ihm die **ersten** Positionsbestimmungen mit Hilfe des Fernrohrs machte, verfasste P. **Petit** gegen Ende März 1665, also wohl ganz unabhängig von Borelli, auf Wunsch von Louis XIV. eine „Dissertation sur la nature des Comètes. Paris 1665 in 4. (deutsch: Dresden 1681; lat. Bearbeitung von Sturm unter dem Titel „Cometarum natura, motus et origo secundum Jo. Hevelii et P. Petiti hypotheses. Altdorfi 1677 in 4.“, auch 1681)“, in welcher nicht nur die Astrologen schlecht wegkamen, sondern namentlich die Kometen für periodisch wiederkehrende Gestirne erklärt wurden, welche in langgestreckten Ellipsen um die Sonne oder Erde laufen, — ja sich ausgesprochen findet, es möchte der Komet von 1664 mit demjenigen von 1618 identisch sein und 1710 wiederkehren. Diese letztere Vermutung hat sich nun allerdings ebensowenig bewährt als die etwas später von **Jakob Bernoulli** in seiner Erstlingsschrift „Neu erfundene Anleitung, wie man den Lauff der Comet- oder Schwanzsternen in gewisse grundmässige Gesätze einrichten und ihre Erscheinung vorhersagen könne. Basel 1681 in 4. (als neue und erweiterte Ausgabe ist sein „Conamen novi systematis Cometarum. Amstelodami 1682 in 4.“, auch Vitemb. 1719 durch Weidler, zu betrachten)“ geäusserte Ansicht, es möchte der von Gottfr. **Kirch** entdeckte Komet von 1680 nach seinen Beobachtungen (vgl. 390:a) Trabant eines weit über Saturn stehenden Planeten sein und nach 38^a 147^d wiederkehren; aber für jene Zeit waren solche Anläufe nicht ohne Wert, und es hätte vielleicht **Petit** noch Grösseres erzielt, wenn er gewagt haben würde, sich entschieden auf den Coppernicanischen Standpunkt zu stellen. — Derselbe Komet von 1664 veranlasste endlich auch Joh. **Hevel**, der schon längst zu den eifrigsten Kometen-Beobachtern gehörte, einen „Prodromus cometicus, s. historia Cometæ A. 1664, cum dissertatione de Cometarum omnium motu, generatione variisque phænomenis. Gedani 1665 in fol.“ herauszugeben, welchem er dann alsbald seine berühmte „Cometographia, Cometarum naturam et omnium a mundo condito historiam exhibens. Gedani 1668 in fol.“ folgen liess. Man findet in diesen beiden Schriften teils alle dem Verfasser zugänglichen Nachrichten über die sämtlichen bisdahin bekannt gewordenen Kometen, teils dessen eigene reiche Erfahrungen und Ideen; namentlich hob er darin die Wahrscheinlichkeit hervor, dass die Kometen bestimmbare Bahnen verfolgen, und gelangte abschliesslich zu dem Facit, **dass sich alle Kometen in krummlinigen Bahnen bewegen, die von den geraden Linien nur sehr wenig abweichen und deren concave Seite sich gegen die Sonne richtet**, — ohne jedoch zu versuchen, die Art dieser Krümmung aus den Beobachtungen wirklich zu bestimmen. Letzteres wurde erst durch Georg Samuel **Dörffel** (Plauen 1643 — Weida 1688; erst Diakon in Plauen, dann Superintendent in Weida; vgl. Karl Reinhardt, Plauen 1881) wirklich ausgeführt, und zwar mit solchem Geschick und Erfolg, dass seiner Schrift „Astronomische Betrachtung des grossen Cometen, welcher im ausgehenden 1680. und angehenden 1681. Jahr höchst verwunderlich und entsetzlich erschienen: Dessen zu Plauen im Voigtlande angestellte tägliche Observationes, nebenst etlichen sonderbaren Fragen und neuen Denkwürdigkeiten, sonderlich von Verbesserung der Hevelischen Theoria Cometarum. Plauen 1681 in 4.“ ein ehrenvoller Platz in der Kometen-Litteratur zukömmt: Nicht nur

dokumentiert sie eine bei den Gelehrten unserer Zeit leider selten gewordene Bescheidenheit, sondern es bezeichnet der in ihr enthaltene, aus der graphischen Darstellung seiner Beobachtungen abgeleitete Satz: „Ich kann nicht umhin dem geneigten Leser meine neulichste (obwohl noch unreife) Erfindung, wodurch die Hevelische Hypothesis vielleicht zu verbessern und vollkommener zu machen, hierbei zu entdecken und in dessen beliebiges Bedenken zu stellen: Ob nicht dieses (und der andern) Cometen Bewegungslinie ein solche **Parabole** sei, dero **Focus in das Centrum der Sonnen** zu setzen?“ einen ganz kapitalen Fortschritt in der Kometen-Theorie.

575. Halleys Nachweis der Periodicität eines Kometen. — Sobald Newton seine Methode für Bahnberechnung (497) entwickelt hatte, erwarb sich der unermüdliche **Halley** das Verdienst, dieselbe auf alle Kometen anzuwenden, von welchen er irgendwie die nötigen Beobachtungen auftreiben konnte, und war so im stande, in seiner klassischen „Astronomiæ cometicæ Synopsis. Oxoniæ 1705 in fol.“ für 24 Kometen parabolische Bahnelemente zu veröffentlichen [a]. Seine immense Arbeit rentierte sich auf das Schönste, indem **Halley** aus der auffallenden Übereinstimmung der für die nahe in gleichen Zwischenräumen erschienenen Kometen von 1531, 1607 und 1682 erhaltenen Elemente auf deren Identität und somit auf die **Existenz eines periodisch wiederkehrenden Kometen** schliessen konnte, ja ganz getrost, ohne auf das Achselzucken seiner meisten Zeitgenossen zu achten, wagen durfte, dessen Wiederkehr auf 1758/9 zum voraus anzukündigen [b].

Zu 575: *a.* Der „Synopsis“ von **Halley**, welche auch 1715 zu London in Verbindung mit Gregorys Astronomie in englischer Übersetzung, und 1759 zu Paris im 2. Bande der „Tables astronomiques de Halley“ erschien, entnehme ich folgende Tafel:

Komet des Jahres	Länge des aufsteigend. Knotens	Neigung	Länge des Perihels	Log. der Perihel-distanz	Durchg. Perih. m. Z. London	Entdecker oder Beobachter
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″		h m	
1337	♊ 24 21 0	32 11 0	♉ 7 59 0	9,609236	VI 2, 6 25	Gregoras
1472	♑ 11 46 20	5 20 0	♉ 15 33 30	9,734584	II 28, 22 23	Regiomontan
1531	♉ 19 25 0	17 56 0	♒ 1 39 0	9,753583	VIII 24, 21 18½	Apian
1532	♊ 20 27 0	32 36 0	♋ 21 6 0	9,706803	X 19, 22 12	Apian
1556	♍ 25 42 0	32 6 30	♑ 8 50 0	9,666424	IV 21, 20 3	P. Fabricius
1577	♈ 25 52 0	74 32 45	♌ 9 22 0	9,263447	X 26, 18 45	Tycho
1580	♈ 18 57 20	64 40 0	♋ 19 5 50	9,775450	XI 28, 15 0	Moestlin
1585	♉ 7 42 30	6 4 0	♈ 8 51 0	0,038850	IX 27, 19 20	Tycho
1590	♍ 15 30 40	29 40 40	♏ 6 54 30	9,760882	I 29, 3 45	Tycho
1596	♒ 12 12 30	55 12 0	♏ 18 16 0	9,710058	VII 31, 19 55	Moestlin
1607	♉ 20 21 0	17 2 0	♒ 2 16 0	9,768490	X 16, 3 50	Kepler
1618	♊ 16 1 0	37 34 0	♈ 2 14 0	9,579498	X 29, 12 23	Kepler

Komet des Jahres	Länge des aufsteigend. Knotens	Neigung	Länge des Perihels	Log. der Perihel-distanz	Durchg. Perih. m. Z. London	Entdecker oder Beobachter
	° ' ''	° ' ''	° ' ''		h m	
1652	♊ 28 10 0	79 28 0	♈ 28 18 40	9,928140	XI 2, 15 40	Hevel
1661	♊ 22 30 30	32 35 50	♋ 25 58 40	9,651772	I 16, 23 41	Hevel
1664	♊ 21 14 0	21 18 30	♌ 10 41 25	0,011044	XI 24, 11 52	Hevel
1665	♏ 18 2 0	76 5 0	♊ 11 54 30	9,027309	IV 14, 5 15½	Hevel
1672	♑ 27 30 30	83 22 10	♉ 16 59 30	9,843476	II 20, 8 37	Hevel
1677	♏ 26 49 10	79 3 15	♌ 17 37 5	9,448072	IV 26, 0 37½	Hevel
1680	♑ 2 2 0	60 56 0	♐ 22 39 30	7,787106	XII 8, 0 6	G. Kirch
1682	♉ 21 16 30	17 56 0	♒ 2 52 45	9,765877	IX 4, 7 39	Flamsteed
1683	♍ 23 23 0	83 11 0	♊ 25 29 30	9,748343	VII 3, 2 50	Flamsteed
1684	♐ 28 15 0	65 48 40	♏ 28 52 0	9,982339	V 29, 10 16	Bianchini
1686	♓ 20 34 40	31 21 40	♊ 17 0 30	9,511883	IX 6, 14 33	Arnold
1698	♐ 27 44 15	11 46 0	♑ 0 51 15	9,839660	V 8, 16 57	Cassini

und füge derselben einerseits bei, dass der Komet von 1607 namentlich auch durch **Harriot** und dessen Mitpensionär beim Grafen von Northumberland, den Pfarrer Nathaniel **Torporley** (Shropshire 1563? — London 1632; früher Amanuensis von Vieta), beobachtet wurde, und dass sich auf diese Beobachtungen die Erstlingsarbeit von **Bessel** (vgl. Mon. Corr. 10 von 1804) bezog, — anderseits, dass Christoph **Arnold** (Sommerfeld 1650 — Leipzig 1695) ein gelehrter Bauer in der Nähe von Leipzig war, — und endlich, dass in „Les Mondes (1879 X 16)“ die Behauptung aufgestellt wurde, es habe **Halley** bei dem Kometen von 1698 die beiden Knoten verwechselt, d. h. es beziehe sich dessen Angabe ♐ 27° 44' 15'' auf den absteigenden Knoten. — *b.* Natürlich musste im Falle der Periodicität die Bahn eine geschlossene Linie, also nach dem Gravitationsgesetze eine Ellipse sein, und **Halley**, der so nach dem dritten Kepler'schen Gesetze einen Näherungswert für die grosse Bahnaxe erhielt, revidierte nun seine Rechnungen nach der neuen Voraussetzung, — fand wirklich, dass sich die sämtlichen Beobachtungen der drei Erscheinungen durch eine langgestreckte Ellipse ganz ordentlich darstellen lassen, — dass diese den Kometen nahe genug an Jupiter und Saturn vorbeiführe, um kleine Differenzen der Umlaufszeiten durch störende Anziehungen erklären zu können, — und war schliesslich so sicher über die Identität der drei Kometen, dass er bei Herausgabe der erwähnten Schrift, wie schon gesagt, wagen durfte, auf Ende 1758 oder Anfang 1759 eine Wiederkehr anzukündigen. — Später überzeugte sich **Halley** noch, dass auch der grosse Komet von 1456, der die vor Belgrad liegenden Heere der Christen und Türken gleichmässig erschreckte und gegen den, nach einer allerdings etwas zweifelhaften Sage, Papst Calixtus III. den Bann aussprach, eine frühere Erscheinung des Kometen von 1682 war.

576. Die Wiedererscheinungen des Halley'schen Kometen. — Die Voraussage von Halley, deren Zuverlässigkeit später **Clairaut** unter Berücksichtigung der von jenem vermuteten Störungen mittelst mühsamer Rechnung geprüft und durch die Angabe, dass der Komet 1759 IV 13 ± 1 Monat zur Sonnennähe zurückkehren

werde, näher präcisiert hatte, erfüllte sich in Anbetracht der damaligen Verhältnisse glänzend, indem **Palitzsch** denselben am Weihnachtstage 1758 auffand, und die Berechnung der nunmehrigen Beobachtungen den Periheldurchgang auf 1759 III 12 legte [a]. — Man durfte also getrost auf 1835 eine zweite Wiederkehr erwarten, die sodann auch wirklich erfolgte, indem **Dumouchel** den Kometen schon 1835 VIII 6 am Himmel auffand, ja die nunmehrigen vielfachen Beobachtungen den neuen Periheldurchgang fast genau auf das Datum 1835 XI 16 legten, welches **Pontécoulant** schon geraume Zeit zuvor dafür gefunden hatte, so dass man sich an die seitherige Angabe dieses gewandten Rechners, es werde der Halley'sche Komet bei seiner folgenden Erscheinung 1910 V 17 wieder zum Perihel zurückkehren, wohl ziemlich sicher halten darf [b]. — Anhangsweise ist noch zu erwähnen, dass es E. **Biot, Hind** und **Laugier** gelungen ist, den Halley'schen Kometen auch rückwärts bis zum Jahre 11 vor Anfang unserer Zeitrechnung zu verfolgen [c].

Zu 576: *a.* In seiner „Bibliographie (pag. 466)" erzählt **Lalande**: „Dès l'année 1757 je proposai **Clairaut** d'appliquer sa théorie du problème des trois corps aux perturbations que Jupiter pouvait avoir produites en approchant de la Comète de Halley; mais il vit bientôt que cela ne suffisait pas. Je fus obligé de calculer pour 150 ans les distances de Jupiter et de Saturne à la Comète, les forces qu'ils avaient exercés sur elle, et les surfaces des courbes qui exprimaient les effets de ces perturbations. Aidé de M[me] **Lepaute**, je travaillai pendant plus d'un an avec tant d'assiduité, que j'en fus malade". Es darf also nicht übersehen werden, dass sich **Lalande** durch seine Anregung und seine Übernahme eines grossen Teiles der numerischen Rechnungen ein wesentliches Verdienst um das Zustandekommen des durch **Clairaut** 1758 XI 14 der Pariser Akademie vorgelegten „Mémoire sur la Comète de 1682 (Journ. d. Sav. 1759)" erwarb, und dass auch die, als gewandte Rechnerin schon früher bewährte, mit dem berühmten Uhrmacher Jean-André **Lepaute** (Montmédy in Luxembourg 1709 — St-Cloud 1789) verheiratete Nicole-Reine **Etable** de la Brière (Paris 1723 — ebenda 1788; vgl. Lalandes Bibl. pag. 676—81) einen ehrenvollen Platz in der Geschichte unsers Kometen beanspruchen darf. Ferner ist hervorzuheben, dass Joh. Georg **Palitzsch** (Prohlitz bei Dresden 1723 — Leubnitz bei Dresden 1788; Bauer und Autodidakt; vgl. Theiles Lebensbild, Leipzig 1878 in 8.), welchen John Herschel in seinen „Outlines" so treffend als „A peasant by station, an astronomer by nature" bezeichnete, den Kometen nicht etwa zufällig fand, sondern, in vollem Glauben an Halleys Voraussage, förmlich aufsuchte. Endlich ist beizufügen, dass sich **Clairaut** auch noch später durch sein „Mémoire sur la Comète de 1759 (Mém. Par. 1759)" und seine von der Petersburger Akademie gekrönten „Recherches sur les Comètes de 1531, 1607, 1682 et 1759. Pétersbourg 1762 in 4." grosse Verdienste um den Kometen erwarb. — *b.* Die Turiner Akademie schrieb schon 1817 einen Preis für genauere Bestimmung der Rückkehr des Halley'schen Kometen aus, und erteilte sodann denselben Th. de **Damoiseau** für sein „Mémoire sur l'époque de la retour au périhélie de la comète de l'année 1759 (Mém. Turin 1820)", das jene Rückkehr auf 1835 XI 4 festsetzte. Später legte auch die Pariser

Akademie ihren grossen mathematischen Preis auf dieselbe Frage und erteilte ihn sodann G. D. de **Pontécoulant** für seine Abhandlung „Sur le calcul des perturbations et le prochain retour à son périhélie de la Comète de Halley (Sav. Etrang. 1835)", in welcher die Rückkehr auf 1835 XI 15 angesagt war, während Otto August **Rosenberger** (Tuckum in Curland 1800 — Halle 1890; Assist. Bessel, dann Prof. math. Halle) als Facit seiner Untersuchungen (vgl. A. N. 180 von 1830 bis 288 von 1835) 1835 XI 11, und Wilhelm Heinrich **Lehmann** (Potsdam 1800 — Spandau 1863; erst Prediger, dann astr. Rechner in Berlin) dagegen (vgl. A. N. 287 von 1835) 1835 XI 26 erhielt. Als nachmals der Halley'sche Komet, zwar nicht (wie oft fälschlich angegeben wird) schon IV 20 durch **Boguławski** (vgl. 579), aber doch mutmasslich (vgl. über bestehende Zweifel Brief Valz von 1836 VIII 27 in Notiz 387) VIII 6 durch Etienne **Dumouchel** (Montfort-Lamaury 1773 — Rom 1840; Jesuit; Dir. Obs. Coll. Rom.) aufgefunden und alsbald vielfach beobachtet worden war, ergab die Rechnung für den wirklichen Periheldurchgang 1835 XI 16, so dass **Pontécoulant** der Wahrheit bis auf wenige Stunden nahe gekommen war, und etwas später in seinem „Précis d'astronomie. Paris 1840 in 8." mit gerechtem Stolze sagen konnte: „Je fus appelé alors à l'une de ces jouissances les plus douces que puisse offrir la carrière des sciences à l'homme studieux qui s'y livre; l'astre irrégulier, qui avait trompé de 33 jours à son dernier passage les prévisions de Clairaut, soumis cette fois par les efforts réunis de l'analyse et de l'astronomie, confirma pleinement la prévision de mon calcul". — *c.* Nach **Biot** (Conn. d. t. 1846), **Hind** (Monthly Not. 1850) und **Laugier** (Conn. d. t. und Compt. rend. 1846) ist nämlich anzunehmen, dass der Halley'sche Komet schon in den Jahren 1378, 1301, 1223, 1145, 1066, 989, 837, 760, 684, 608, 530, 451, 373, 295, 218, 141, 65 und — 11 gesehen wurde.

577. Einige andere Kometen, deren Wiederkehr vermutet wurde. — Sobald die Periodicität Eines Kometen erwiesen war, lag der Gedanke nahe, auch anderer Kometen frühere Erscheinungen aufzusuchen, und in der That glaubte **Whiston** dem Kometen von 1680 eine Umlaufszeit von 574ᵃ, — **Dunthorne** demjenigen von 1556 eine solche von 292ᵃ, — und **Englefield** demjenigen von 1661 eine solche von 128ᵃ zuteilen zu dürfen; aber alle diese vermeintlichen Bestimmungen bewährten sich nicht im mindesten[a].

Zu 577: *a.* Schon **Halley** hatte bemerkt, dass dem Kometen von 1680 ungefähr in dem Zeitabstande von 574/5 Jahren, nämlich A. 1106, 531 und 43 v. Chr., ebenfalls Kometen vorangegangen waren, sowie dass die Beobachtungen des erstern auch durch eine dieser Zwischenzeit entsprechende elliptische Bahn ziemlich befriedigend dargestellt werden könnten, — überliess es aber **Whiston**, die Identität dieser 4 Kometen als eine ziemlich sichere Thatsache hinzustellen und anlehnend in der Schrift „The cause of the Deluge demonstrated. London 1711 in 8. (2. ed. 1714)" die Vermutung auszusprechen, dass derselbe Komet bei einer noch frühern Erscheinung der Erde nahe gekommen sei und bei dieser Gelegenheit die Sündflut (Sintflut = allgemeine Überschwemmung) veranlasst habe. Seit jedoch **Encke** in seiner Preisschrift „Versuch einer Bestimmung der wahrscheinlichsten Bahn des Cometen von 1680 (Zeitschr. f. Astr. 6 von 1818)" den bestimmten Nachweis geleistet hat, dass die Umlaufszeit des fraglichen Kometen keinesfalls weniger als 2000 Jahre betragen

und somit von der vermuteten Identität keine Rede sein kann, ist natürlich die ganze Sache aus Abschied und Traktanden gefallen. — Wie schon 574 angedeutet wurde, beschäftigte man sich lange und bis in die neueste Zeit hinein mit dem Kometen von 1556, welcher wohl auch als Komet Kaiser Karl V. bezeichnet wird, da dieser bei seinem Anblicke „His ergo indiciis me mea fata vocant" ausgerufen haben soll: Als nämlich Rich. **Dunthorne** um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, gestützt auf einige in dem Manuskript „Tractatus fratris Egidii de Cometis" gefundene Angaben den Kometen von 1264 berechnete, fand er (vgl. Ph. Tr. 1751) für denselben Elemente, welche mit den von Halley für denjenigen von 1556 gegebenen so nahe übereinstimmten, dass er vermuten musste, es möchten diese beiden Erscheinungen Einem Kometen von etwa 292ᵃ Umlaufszeit zugehören, der somit um 1848 wieder erwartet werden dürfte. Zu ähnlichen Resultaten war später **Pingré** (Mém. Par. 1760) und noch in neuerer Zeit **Hind** (A. N. 493 von 1843) gekommen, ja man las sogar in den Zeitungen vom Januar 1848, es habe letzterer den Erwarteten wirklich am Himmel aufgefunden, — es war aber nur eine Zeitungsente. Als sodann B. **Bomme** in Middelburg, vgl. seine „Proeve eener Berekening der Storingen in de Loopbaan der Kometen van 1264 en 1556 (Nederl. Inst. 1849)", einlässliche Studien über den mutmasslichen Einfluss der Planeten auf die Wiederkehr anstellte, fand er, dass der Durchgang durch das Perihel 1858 VIII 2 ± 2ᵃ statthaben sollte, — ging aber dabei ebenfalls von der Identität der beiden Kometen aus, welche andere bezweifelten, ja Martin **Hoek** (Haag 1834 — Utrecht 1873; Dir. Obs. Utrecht) in seiner Dissertation „De Kometen van de Jaren 1556, 1264 en 975, en hare vermeende Identiteit. S'Gravenhage 1857 in 4." sogar als höchst unsicher erwies. In der That ist denn auch der Komet innerhalb der angegebenen Grenze nicht erschienen, — man wollte denn den im Sommer 1857 zur Beängstigung der Leichtgläubigen „erfundenen" Kometen, dem zur Abwechslung wieder einmal der Weltuntergang folgen sollte, dafür nehmen. — Schon **Halley** war es aufgefallen, dass die für die Kometen von 1532 und 1661 erhaltenen Elemente sehr nahe miteinander übereinstimmten, und nachdem auch **Pingré** dieselben in seiner „Cométographie (I 491 und II 10)" förmlich identifiziert hatte, wagte Sir H. **Englefield** sogar die Wiedererscheinung im Jahre 1789 anzukündigen, ja „Tables of the apparent places of the Comet of 1661 whose return is expected in 1789. London 1788 in 4." zu publizieren. Der Erwartete kam jedoch entweder gar nicht, weil jene schon von **Méchain** (vgl. Mém. prés. 1785) bezweifelte Identität wirklich nicht existierte, — oder ging wenigstens wegen ungünstigen Verhältnissen unbemerkt vorüber; auch die Richtigkeit der bei Anlass des Brorsen'schen Kometen 1846 III (vgl. 584) von **Valz** geäusserten Ansicht, dieser letztere könnte eine solche Wiedererscheinung repräsentieren, ist wohl gegenwärtig noch in Frage zu stellen.

578. Die neue Kometenfurcht. — Die frühere Furcht vor den Kometen war durch Halleys Entdeckung so ziemlich beseitigt worden, aber nur um der neuen Furcht Platz zu machen, es könnte einmal einer der vielen und wenigstens teilweise je wieder zurückkehrenden Kometen mit der Erde zusammentreffen und über sie die Schrecken des jüngsten Tages bringen. Es war somit ganz zeitgemäss, sich über die Wahrscheinlichkeit und die Folgen einer solchen Kollision auszusprechen, und dies geschah dann auch wirk-

lich 1773 durch **Lalande**, wobei er allerdings infolge eines Missverständnisses bei seinem Pariser Publikum momentan das gerade Gegenteil der beabsichtigten Beruhigung bewirkte, dagegen die übrige gelehrte Welt anregte, sich ebenfalls mit dieser Sache zu befassen [a].

Zu 578: *a.* Als man im Frühjahr 1773 zu Paris hörte, es gedenke **Lalande** der Akademie „Réflexions sur les Comètes qui peuvent approcher de la terre“ vorzutragen, entstand grosse Spannung. Da jedoch diese Vorlesung in der betreffenden Sitzung wegen Überfülle der Traktanden nicht mehr an die Reihe kam, so verbreitete sich, ob aus Dummheit oder Bosheit weiss man nicht, das Gerücht, **Lalande** habe auf den 12. Mai den Weltuntergang durch Zusammenstoss der Erde mit einem Kometen ankündigen wollen, sei aber von der Polizei daran verhindert worden, und dieses blosse Gerücht genügte, einen so panischen Schrecken zu verbreiten, dass nicht nur ganz Paris jenem Tage entgegenjammerte, sondern sogar infolge der Angst Frühgeburten, Todesfälle, etc. eintraten, und unwürdige Geistliche, welche um schweres Geld Absolution anboten, die besten Geschäfte machten. Der schnelle Abdruck von Lalandes Abhandlung (Paris 1773 in 8.; deutsch: Zürich 1773) und verschiedene Versuche, durch Scherz und Ernst die Aufregung abzuschwächen, halfen wenig, — erst nachdem der Schreckenstag ohne Störung irgend welcher Art verlaufen war, beruhigten sich nach und nach die Gemüter. — Auf wissenschaftliche Kreise wirkte dagegen die Abhandlung von Lalande anregend, und so veranlasste sie unter anderm den Altmeister **Euler**, eine „Commentatio hypothetica de periculo a nimia Cometæ appropinquatione metuendo (Comm. Petrop. 1775)“ zu schreiben, in welcher er zwar nur den Specialfall behandelte, wo der Komet eine in der Ekliptik liegende Gerade gegen die Sonne beschreiben würde, jedoch auch einige Winke gab, wie man in schwierigeren Fällen vorzugehen hätte, — und sodann mutmasslich auch die Petersburger Akademie, für 1787 die Preisaufgabe zu stellen: „Quel serait l'effet d'une Comète sur le mouvement de la Terre et sur celui de l'Océane, en supposant qu'elle approchât assez pour que son action fut sensible; et de quelle manière les deux globes continueraient ensuite de se mouvoir en conséquence de cette attraction mutuelle“. Als dann allerdings auf diese Frage keine genügende Antwort einlief, liess die Akademie dieselbe wieder fallen, und die spätere Zeit dachte um so weniger daran, sie neuerdings aufzunehmen, als die Meinung immer mehr Fuss fasste, es würde ein Zusammentreffen der Erde und eines Kometen höchstens für diesen letztern verhängnisvoll werden.

579. Die Kometenjäger, Kometenrechner und Kometenpreise. — Während man früher ganz gemütlich abwartete, bis ein Komet sich selbst präsentierte, ja **Lahire** und Gottfr. **Kirch** so ziemlich die Ersten waren, welche mit dem Fernrohr förmlich nach Kometen suchten, und noch in der 2. Hälfte des vorigen und am Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts die wiederholten Entdeckungen der **Messier, Pons, Gambart,** etc., angestaunt wurden, so hat sich seither, zum Teil durch Preise und andere Auszeichnungen angeregt, ein förmliches Korps von Kometenjägern herangebildet,

in welchem die **Winnecke, Tempel, Brooks**, etc., hervorragen [a]. — Dieser Sorte von Jägern sind aber zum mindesten auch diejenigen ebenbürtig, welche die Bibliotheken und Archive in Beziehung auf Nachrichten über ältere Kometen ausgebeutet haben, voraus ein **Pingré** mit seiner klassischen und von stupendem Fleisse zeugenden „Cométographie, ou Traité historique des Comètes. Paris 1783 bis 1784, 2 Vol. in 4.“ [b], — und nicht weniger diejenigen, welche, wie die **Burckhardt, Encke, Hind**, etc., es sich zur Pflicht machten, sobald von einem ältern Kometen hinreichende Angaben aufgefunden oder von einem neuen genügende Beobachtungen bekannt wurden, ungesäumt deren Bahnen zu berechnen und die allfällig wünschbaren Ephemeriden zu erstellen [c].

Zu 579: *a.* Neben **Messier**, der von 1758 bis 1811 nicht weniger als 14 Kometen entdeckte und schon von Louis XV. den Spitznamen „le furet des comètes“ erhalten hatte, — neben Jean-Louis **Pons** (Peyre in Haut-Dauphiné 1761 — Florenz 1831; Obs. Marseille, dann Dir. Florenz), der von 1801—27 sogar 37 Kometen auffand, — und neben Adolphe **Gambart** (Cette 1800 — Paris 1836; Dir. Obs. Marseille), der es trotz seinem frühen Tode immer noch auf 13 Kometen brachte, — mögen aus jener ältern Zeit noch **Méchain** und Karoline **Herschel** als eifrige Kometensucher genannt werden, — ferner aus der neuern neben den obgenannten die E. **Barnard,** A. **Borelli,** Christian **Bruhns** (Ploen in Holstein 1830 — Leipzig 1881; Schlossergeselle bis Dir. Obs. Leipzig), J. **Coggia,** W. **Klinkerfues,** G. **Schweizer,** L. **Swift,** etc. — Den längst existierenden Preisinstituten der Akademien und gelehrten Gesellschaften in Harlem, Paris, Petersburg, etc., schlossen sich in der neuern Zeit auch Stiftungen an, die einzelnen Wissenschaften zu gut kommen: So fundierte **Lalande** 1801/2 (vgl. meine Notiz in Astr. Viert. 17) die Pariser Akademie, um alljährlich eine hervorragende astronomische Arbeit prämieren zu können, was zuerst **Pons** und später noch wiederholt Kometen-Entdeckern oder -Berechnern zu gute kam, — so gründete auf Betreiben von **Schumacher** der König von Dänemark eine speciell für Entdecker teleskopischer Kometen bestimmte goldene Medaille, welche zuerst Heinrich Ludwig **Boguslawski** (Magdeburg 1789 — Breslau 1851; Dir. Obs. Breslau) für seine Entdeckung des Kometen 1835 I (nicht 1835 III = Halley) erhalten haben soll, — etc. — Schliesslich mag hier auch noch auf die ganz interessante Note von **Olbers** „Einige Bemerkungen über die Aufsuchung der Kometen (Berl. Jahrb. auf 1809)“ hingewiesen werden. — *b.* Zwischen die in 279 aufgezählten Kometenverzeichnisse und dasjenige unsers Pingré fällt noch die ebenfalls nicht unverdienstliche Arbeit „Nicolaus **Struijck** (Amsterdam 1686 — ebenda 1769; Math. in Amsterdam), Korte Beschrijving van alle de Comeeten (in seiner „Inleiding tot de algemeene Geographie. Amsterdam 1740 in 4.“ eingerückt)“. Aus der neuern Zeit sind namentlich zu erwähnen: „**Galle,** Bestimmungsstücke der Bahn aller bisher berechneten Cometen (in 2. A. von Olbers Anleitung „Weimar 1847“; Nachträge: Leipzig 1864 und A. N. 2665 bis 2666 von 1885), — und: **Carl,** Repertorium der Cometen-Astronomie. München 1864 in 8.“ — *c.* Den selbstlosen Männern und Frauen, welche sich, wie z. B. die Bertrand-Augustin **Carouge** (Dol in der Bretagne 1741 — Paris 1798; Postdirektor Paris; vgl. Lalande Bibl. p. 803), N. R. **Etable** (vgl. 576), Marie-

Jeanne-Amélie **Harlay** (Paris 1768 — ebenda 1832; seit 1788 mit Lalandes Neffen M. Lefrançais verheiratet; vgl. Lalande Bibl. p. 627 und später), Jean Lefèvre oder **Lefébure** (Lisieux in der Normandie 1650 — Paris 1706; erst Weber in Lisieux, dann Akad. Paris; vgl. Lalande Bibl. pag. 312 und 341), F. P. **Triesnecker** (vgl. 480), J. Fr. **Wurm** (vgl. 480), etc., eine Pflicht daraus machten, ihnen zugesandte Beobachtungen zu berechnen oder gewünschte Hilfstafeln zu erstellen, reihten sich in der neuern Zeit namentlich auch zahlreiche Berechner von Kometenbahnen an, und zwar verdankt man (vgl. Mädlers Gesch. II 409) **Encke** volle 56 Bahnen, — **Hind** 43, — **Pingré** und **Burckhardt** je 39, — **d'Arrest** 35, — **Méchain** 31, — **Halley** 27, — **Nicolai** 26, — **Bessel** 23, — **Bruhns** 21, — **Olbers** 18, — **Lacaille** und **Santini** je 17, — **Saron** (der noch im Gefängnis diejenigen der Kometen von 1793 berechnete) und **Peters** je 16, — **Hubbard**, **Laugier** und **Villarceau** je 15, — **Brünnow**, **Clausen** und **Spörer** je 14, — **Gauss** und **Petersen** je 13, — **Bouvard**, **Nicollet**, **Rümker** und **Sonntag** je 12, — **Argelander**, **Gambart**, **Hansen**, **Löwy**, **Plantamour** und **Rosenberger** je 11, — **Peirce** und **Valz** je 10, — etc. — Der Vollständigkeit wegen erinnere ich endlich an die gegen Johann **Pasquich** mutmasslich (vgl. Corr. astr. 9 von 1823 und A. N. 65 u. f. von 1824,5) unverdienter, gegen den Malteser-Ritter **d'Angos** (1755? — Darbes in Hautes-Pyrenées 1836) aber leider (Corr. astr. 4 von 1820) verdienter Weise erhobenen Anklagen, fingierte Beobachtungen publiziert zu haben.

580. Der Komet Encke-Pons. — Als **Encke** den von **Pons** 1818 XI 26 entdeckten und sofort vielfach beobachteten Kometen berechnete, fand er zu seiner grossen Überraschung, dass die Beobachtungen nur unter Annahme eines elliptischen Umlaufes in $3^1/_3$ Jahren befriedigend dargestellt werden können, sowie dass die Kometen von 1805, 1795 und 1786 frühere Erscheinungen desselben Kometen sein dürften, und wagte schon im August 1819, eine erste betreffende Abhandlung „Über einen merkwürdigen Kometen, der wahrscheinlich bei dreyjähriger Umlaufszeit schon zum vierten Male beobachtet ist" an Bode zu senden, der dieselbe alsbald in sein damals für 1822 bearbeitetes Jahrbuch aufnahm [a]. — Für die 1822 zu erwartende Rückkehr des Kometen berechnete sodann **Encke** eine sich nachmals in schönster Weise bewährende Ephemeride und verfolgte denselben bis an sein Lebensende unablässig, bei jeder neuen Erscheinung einen neuen Triumph feiernd. Seither hat zuerst E. **v. Asten** und sodann nach dessen frühem Tode O. **Backlund** das Patronat dieses Kometen übernommen, während sich allerdings auch andere Astronomen wiederholt mit demselben beschäftigt haben [b].

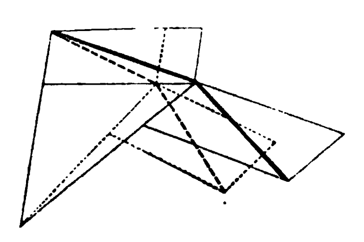
Zu 580: *a.* Da die wenigen bisdahin elliptisch berechneten Kometen Umlaufszeiten von über 70ª zeigten, so fühlte **Encke** sofort, dass der Nachweis der Existenz eines Kometen von so geringer Umlaufszeit Epoche machend wäre, und auch **Gauss** bestärkte ihn darin, während ihn **Olbers** aufmerksam machte, dass nicht nur die Bahn des von **Bouvard**, **Pons** und **Huth** gleichzeitig entdeckten und mehrfach berechneten Kometen 1805, sondern auch diejenige des von Karol. **Herschel** aufgefundenen und von ihm selbst berechneten Ko-

meten von 1795 ähnlicher Natur sei, ja vielleicht sogar der von **Méchain,** wenn auch allerdings nur 2 mal, gesehene Komet 1786 I eine frühere Erscheinung sein dürfte. **Encke** machte sich nun sofort daran, jenen Nachweis zu leisten, und konnte schon im August 1819 die oben angeführte Abhandlung fertig stellen, bei welcher Gelegenheit ihm **Lindenau** schrieb: „Ich halte diess für die schönste astronomische Entdeckung dieses Jahrhunderts, und Sie sind ein Glückskind dieselbe gemacht zu haben". — Es verdient noch besonders hervorgehoben zu werden, dass **Encke** bei dem von ihm fortwährend als „Pons'schen", sonst meistens als „Encke'schen", wohl am besten aber als „Encke-Pons'schen" bezeichneten Kometen **sofort** die Notwendigkeit erkannte, von der Parabel zur Ellipse überzugehen, während **Legendre,** der in seinem 1806 ausgegebenen „Supplément aux nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes" sowohl den Kometen 1805 als den ihm in dieser Beziehung verwandten Kometen 1806 I (582) berechnete, diese Notwendigkeit übersah, obgleich sie gerade ihm besonders hätte auffallen sollen, wie dies **Valz** 1832 IX 6 in einem Briefe an Gautier (vgl. Notiz 387) mit den Worten hervorhob: „Ce qu'il y a de bien singulier, c'est qu'ayant établi ses calculs justement sur les deux comètes à courtes périodes, **Legendre** n'en ait pas reconnu l'ellipticité, quoiqu'il dise qu'**elle doit se reconnaître facilement.** Il aurait donc pû devancer de 15 et de 20 ans ces deux découvertes: mais on n'y aurait pas crû alors, et il a fallu d'autres rètours, pour en acquérir la preuve formelle". — *b.* Für weitern Detail verweise ich im allgemeinen auf die Abhandlungen „F. **v. Zach,** Account of a remarkable Comet which has returned to our system in 1786, 1795, 1801, 1805 and 1818/9. Edinburgh 1819 in 8., — **Encke,** Über den Kometen von Pons. Abh. 1—8. (Berl. Abh. 1829—59), — Friedrich Emil **v. Asten** (Köln 1842 — Pulkowa 1878; Astr. Pulkowa), Untersuchungen über die Theorie des Encke'schen Kometen (Mém. Pet. 1871 und 1878), — O. **Backlund,** Zur Theorie des Encke'schen Kometen. St. Petersburg 1881—86, 3 Abh. in 4. (vgl. Besprechung von P. Harzer in Astr. Viert. 18), — etc.", und führe speciell nur einerseits an, dass der im allgemeinen bloss teleskopische und schweiflose Komet bei seiner Erscheinung im Herbst 1871, wo ihn **Winnecke** zuerst auffand, ausnahmsweise mit freiem Auge und einem merklichen Schweif gesehen wurde, — und dass anderseits A. **Berberich** in seiner Note „Die Helligkeit des Encke'schen Cometen (A. N. 2836 von 1888)" nachzuweisen suchte, dass bei diesem Kometen ein, wahrscheinlich mit elektrischen Wirkungen der Sonne zusammenhängender, periodischer Helligkeitswechsel stattfindet, der mit der Sonnenfleckenperiode (inklusive deren Unregelmässigkeiten von 1788—1804 und 1829—37) übereinstimmt.

581. Der Widerstand des Mittels und die Bestimmung der Masse. — Als **Encke** fand, dass bei dem nach ihm benannten Kometen jeder folgende Umlauf etwa drei Stunden weniger in Anspruch nehme als der vorhergehende, schloss **Olbers,** es möchte dies Folge eines widerstehenden Mittels sein, und **Encke** adoptierte diese Ansicht, während **Bessel,** sowie seither **Faye,** derselben gegenübertraten und neuerlich auch die Untersuchungen von E. **v. Asten** die Olber'sche Hypothese in Frage stellten *a*. — Da sich sogar für weit grössere Kometen nach der 1808 durch **Calandrelli** dafür aufgestellten

Formel eine verschwindend kleine Masse ergiebt, so dass ein Komet mit **Babinet** als ein „rien visible" bezeichnet, und wohl bei Annäherung an einen Planeten diesem nie gefährlich werden kann, so fällt die Masse des Encke'schen Kometen total ausser Betracht; dagegen wird umgekehrt der Planet nur eine um so grössere Wirkung auf den Kometen ausüben, und so wurde es **Encke** möglich den Versuch zu machen, aus den Störungen, welche sein Komet im August 1835 durch Merkur erfuhr, die bisdahin immer noch unsichere Masse dieses letztern zu bestimmen [b].

Zu 581: *a.* Dass ein widerstehendes Mittel die Dimensionen einer Bahn, folglich nach dem dritten Kepler'schen Gesetze auch die Umlaufszeit, vermindern müsste, wird schon aus beistehender Figur plausibel, und wider die Existenz eines solchen Mittels lässt sich eigentlich auch nicht viel einwenden, hat ja schon **Loys** de Cheseaux (vgl. pag. 223 u. f. seines „Traité de la Comète") einen das Licht schwächenden Weltäther vermutet, da ohne einen solchen (weil mutmasslich nach jeder Richtung ein Stern steht) das ganze Himmelsgewölbe (etwa mit Ausnahme der Planeten, Monde und Sonnenflecken) so hell wie die Sonne erscheinen müsste. Immerhin ist aber, wie schon oben angedeutet, von andern der Notwendigkeit dieser Annahme widersprochen und behauptet worden, es könne die von **Encke** gefundene Verkürzung ebensogut Folge anderer, z. B. der bei der Schweifbildung thätigen Kräfte sein. Vgl. für diese Frage auch 584, sowie die Schriften „O. F. **Mossotti**, On the variation in the mean motion of the Comet of Encke, produced by the resistance of an ether (Mem. Astr. Soc. II von 1826), — Ernst v. **Rebeur**-Paschwitz, Über die Bewegung der Kometen im widerstehenden Mittel. Berlin 1883 in 4., — etc." — *b.* Geht man mit Giuseppe **Calandrelli** (Zagarola im ehemal. Kirchenstaat 1749 — Rom 1827; Prof. math. und Dir. Obs. des Coll. Rom.) von der Annahme aus, dass die Kometenatmosphäre bis dahin reiche, wo die Attraktionen von Sonne und Komet gleich werden, und betrachtet somit die Wirkung der Sonne nur als eine Differentialwirkung auf Oberfläche und Mittelpunkt, so hat man, wenn μ das Verhältnis der Kometenmasse zur Sonnenmasse bezeichnet, d und δ die Distanzen des Kometen von Erde und Sonne sind, endlich φ dessen scheinbarer und $r = d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi$ dessen wahrer Radius ist,



$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{1}{(\delta - r)^2} - \frac{1}{\delta^2} = \frac{2r}{\delta^3} \qquad \text{oder} \qquad \mu = 2\left(\frac{d \cdot \mathrm{Si}\,\varphi}{\delta}\right)^3 \qquad 1$$

Nach dieser, von dem römischen Astronomen (vgl. seine „Opuscoli astronomici. Romæ 1803—24, 8 Vol. in 4.") schon 1808 aufgestellten Formel fand z. B. **Roche**, für den Donatischen Kometen (586) $\varphi = 75''$ und $\delta = 0{,}9 \cdot d$ annehmend, die Masse $\mu = 0{,}000000\,000132$, welche (die Erdmasse zu $^1/_{324439}$ angenommen) mit 0,000043 der Erdmasse übereinkömmt oder mit einer fast nur dem Vacuum unserer besten Luftpumpen entsprechenden mittlern Dichte der Kometenmasse. — Aus den Störungen, welche Merkur auf seinen, ihm im August 1835 nahe gekommenen Kometen ausübte, glaubte **Encke** nachweisen zu können, dass die bisdahin nach einer 1782 von **Lagrange** aufgestellten Hypothese zu $^1/_{2025810}$

angenommene Merkursmasse nur $^1/_{4686571}$ betrage, — eine Verhältniszahl, welche später durch **Leverrier** nur wenig abgeändert, dagegen allerdings neuerlich durch **Backlund** wieder auf $^1/_{2668700}$ erhöht, durch **Haerdtl** (vgl. Abh. in 584) auf $^1/_{5205000}$ erniedrigt wurde, so dass die betreffenden Akten immerhin noch nicht abgeschlossen sind.

582. Der Komet Biela. — Als Jos. **Morstadt** in den Zwanzigerjahren die Überzeugung gewonnen hatte, dass der von **Pons** 1805 XI 10 entdeckte und als 1806 I bezeichnete Komet als die fünfte Wiederkehr des von **Montaigne** 1772 aufgefundenen Kometen zu betrachten sei, also eine Umlaufszeit von circa $6^3/_4{}^a$ besitze und zu Anfang 1826 wiederkehren werde, so ermunterte er Wilh. **v. Biela** nach demselben zu suchen, und dieser fand ihn dann nicht nur 1826 II 27 wirklich auf, sondern führte auch die Berechnung von dessen Bahn und den Nachweis für die Richtigkeit der Morstadt'schen Annahme mit Erfolg durch, so dass sein Name mit dem Kometen zu verbinden war [a]. — Dieser Komet, der sodann vor seiner Wiederkehr im Jahre 1832 durch ein Missverständnis einen grossen Schrecken hervorrief, machte sich noch später besonders dadurch bemerklich, dass er sich 1846 unter den Augen der Beobachter teilte, so dass fortan, und noch bei der Wiederkehr im Jahre 1852, zwei getrennte Nebelmassen nebeneinander fortliefen, — während man dagegen vor und nach dem auf 1866 I 26 bestimmten Periheldurchgange vergeblich nach den beiden Teilen suchte und so zu der Annahme gelangte, es habe sich dieser Komet vollständig aufgelöst [b].

Zu 582: *a.* Der von **Pons** 1805 XI 10 entdeckte, aber erst 1806 zum Perihel gelangte und somit als 1806 I bezeichnete Komet, wurde nicht nur von **Legendre** (vgl. 580 : a), sondern auch sonst mehrfach berechnet, so z. B. (vgl. Mon. Corr. 14 von 1806) durch **Bessel**, der für ihn Elemente erhielt, welche denjenigen des durch **Montaigne** 1772 III 8 aufgefundenen Kometen so ähnlich waren, dass er an Identität glaubte; als er jedoch die beiden Erscheinungen unter Benutzung der aus der Zwischenzeit gefolgerten grossen Axe elliptisch berechnete, kam er zu dem Schlusse, dass die beiden Kometen einander fremd seien, — während **Gauss**, der den Kometen von 1806 nach seinen neuen Methoden ohne jede Voraussetzung direkt elliptisch berechnete, für diesen eine Umlaufszeit von $4^a,7$ erhielt. Wodurch nun Joseph **Morstadt** (Kolin in Böhmen 1797 — Lichtenwald in Steyermark 1869; k. k. Staatsbeamter und Besitzer einer Sternwarte in Prag; vgl. Zürch. Viert. 1886) veranlasst wurde, die durch Bessel verworfene Identität unter anderer Supposition neuerdings ins Auge zu fassen und so zu den oben erwähnten Resultaten zu kommen, weiss man nicht; dagegen ist es Thatsache, dass er einen ihm befreundeten Liebhaber der Astronomie, den Hauptmann W. **v. Biela**, der damals in Josephstadt in Böhmen stand, rechtzeitig auf den zu erwartenden Kometen aufmerksam machte, — dass dieser nun mit allem Eifer darauf ausging, den Kometen bei seinem ersten Erscheinen abzufangen, und sogar seine Wachtposten instruierte, ihm darin behilflich zu sein, — dass seine Bemühung 1826 II 27 (also volle 10 Tage vor

Gambart) zum Ziele führte und sich sodann die bereits angegebenen Erfolge anreihten. Für weitern Detail vgl. A. N. 92 von 1826 und Berl. Jahrb. auf 1829. — *b.* Die Bahn des Biela'schen Kometen hat das Eigentümliche, dass ihr absteigender Knoten nahe an die Erdbahn fällt, und als nun **Olbers** ankündigte, es werde 1832 X 29 die Nebelhülle des Kometen dieselbe sogar streifen, aber allerdings an einer Stelle, von der die Erde an jenem Tage volle 11 Millionen Meilen entfernt sei, so kündigten die Zeitungen, ohne jenen vor jeder Gefahr sichernden Zusatz zu beachten, einfach auf jenen Zeitpunkt einen Zusammenstoss mit der Erde an: Schon begann eine Panik, als es **Littrow** noch im letzten Momente gelang, durch sein Schriftchen „Über den gefürchteten Kometen von 1832. Wien 1832 in 8." das Publikum aufzuklären und zu beruhigen. — Bei der auf 1839 fallenden zweiten Wiederkehr blieb der Komet wegen ungünstigen Stellungsverhältnissen ungesehen; dagegen erschien er 1845 XI 28 und folgende Tage in ganz normaler Weise, — von XII 19 an aber wie etwas länglich, — ja 1846 I 13 bemerkte **Maury** eine Art Bifurkation, welche dann immer stärker wurde, bis I 27 **d'Arrest** einen förmlichen Doppelkopf wahrnahm. Noch etwas später sah man zwei deutlich geschiedene Nebelmassen ganz gemütlich nebeneinander laufen, — und diese fanden sich auch bei der folgenden Wiederkehr im August 1852 noch vor, nur war ihre Distanz etwas grösser geworden. Die im 4. Jahrhundert v. Chr. von dem Griechen **Ephorus** berichtete, aber bis jetzt bezweifelte Thatsache, dass ein Komet (mutmasslich der von 371 v. Chr.) in zwei Teile zerfallen sei, war damit offenbar rehabilitiert. — Im Jahre 1859 konnte man wegen ungünstigen Verhältnissen nicht erwarten, den Kometen zu sehen; dagegen sollte er nach den Vorausberechnungen von **Michez** in Bologna, vor und nach seinem folgenden, auf 1866 I 26 fallenden Periheldurchgange sichtbar werden, — wurde aber, trotzdem **d'Arrest** und **Secchi** mit ihren kräftigen Instrumenten eifrigst darnach suchten, nicht aufgefunden, so dass ersterer die Überzeugung gewann, dass sich der Komet aufgelöst habe, und somit **Kepler** mit seinem Ausspruche: „Ich halte dafür, dass der Kometenkörper sich verwasche, verändere, auseinandergezogen und vernichtet werde, und dass, wie die Seidenwürmer durch das Herausspinnen ihres Fadens, so auch die Kometen durch das Ausströmen ihres Schweifes aufgezehrt und endlich dem Tode überliefert werden", wenigstens in einzelnen Fällen mutmasslich Recht behalten dürfte. Wir werden übrigens unter der folgenden Nummer noch Einiges von den mutmasslichen weitern Schicksalen des Biela'schen Kometen hören.

583. Die Verwandtschaften von Kometen und Sternschnuppen. — Schon **Morstadt** scheint gewisse Beziehungen zwischen Kometen und Sternschnuppenschwärmen geahnt zu haben; aber da er diese Sache nicht weiter verfolgte, so blieb es **d'Arrest**, **Schiaparelli** und **Weiss** vorbehalten, nachzuweisen, dass sich zu jedem Schwarme ein Komet mit so übereinstimmenden Elementen findet, dass man unbedingt auf Zusammengehörigkeit schliessen muss, folglich die Sternschnuppen entweder Geschwister, oder wohl noch eher Auflösungsprodukte der Kometen sind. Fast entscheidend für letztere Ansicht und jedenfalls von hohem Interesse ist der Umstand, dass der dem Biela'schen Kometen entsprechende Schwarm der

Andromediden gerade seitdem man erstern vermisst, sich schon mehrmals sehr reichlich eingestellt hat [a].

Zu 583: *a.* Für **Morstadt** auf A. N. 347 von 1838 und für die Berechnung der Meteorbahnen auf unsere 570 verweisend, gebe ich beispielsweise folgende drei Muster von korrespondierenden Elementen:

Elemente	Perseiden	Komet 1862 III	Leoniden	Komet 1866 I	Andro-mediden	Komet 1852 III
☊ . . .	138° 16′	137° 27′	231° 28′	231° 26′	246° 0′	246° 8′
i	64 3	66 20	17 44	17 18	12 0	12 33
P	343 38	344 41	56 25	60 28	110 7	109 25
q	0,9643	0,9626	0,9873	0,9705	0,8472	0,8606
	Retr.		Retr.		Dir.	

einerseits beifügend, dass die zwei ersten Paare nach **Schiaparelli** gegeben sind, das dritte nach **Klinkerfues**, — und dass anderseits der Komet 1852 III die letzte und namentlich von **Secchi** beobachtete Erscheinung des Biela'schen ist, — der von **Tuttle** entdeckte Komet 1862 III nach Rechnung von **Oppolzer** eine Umlaufszeit von circa 124ª zeigt, — endlich der von **Tempel** aufgefundene Komet 1866 I sich nach **Hind** unter Annahme einer mittlern Umlaufszeit von 32ª,28 zur Not rückwärts bis 532 v. Chr. verfolgen lässt. — Was speciell die Verwandtschaft des Biela'schen Kometen mit den Andromediden anbelangt, so geht dieselbe übrigens schon aus dem Faktum hervor, dass letztere nicht nur an demselben XI 27, wo die Erde durch den absteigenden Knoten der Kometenbahn geht, in Sicht kommen, sondern gerade in den Jahren 1859, 1872 und 1885 zu vielen Tausenden gesehen worden sind, in welchen man vergeblich die Wiederkehr des Kometen erwartete. Ferner mag angeführt werden, dass **Klinkerfues** bei Anlass des Meteorregens von 1872 die originelle Idee hatte, es möchte die betreffende Meteorwolke einige Zeit nach ihrem Durchgange durch den Knoten in dem Gegenpunkte des Radiationspunktes, d. h. etwas nördlich von β Centauri, als Komet erscheinen, — dass er XI 30 an **Pogson** in Madras telegraphierte, er möchte in dieser Himmelsgegend darnach suchen, — und dass dieser dann wirklich XII 2—3 an der bezeichneten Stelle etwas kometenähnliches zu sehen glaubte. — Zum Schlusse verweise ich noch auf die Schriften: „Dan. **Kirkwood**, Comets and Meteors. Philadelphia 1873 in 8., — Gustav v. **Boguslawski** (Gross-Rake bei Breslau 1827 geb.; Sohn von Ludwig in 579; Gymnasiall. Anklam), Die Sternschnuppen und ihre Beziehung zu den Kometen. Berlin 1874 in 8., — etc."

584. Einige andere sichtbar wiedergekehrte Kometen von kurzer Umlaufszeit. — Ausser den Kometen von Encke und Biela kennt man gegenwärtig noch 8 Kometen von kurzer Umlaufszeit, welche mindestens in zwei Erscheinungen sichere Beobachtungen ergeben haben und nach ihren Entdeckern die Namen **Faye, Brorsen, d'Arrest, Tuttle, Winnecke** und **Tempel I, II, III** tragen [a].

Zu 584: *a.* Der von **Faye** 1843 XI 22 zu Paris entdeckte und seither wiederholt, zuletzt 1888 beobachtete Komet von circa 7½ª Umlaufszeit, wird

zuweilen als der „Faye-Möller'sche" bezeichnet, da Axel **Möller** denselben an Kindesstatt angenommen und für ihn unter anderm eine ähnliche, der Zeit proportionale Verkürzung seiner Umlaufszeit wie bei dem Encke'schen Kometen nachgewiesen hat. Vgl. für ihn auch „Alex. **Shdanow**, Recherches sur l'orbite intermédiaire de la Comète de Faye dans la proximité de Jupiter en 1841. St-Pétersbourg 1885 in 4." — Für den von **Brorsen** 1846 II 26 entdeckten und seither ebenfalls wiederholt, zuletzt 1879, gesehenen Kometen von circa $5^1/_2{}^a$ Umlaufszeit hat **Hind** nachgewiesen, dass er erst 1842 durch Jupiter seine jetzige Bahn erhalten hat, und **d'Arrest** hat nicht nur dies bestätigt, sondern auch gefunden, dass in der Mitte des folgenden Jahrhunderts eine neue Bahnänderung eintreten dürfte. In der neuern Zeit wird dieser Komet von L. **Schulze** besorgt. — Der von **d'Arrest** 1851 VI 27 zu Leipzig entdeckte, seither ebenfalls wiederholt, zuletzt 1890, gesehene Komet von circa $6^2/_3{}^a$ Umlaufszeit, wird gegenwärtig von G. **Leveau** beaufsichtigt. — Der von **Tuttle** 1858 I 4 zu Cambridge (U. S.) aufgefundene, zuletzt 1885 beobachtete Komet von $13^a,7$ Umlaufszeit, dessen Identität mit 1790 II bald nach seiner Entdeckung und zwar zunächst durch **Pape** nachgewiesen wurde, ist nachher durch den 1871 bei Metz gefallenen O. **Tischler** bearbeitet und nunmehr von J. **Rahts** übernommen worden. — Den von **Winnecke** 1858 III 8 in Bonn entdeckten, zuletzt 1886 gesehenen Kometen von $5^1/_2{}^a$ Umlaufszeit, dessen Identität mit 1819 III alsbald erkannt wurde, hat längere Zeit Th. **v. Oppolzer** in ausgezeichneter Weise besorgt. Vgl. für ihn auch „Karl **Bohlin**, Recherches sur les perturbations de la Comète de Winnecke depuis 1809 à 1819. Stockholm 1888 in 4., — und: E. **v. Haerdtl**, Die Bahn des periodischen Kometen Winnecke in den Jahren 1858 bis 1886, nebst einer neuen Bestimmung der Jupitersmasse (Wien. Denkschr. 1888—89). — Die von W. **Tempel** 1867 IV 3 zu Marseille, 1869 XI 27 ebenda, und 1873 VII 3 zu Mailand entdeckten Kometen haben der Reihe nach die Umlaufszeiten von circa $5^a,59$, $5^a,45$ und $5^a,20$, — und sind zuletzt 1879, 1891 und 1878 beobachtet worden. Der erste derselben (I), welcher 1870 und 1881 durch Jupiter starke Störungen erlitt, ist der Aufsicht von Raoul **Gautier** übergeben und von ihm bereits in der Abhandlung „La première comète périodique de Tempel 1867 II. Etude consacrée spécialement aux apparitions de 1873 et de 1879. Genève 1888 in 4." besprochen worden, — den zweiten (III, da seine Periodicität erst nach Entdeckung des dritten bemerkt wurde) hat **Bigourdan**, — und den dritten (II) **Schulhof** übernommen. — Ein von Francesco de **Vico** (Macerata bei Ancona 1805 — London 1848; Jesuit; Dir. Obs. Coll. Rom.) 1844 VIII 22 zu Rom entdeckter Komet, der eine Umlaufszeit von etwa $5^1/_2{}^a$ zeigte, wurde früher ebenfalls unter die Kometen von kurzer Umlaufszeit eingereiht, dagegen später wieder fallen gelassen, weil er nachher nie mehr mit Sicherheit aufgefunden wurde; ob ein von **Barnard** 1884 VII 16 entdeckter Komet mit ungefähr gleicher Umlaufszeit Ersatz für ihn bieten kann, wird sich 1895 entscheiden. Für den Kometen von M. **Wolf** vgl. die folgende Nummer.

585. Einige neue und wieder verlorene Kometen dieser Art. — Als **Lexell** den von **Messier** 1770 VI 14 entdeckten Kometen berechnete, fand er für ihn eine elliptische Bahn mit nur etwa $5^1/_2{}^a$ Umlaufszeit, und doch suchte man mehrmals zu den Zeiten, wo er wieder zum Perihel zurückkehren sollte, vergeblich

nach ihm, — fand auch weder Spuren von frühern Erscheinungen, noch einen Fehler in der Berechnung. Es lag da ein Rätsel vor, welches erst **Laplace** und **Burckhardt** definitiv zu lösen wussten, indem sie zeigten, dass dieser Komet (wie es schon Lexell vermutet, aber dafür keinen Glauben gefunden hatte) erst 1767 durch Jupiter in die Bahn abgelenkt wurde, welche er 1770 beschrieb, und dass ihn derselbe Planet 1779 wieder aus dieser Bahn hinauswarf, so dass er nur 1776 noch einmal in Sicht gekommen wäre, wenn nicht damals gar zu ungünstige Verhältnisse bestanden hätten [a]. — Auf ähnliche Weise ist es zu erklären, dass der 1783 durch E. **Pigott** entdeckte Komet nur dieses Eine Mal gesehen wurde, und auch der 1884 durch Max **Wolf** aufgefundene Komet scheint derselben Kategorie anzugehören [b].

Zu 585: *a.* Für die Rechnungen von **Lexell** vgl. Mém. Pet. 1777—81, — für diejenigen von **Laplace** und **Burckhardt** teils des erstern „Mécanique céleste (pag. 216—28 des 1805 erschienenen Band IV)“, teils des letztern „Mémoire sur la Comète de 1770 (Mém. Par. 1806)“. Von spätern betreffenden Arbeiten ist namentlich die Abhandlung „Th. **Clausen**, Bestimmung der Bahn des Cometen von 1770 (A. N. 439—41 von 1842)“ zu erwähnen, über welche sich **Bessel** mit den Worten aussprach: „Welche herrliche, oder richtiger, meisterhafte Arbeit ist die von Clausen über den Cometen von 1770; sie ist eine Leistung unserer Zeit, welche unsere Nachkommen ihr anzurechnen nicht vergessen werden“. — Nach den Untersuchungen von **Chandler** ist es nicht unwahrscheinlich, dass in dem 1889 VII 6 durch **Brooks** entdeckten Kometen eine Wiedererscheinung desjenigen von Lexell vorliegt. — *b.* Als **Burckhardt** (vgl. seine Note „Sur l'ellipse décrite par la Comète de 1783 et sur sa ressemblance à celle de 1793“, lûe 1814, impr. Conn. d. t. 1820) den von **Pigott** (vgl. dessen Noten „Discovery of a Comet 1783, — und: Observations of the Comet of 1783“ in Ph. Tr. 1784) zu York 1783 XI 19 entdeckten und gemeinschaftlich mit seinem Freunde **Goodricke** bis XII 3 verfolgten Kometen, unter Zuzug der von **Méchain** und **Messier** von XI 26 bis XII 21 erhaltenen Positionen, berechnete, erhielt er eine Umlaufszeit von etwa $5{,}6^a$, und seine Rechnungen sind (abgesehen von der beanstandeten Identität mit 1793 II) seither durch C. H. **Peters** als nahe richtig erklärt worden; nachher wurde der Komet mutmasslich ebenfalls durch Jupiter in eine andere Bahn abgelenkt. — Dass dem Brorsen'schen Kometen später ein ähnliches Schicksal bevorstehen dürfte und denjenigen von Vico bereits betroffen haben mag, ist schon in 584 angedeutet worden; dagegen bleibt noch zu erwähnen, dass der von Max **Wolf** (Heidelberg 1863 geb.; Doc. astr. Heidelberg und Besitzer eines Obs.) 1884 XI 17 entdeckte und 1891 wieder gesehene Komet, dem gegenwärtig nach **Krüger** eine Umlaufszeit von $6^1/_2{}^a$ zukömmt, während man von frühern Erscheinungen nichts weiss, nach den Untersuchungen von R. **Lehmann**-Filhés (vgl. A. N. 2632 von 1884) wahrscheinlich ein neues Analogon zu dem Lexell'schen Kometen abgeben dürfte.

586. Einige andere bemerkenswerte Kometen älterer und neuerer Zeit. — Ausser den im vorhergehenden behandel-

ten giebt es noch eine grosse Reihe von in älterer und neuerer Zeit beobachteten und berechneten Kometen, welche auf die Entwicklung dieses Gebietes einen hervorragenden Einfluss ausgeübt haben. Ich muss mich jedoch hier auf eine kleine Auswahl beschränken [a].

Zu 586: *a.* Der von Dirk **Klinkenberg** (Harlem 1709 — Haag 1799; holländ. Regierungssekr.) 1743 XII 9 entdeckte und bis in den März 1744 vielfach beobachtete grosse, sich durch einen fächerartigen Schweif auszeichnende Komet, ist schon dadurch von Interesse, dass er **Loys** (vgl. 497) zu seinen bemerkenswerten Arbeiten veranlasste und den jungen **Lambert** für die Astronomie gewann, — aber namentlich auch dadurch, dass er G. **Heinsius** zu seiner vorzüglichen „Beschreibung. Petersburg 1744 in 4." veranlasste. Vgl. auch „J. L. E. **Dreyer**, On the multiple tail of the great Comet of 1744 (Copernicus 1883)". — Der von **Messier** 1769 VIII 8 entdeckte Komet rief alsbald den bemerkenswerten Arbeiten „**Lexell**, Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la Comète de l'an 1769 et son temps périodique, exécutées sous la direction de M. Euler. St-Pétersbourg 1770 in 4., — Giuseppe **Asclepi** (Macerata 1706 — Rom 1776; Jesuit; Prof. math. Coll. Rom.), De Cometarum motu. Romæ 1770 in 4. (Suppl. 1772), — etc.", — und sodann später der 1806 von **Bessel** eingesandten, als eine seiner ersten grössern Arbeiten doppelt interessanten Preisschrift „Untersuchung der wahren elliptischen Bewegung des Kometen von 1769 (Berl. Jahrb. 1810, mit Nachtrag in 1811), nach welcher der Umlauf über 2000 Jahre beansprucht. — Der grosse, zuerst von Augustiner-Mönchen in Sicilien wahrgenommene Komet von 1807, zeichnete sich später durch einen schönen Doppelschweif aus. **Bessel** erhielt für ihn, vgl. seine „Untersuchung über die scheinbare und wahre Bahn des 1807 erschienenen Kometen. Königsberg 1810 in 4. (vgl. auch Berl. Jahrb. 1811)" eine Umlaufszeit von etwa 15½ Jahrhunderten. — Der 1811 III 26 durch **Flaugergues** entdeckte und bis 1812 I 11 eifrigst verfolgte, ja, entsprechend der von **Bessel** betonten Möglichkeit, zur Zeit seiner Opposition durch Vincent **Wisniewsky** (Polen 1781 — Petersburg 1855; Prof. astr. und Akad. Petersburg) in Nowo-Tscherkask 1812 VII 31 nochmals aufgefundene und bis VIII 17, also überhaupt längst beobachtete Komet, ist als eine der glänzendsten und zugleich durch die (einen „Kometenwein" ermöglichende gute) Witterung begünstigtsten Erscheinungen dieser Art zu bezeichnen. Leider ging jedoch aus der sich auf ihn beziehenden Musterarbeit „**Argelander**, Untersuchung über die Bahn des grossen Kometen vom Jahre 1811. Königsberg 1823 in 4." eine Umlaufszeit von vollen 3065 ± 43 Jahren hervor, so dass wir uns nicht so bald seiner Wiederkehr erfreuen werden. — Der durch **Pons** 1812 VII 20 entdeckte teleskopische Komet ist besonders dadurch merkwürdig, dass er, ausser dem Halley'schen, der einzige wirklich wiedergekehrte von grosser Umlaufszeit ist. Schon **Encke** hatte (vgl. Zeitschr. f. Astr. II) ihn als elliptisch erkannt und berechnet, wobei er eine Umlaufszeit von 70ª,68 fand, welche sodann (vgl. Compt. rend. 1882) bei Neuberechnung durch **Schulhof** und **Bossert** auf 73ª,18 erhöht wurde, — jedoch mit dem Bemerken, dass die Wiederkehr durch Einwirkung der vier äussern Planeten um circa 1¼ª befördert werden dürfte, was dann auch wirklich nahezu der Fall war, indem ihn **Brooks** 1883 IX 1 auffand, und sodann aus vielfachen Beobachtungen, bei welchen der Komet eigentümliche Lichtwechsel zeigte, die Umlaufszeit 71ª,48 erhalten wurde. — Der von **Olbers** 1815 III 6 aufgefundene

und sein Perihel IV 25 passierende teleskopische Komet reiht sich dem vorhergehenden sehr nahe an, indem **Bessel** in seiner von 1816 datierenden „Untersuchung über die Bahn des Olbers'schen Cometen (Berl. Abh. 1812/3)“ die Umlaufszeit zu $74^a,05$ festsetzte und den zu erwartenden neuen Periheldurchgang für 1887 II 9 ankündigte. **Brooks** fand ihn dann allerdings erst 1887 VIII 14/5 auf, und die neuen Beobachtungen legten das Perihel auf 1887 X 8, — eine Abweichung von der Voraussage, die aber nichts auffallendes hat, da noch F. K. **Ginzel** in seiner Preisschrift „Neue Untersuchungen über die Bahn des Olbers'schen Cometen und seine Wiederkehr. Harlem 1881 in 4.“ dem von ihm auf 1886 XII 17 gesetzten Periheldurchgange eine Unsicherheit von $1^1/_2{}^a$ beilegte. — Höchst seltsame Erscheinungen bot der Komet 1843 I dar, indem er 1843 II 28 in Italien und Südamerika vielfach am hellen Tage und nahe bei der Sonne gesehen wurde, — dann aber seinen ungewöhnlichen Glanz rasch verlor, — im März in Mittel-Europa nur unmittelbar nach Sonnenuntergang am Westhorizonte, über welchen sein im Verhältnisse zum Kopfe gewaltiger Schweif emporragte, zur Not beobachtet werden konnte, — und nach IV 19, wo am Kap noch eine letzte Position erhalten wurde, wieder ganz verschwand. Die vielfachen und bis in die neueste Zeit fortgesetzten Versuche der **Boguslawski, Hubbard, Gould, Weiss**, etc., ihn mit frühern Kometen oder dann wieder mit demjenigen von 1880 zu identifizieren oder wenigstens aus den erhaltenen Beobachtungen etwas sichere elliptische Elemente abzuleiten, führten zu den widersprechendsten Resultaten, indem z. B. die für die Umlaufszeit gefundenen Werte zwischen 376 und 7^a variieren, und es steht sehr in Frage, ob dieses Rätsel überhaupt je ganz gelöst werden kann. — Die glänzendste Kometenerscheinung der neuern Zeit ist unstreitig die des 1858 VI 2 von Giambattista **Donati** (Pisa 1826 — Florenz 1873; Dir. Obs. Florenz) entdeckten und noch 1859 III 4 von Thom. **Maclear** am Kap beobachteten Kometen: Ende August für jedermann sichtbar geworden, zog er namentlich im September und Oktober durch seinen langen (nach meinen Bestimmungen X 5, wo Arctur ohne Lichtschwächung durch denselben gesehen wurde, im Maximum 33° messenden, nach Bond sogar bis X 10 auf 64° anwachsenden), fächerförmigen und etwas gekrümmten Schweif die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich und blieb bis in den Dezember hinein dem unbewaffneten Auge wahrnehmbar. Für die an ihm gemachten Beobachtungen über Schweifbildung auf unsere 588, namentlich aber für allen weitern Detail auf die Abhandlungen „G. Ph. **Bond**, Account of the great Comet of 1858 (Harv. Annal. 3), — O. **Struve** und A. **Winnecke**, Pulkowaer-Beobachtungen des grossen Kometen von 1858 (Mém. Pét. 1859), — E. A. **Roche**, Réflexions sur la théorie des phénomènes cométaires à propos de la Comète de Donati. Paris 1860 in 4., — etc.“ verweisend, erwähne ich noch, dass besonders M. **Loewy** (vgl. Wien. Sitz. 1858—59) mehrfach versucht hat, für denselben elliptische Elemente zu ermitteln und dabei eine Umlaufszeit von etwas mehr als 2000^a erhielt. — Der grosse Komet von 1881, der mutmasslich zuerst 1881 V 22 von John **Tebbutt** zu Windsor in Australien gesehen, aber auch von **Gould** V 29 in Cordoba unabhängig aufgefunden und zuerst in Europa avisiert wurde, wird hier namentlich erwähnt, weil bei seiner Erscheinung die neuen Beobachtungsmittel, die uns Photographie, Spektroskopie und deren Verbindung an die Hand geben, zum erstenmal durch die **Draper, Huggins, Janssen, Vogel**, etc., in wirksamer Weise zur Anwendung gebracht wurden. — Der sog. „grosse Septemberkomet“ von 1882 (1882 II) endlich wurde durch L. **Cruls** (Diest in

Belgien 1848 geb.; Dir. Obs. Rio), der ihn IX 11 bemerkt hatte, zuerst in Europa annonciert, — war jedoch schon IX 3 auf Neuseeland von freiem Auge gesehen worden. Zur Zeit seiner Sonnennähe (IX 17) war der Komet so hell, dass man ihn neben der Sonne sah, sofern man diese durch einen Schirm verdeckte, — ja mit dem Fernrohr konnten damals am Kap W. L. **Elkin** und W. H. **Finlay** seinen Durchgang durch die Sonne oder wenigstens sein Verschwinden am Sonnenrande, d. h. eine Erscheinung beobachten, die früher höchstens Ein Mal wahrgenommen worden war, wenn man nämlich die Notiz von **Stark** (vgl. dessen Met. Jahrb. 1819), er habe 1819 VI 26 um 7½ morgens einen sonderbaren Flecken über die Sonne gehen sehen, auf den durch **Olbers** (vgl. Berl. Jahrb. auf 1822) für jene Zeit berechneten Durchgang des Kometen 1819 II beziehen darf. Nach dem Durchgange wurde der Komet, für welchen Heinrich **Kreutz** (Siegen 1854 geb.; Obs. und Prof. Kiel) eine Umlaufszeit von 843^a fand, wieder sichtbar, nahm dann aber ziemlich rasch am Glanze ab, — jedoch konnte man am Kap noch von IX 30 bis X 4 eine Bifurkation desselben verfolgen und sogar noch 1883 VI 1 in Cordoba eine letzte Beobachtung erhalten.

587. Die Ergebnisse der spektroskopischen Untersuchung. — Seit **Donati, Huggins** und **Secchi** 1864 zuerst das Licht eines Kometen analysierten, sind eine ganze Reihe solcher Körper spektroskopischer Untersuchung unterworfen worden und es hat sich dabei ergeben, dass sich neben einem mehr oder weniger deutlichen kontinuierlichen, auf reflektiertes Sonnenlicht hinweisenden Spektrum, auch ein diskontinuierliches Spektrum zeigt, welches auf vorherrschendes Eigenlicht schliessen lässt, und in der Regel aus drei einseitig verwaschenen, sich in den Spektren von Kohlenstoffverbindungen entsprechend zeigenden Streifen besteht [a].

Zu 587: *a.* Während bei den frühern Kometen die Spektraluntersuchung wesentlich nur das oben mitgeteilte ergab, zeigte sich namentlich bei dem von C. S. **Wells** 1882 III 17 zu Albany entdeckten Kometen 1882 I die merkwürdige Erscheinung, dass bei Annäherung an die Sonne das gewöhnliche Kohlenwasserstoffspektrum wie zurücktrat und dafür helle Natriumlinien sichtbar wurden, die bei der Sonnennähe eine grösste Intensität erreichten, bei der Wiederentfernung rasch schwächer wurden, während umgekehrt das frühere Spektrum wieder immer deutlicher hervortrat, so dass **Vogel** (vgl. A. N. 2466 von 1882) sich zu der Äusserung veranlasst sah: „Der Vorgang im Cometen scheint demnach ganz analog demjenigen zu sein, welchen man in Geissler'schen Röhren beobachten kann, wo bei gesteigerter elektrischer Intensität in dem Momente, wo die Spectra von Metalldämpfen erscheinen, die Spectra aller vorhandenen Gase stark zurücktreten und in dem Masse abnehmen, als die Intensität der Metallspectra zunimmt". — Da sich auch die von L. **Thollon** und Ch. **Wolf** (vgl. Compt. rend. 1881) bei dem grossen Kometen von 1881 bemerkten ungewöhnlichen Erscheinungen so ziemlich dem eben geschilderten Vorgange unterordnen lassen, so hat die Ansicht, dass das bei den Kometen vorherrschende Eigenlicht elektrischer Natur sei, und dass die Kometenmaterie sich grossenteils in einem gasförmigen Zustande von starker Verdünnung befinde, viel für sich, — nur der eigentliche Kern, der zunächst das mit reflek-

tiertem Sonnenlichte zusammenhängende kontinuierliche Spektrum zu bedingen scheint, dürfte aus festen oder flüssigen Teilen bestehen, womit auch wenigstens bei einzelnen Kometen das auftretende polarisierte Licht, auf welches **Arago** schon 1819 hinwies, zusammenstimmt. — Vgl. für diesen Abschnitt noch „B. **Hasselberg**, Über die Spectra der Cometen und ihre Beziehung zu denjenigen gewisser Kohlenverbindungen. St. Petersburg 1880 in 4."

588. Der Kometenkopf und die Schweifbildung. — Während der einer rundlichen Nebelmasse oder Staubwolke zu vergleichende, sog. **Kopf** eines Kometen sich während seiner ganzen Erscheinung in der Regel nicht wesentlich verändert, so erleidet dagegen der charakteristische **Schweif**, der sich meistens erst bei Annäherung an die Sonne auszubilden scheint, oft sehr starke, ihn zuweilen zu einem förmlichen Fächer gestaltende Modifikationen [a]. Dass letzterer nicht bloss, wie noch **Leibnitz** meinte, ein optischer Effekt, sondern ganz reell sei, wird jetzt nur noch ausnahmsweise bezweifelt [b], und auch die bereits von **Newton** ausgesprochene, namentlich aber von **Bessel** näher entwickelte Ansicht, dass bei dessen Bildung eine, mit jener Annäherung sich steigernde Repulsivkraft thätig sei, ist, wenn auch über deren Natur noch Meinungsverschiedenheiten bestehen, so ziemlich allgemein angenommen, ja es ist sogar **Bredichin** gelungen, eine sich darauf stützende Theorie der Kometenschweife zu hoher Vollendung zu bringen [c].

Zu 588: *a.* Bei dem Donati'schen Kometen von 1858 (vgl. 586) konnte man ganz deutlich beobachten, wie auf der, der Sonne zugewandten Seite des Kopfes von Zeit zu Zeit Ausströmungen statt hatten, welche erst seitlich und dann rückwärts abflossen, und so den, in seinem Innern analog der Flamme einen hohlen Raum enthaltenden, von der Sonne abstehenden Schweif bildeten, der sich nach und nach, wie im Kampfe zwischen Trägheit und Anziehung, etwas krümmte. Verfliessen zwischen verschiedenen Ausströmungen erhebliche Zeiten, so bilden sich mehrere getrennte, gewissermassen einen Fächer bildende Schweife, wie dies namentlich schon bei dem Kometen von 1744 (vgl. 586) beobachtet wurde. — Grössere Schweife bilden sich gewöhnlich erst in der Sonnennähe, ja sogar erst nach dem Durchgange durch das Perihel, wie dies z. B. bei dem Halley'schen Kometen 1759 der Fall war; aber dann haben auch wieder Ausnahmen statt, wie dies bei demselben Kometen bei der auch in dieser Beziehung von **Bessel** so sorgfältig beobachteten Wiederkehr von 1835 eintraf, indem die Schweifbildung mindestens 40 Tage vor dem Periheldurchgange begann. — *b.* Dass der Schweif nicht eine optische Erscheinung, sondern materieller Natur ist, wird durch die Ergebnisse der Spektralanalyse sicher erwiesen; aber wenn man ihn als einen mit dem Kometen fest verbundenen und durch ihn mitgeschleppten Anhängsel betrachten und seine fortwährende Erneuerung leugnen wollte, so würde man wohl, um mit **Faye** zu sprechen, einen ähnlichen Fehler begehen wie mit der Annahme „que la panache de fumée d'un paquebot parti du Havre, et qu'on voit arriver à New-York, a tra-

versé l'Atlantique avec le bateau." — *c.* Während **Newton** (vgl. Buch III der Principien) die Bildung der Schweife mit den Wärmeverhältnissen in Verbindung gebracht hatte und die Kometenmaterie gewissermassen durch die Sonnenstrahlen zurückstossen liess, so dachten **Olbers** (vgl. seine Note „Über den Schweif des grossen Kometen von 1811" in Mon. Corr. 25 von 1812) und **Bessel** (vgl. seinen 1835 I 20 an Olbers geschriebenen Brief) mehr an elektrische oder überhaupt polare Wirkungen, ja letzterer begann in seiner klassischen Abhandlung „Beobachtungen über die physische Beschaffenheit des Halley'schen Cometen und dadurch veranlasste Bemerkungen (A. N. 300—302 von 1836)" darauf gestützt eine mathematische Behandlung der Frage. In der neuern Zeit suchten „**Faye** (vgl. Compt. rend. 1871 u. f.) und **Ranyard** unter gewissen Modifikationen die Newton'schen Ansichten wieder zur Geltung zu bringen, während sich **Zöllner** und Theodor **Bredichin** (Nikolajew in Südrussland 1831 geb.; Dir. Obs. Moskau und Pulkowa) auf den Bessel'schen Boden stellten, indem ersterer (vgl. seine Schrift „Über die Natur der Kometen. Leipzig 1872 in 8." und seine mehrfachen Artikel in den A. N. von 1874—76) bei seinen Untersuchungen von dem Satze ausging: „Steht ein Körper gleichzeitig unter dem Einfluss der Gravitation und freien Elektricität eines andern, so prävaliert bei zunehmender Masse die Gravitation, bei abnehmender Masse die Elektricität als bewegende Kraft; daher stehen die Kerne der Kometen (als tropfbarflüssige Massen) unter dem Einflusse der Gravitation, die entwickelten Dämpfe (als Aggregate sehr kleiner Massenteilchen) unter dem Einflusse der freien Elektricität der Sonne", — und letzterer (vgl. seine zahlreichen Artikel in den A. N., den Annalen von Moskau, etc., — namentlich auch seine von 1879/80 datierenden Theorien „des formes cométaires") zunächst die Bessel'schen Rechnungen revidierte und erweiterte, sowie die Konstanten-Bestimmungen in sorgfältigster Weise durchführte, dann aber allerdings noch weiter ging und so z. B. unter den Schweifen drei deutlich gesonderte Typen unterschied. — Immerhin bleibt, trotz aller dieser zum Teil meisterhaften Arbeiten, noch gar vieles unklar und unsicher, worauf wir in 590, wo auch die litterarischen Angaben etwas vervollständigt werden sollen, zurückkommen werden.

589. Die Austeilung der Kometen. — Das Studium der Austeilung der Kometen, oder die Kometen-Statistik, hat ebenfalls manche merkwürdige Thatsachen zur Kenntnis gebracht: So hat man z. B. gefunden, dass die Anzahl der retrograden Kometen nahezu mit derjenigen der sich direkt bewegenden übereinstimmt, ja überhaupt alle Neigungen ziemlich gleich häufig vorkommen[a], — dass bei beiden Klassen das Perihel weitaus in den meisten Fällen innerhalb der Erdbahn liegt[b], — dass, wenn man die elliptisch berechneten Kometen nach ihrer Apheldistanz ordnet, sich vier den vier grossen Planeten entsprechende Gruppen ergeben[c], — dass verschiedene Kometenpaare zu existieren scheinen[d], — dass die Bahnen der Kometen von kurzer Umlaufszeit, in ähnlicher Weise wie diejenigen der kleinen Planeten (547), ineinander greifen[e], — und so weiter.

Zu 589: *a.* Das zum Nachweise aufgestellte Tableau

Neigung	Anzahl		Neigung	Anzahl	
0—10°	20		90—100°	17	
10—20	32	66	100—110	26	60
20—30	14		110—120	17	
30—40	14		120—130	27	
40—50	20	49	130—140	21	68
50—60	15		140—150	20	
60—70	18		150—160	16	
70—80	20	54	160—170	19	41
80—90	16		170—180	6	
0—90	169		90—180	169	

welches ich (unter Ausschluss der Wiedererscheinungen des Encke'schen Kometen) aus dem von **Faye** (Astron. II) gegebenen Kometenverzeichnisse erhielt, bedarf wohl keines Kommentars; einzig mag beigefügt werden, dass auf eine der 18 Klassen durchschnittlich 19 ± 6 Kometen fallen. — *b.* Nach **Mädler** zählte man 1859 bereits 221 berechnete Kometen und von diesen hatten ihr

Perihel zwischen	Direkte Kometen		Retrograde Kometen		im Ganzen	
⊙ und ☿	18		27		45	
☿ ♀	26	82	40	89	66	171
♀ ♁	38		22		60	
♁ ♂	24	32	16	18	40	50
♂ ♃	8		2		10	
Summe	114		107		221	

— *c.* Als Matthias **Roller** (vgl. A. N. 1797 von 1864) die elliptisch berechneten Kometen nach ihren Apheldistanzen ordnete, erhielt er nämlich die Gruppen:

Komet	Aphel-distanz	Komet	Aphel-distanz
Encke-Pons	4,09	1858 I	10,43
1867 II	4,80	1846 VI	11,10
1819 IV	4,81	Mittel	10,76
1678	4,99	Saturn	10,07
de Vico	5,01	1866 I	19,14
1766 II	5,47	Uranus	20,08
Winnecke-Pons	5,51	1852 V	29,63
Brorsen	5,62	1812	33,41
1776 I	5,65	1815	34,06
d'Arrest	5,71	1846 IV	34,50
Möller-Faye	5,92	1847 V	35,07
1783	6,06	Halley	35,39
Biela	6,19		
Mittel	5,37	Mittel	33,68
Jupiter	5,45	Neptun	30,84

— *d.* So fand z. B. **Klein** mit Recht, dass durch die Übereinstimmung der Elemente

der Kometen	1857 III	1857 V	1863 I	1863 VI
Periheldurchgang . .	1857 VII 18	1857 X 1	1863 II 3	1863 XII 29
Länge des Perihels . .	249° 36′	250° 8′	191° 23′	183° 8′
Länge des aufst. Knotens	23 41	14 58	116 56	105 2
Neigung	58 57	56 3	85 22	83 19
Periheldistanz	0,37	0,57	0,79	1,31
Lauf	R	R	D	D

von welchen der erste und zweite durch **Klinkerfues**, der dritte durch **Bruhns** und der vierte durch Uhrmacher **Bäker** in Nauen entdeckt wurde, entweder die Existenz von ursprünglichen Doppel-Kometen wahrscheinlich gemacht werde, oder auf eine dem Biela'schen Kometen (vgl. 582) entsprechende Teilung mancher Kometen hinweise. — *e.* Nach Bruhns teilte nämlich **d'Arrest** schon vor Publikation der in 547 besprochenen Schrift von 1851 der Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig mit, dass die Bahnen der Kometen von Encke, Faye, Biela, Brorsen und de Vico so miteinander verknüpft seien, „dass man keine von ihnen, unter der körperlichen Gestalt wie Reifen gedacht, isoliert herausheben könnte, ohne die ganze Gruppe zu entfernen". — Ich füge noch bei, dass **Mossotti** fand, es scheinen die meisten Kometen aus den Regionen der Milchstrasse zu uns zu kommen und Bahnen von geringer Neigung gegen die galaktische Ebene zu besitzen, — dass Aug. **Svedstrup** in seinem „Beitrag zur Cometenstatistik (A. N. 2552 von 1883)" nachwies, dass die Mehrzahl der Kometen-Perihelien sich um einen Kreis von $85\frac{1}{2}°$ Radius lagern, dessen Pol ($l = 178\frac{1}{2}°$, $b = 29\frac{1}{2}°$) in die Nähe des Poles der Milchstrasse (vgl. 593) falle, — dass aber allerdings auch bei Schlüssen, welche auf die gegenwärtige Kometen-Statistik gebaut werden wollen, nicht vergessen werden darf, dass wir von den vorhandenen Kometen wohl bis jetzt nur einen kleinen Teil kennen.

590. Meine gegenwärtigen Ansichten über die Kometen. — Trotz den höchst wertvollen Daten, welche im vorhergehenden mitgeteilt werden konnten, halte ich das vorliegende Material, im Vergleich mit der grossen Mannigfaltigkeit der Erscheinungen, noch kaum für genügend, um eine endgiltige Lehre über das Wesen der Kometen aufstellen zu können, und es dürfte noch gegenwärtig das Sammeln und Ordnen gut konstatierter Thatsachen verdienstlicher sein, als das allerdings weniger mühsame und dem grössern Publikum mehr imponierende Aufstellen neuer Hypothesen [a]. — Immerhin wird man jetzt schon aussprechen dürfen, dass die grosse Mehrzahl der bei uns in Sicht gekommenen Kometen nicht unserm Sonnensysteme anzugehören scheint, sondern aus heissen, leuchtenden und stark zerteilten Massen besteht, welche dasselbe, wenn es ihnen auf der Reise durch den Weltraum begegnet, in einzelnen Fällen vorübergehend oder auf die Dauer annexiert, in den meisten Fällen aber unter etwelchen Modifikationen

weiter ziehen lässt; ferner treten bei grösserer Annäherung eines Kometen an die Sonne zuweilen, aus noch nicht genau zu übersehenden Ursachen, Zustände ein, welche zur Schweifbildung oder auch zum Zerfallen führen, jedoch jedenfalls für die Fortexistenz des Betroffenen bedeutungsvoller sind als für die Zuschauer [b].

Zu 590: *a.* Auch **Vogel** sprach in seiner Mitteilung „Über die Spectra der Kometen (A. N. 1908 von 1872)" auf das Entschiedenste aus, dass wohl alle Erfahrungen, welche man bis jetzt mit Fernrohr und Spektroskop über die Natur und Beschaffenheit der Kometen und ihrer Schweife sammeln konnte, noch kaum genügend seien, um eine sichere Basis für Spekulationen zu bieten, — **zumal uns alle Kenntnisse über die Druck- und Temperatur-Verhältnisse im Innern der Kometen abgehen.** — *b.* Wenn W. **Meyer** auf pag. 90 seiner Schrift „Kosmographisches Skizzenbuch. Leipzig 1879 in 8." sagt: „Die Kometen sind Räthsel geblieben, wie sie es vor Jahrtausenden waren, und wir wiederholen beschämt heute die Worte Seneca's über dieselben: **Wir müssen uns mit dem begnügen, was bis jetzt gefunden ist, und es unsern Nachkommen überlassen die Wahrheit näher zu ergründen**", so ist dies denn doch nur „cum grano salis" zu verstehen, denn wesentliche Fortschritte sind gemacht, wenn auch allerdings das Ziel noch nicht erreicht worden. — Anhangsweise füge ich zum Schlusse dieses Abschnittes versprochenermassen noch folgende litterarische Ergänzungen bei: „B. **Valz**, Essai sur la détermination des densités de l'éther (A. N. 185—86 von 1830; vgl. auch Brief Horner an Gautier von 1830 XI 3 in Notiz 352), — E. **Roche,** Mémoire sur la figure d'une masse fluide, soumise à l'attraction d'un point éloigné (Mém. Montp. 1849—51), und: Remarques sur les atmosphères des Comètes (Ann. Obs. Paris V von 1859), — H. **Mohn**, Om Kometenbanernes indbyrdes Beliggenhed. Christiania 1861 in 4., — W. **Zenker,** Über die physischen Verhältnisse und die Entwicklung der Kometen (A. N. 1890—93 von 1872), — W. **Meyer,** Mémoire sur la grande Comète australe du mois de février 1880. Genève 1883 in 4., und: Etude sur la réfraction cométaire. Genève 1883 in 4., — Gust. **Cellérier,** Réfraction cométaire. Genève 1883 in 4., — Ad. **Marcuse,** Über die physische Beschaffenheit der Cometen. Berlin 1884 in 8. (Auszug in A. N. 2598—99 von 1884), — J. **v. Heppberger,** Über die physische Beschaffenheit der Kometen (Wien. astr. Kal. 1887), — H. **Kreutz,** Untersuchungen über das Kometensystem 1843 I, 1880 I und 1882 II (Kiel. Publ. III und VI von 1888—91), — J. **Holetschek**, Über die Verteilung der Bahnelemente der Kometen. Wien 1890 in 8., — etc."

XXIII. Die Stellarastronomie.

Um Erden wandeln Monde. — Erden um Sonnen, — Aller Sonnen Heere wandeln um eine grosse Sonne: — Vater unser, der du bist im Himmel. (Klopstock)

591. Die sog. Aichungen. — Schon **Kepler** und **Halley** sprachen sich dahin aus, dass die Sterne im allgemeinen über den Raum gleichmässig verteilt sein möchten und uns zunächst nur wegen ihrer verschiedenen Distanz verschieden gross erscheinen dürften; aber für genauere Untersuchungen über die Ausstreuung der Sterne fehlten diesen ältern Astronomen die nötigen Grundlagen, welche erst geschaffen wurden, als vor circa einem Jahrhundert Wilh. **Herschel** seine berühmten **Aichungen** (Star-Gauges) begann, d. h. ein Fernrohr nach und nach auf verschiedene Stellen des Himmels einstellte, je die gleichzeitig sichtbaren Sterne abzählte, und aus mehreren benachbarten Zählungen unter Berücksichtigung der scheinbaren Grösse des Gesichtsfeldes auf die mittlere Dichte der Sterne an der betreffenden Stelle des Himmels schloss [a]. Es ergab sich ihm auf diese Weise nicht nur, dass es bei 20 Millionen in einem 20-füssigen Spiegelteleskope sichtbare Sterne geben möchte, sondern namentlich auch, dass die erhaltenen Sterndichten, wie schon früher (284) angedeutet wurde, von der Milchstrasse gegen deren Pole hin ziemlich regelmässig abnehmen, und zwar so, wie wenn die sämtlichen Sterne ein unser Sonnensystem umgebendes linsenförmiges System bilden würden, dessen Hauptebene durch die Milchstrasse repräsentiert wäre [b].

Zu 591: *a.* Für die Ansichten von **Kepler** vgl. seine „Harm. mundi" von 1619, — für **Halley** seine Note „Of the number, order and light of the fix'd Stars (Ph. Tr. 1720)", — für die Arbeiten und Studien von W. **Herschel** dessen Abhandlungen „Account of some observations tending to investigate the construction of the heavens (Ph. Tr. 1784; deutsch in Berl. Jahrb. 1788), und: On the construction of the heavens (Ph. Tr. 1785; deutsch in Berl. Jahrb. 1788)", sowie deren in 298 erwähnte deutsche Bearbeitungen, welchen noch diejenige von **Ideler** (Königsberg 1791 in 8.) beizufügen ist. — Sodann bleibt

zu erwähnen, dass John **Herschel** (vgl. Kap. IV von dessen „Results" in 634) während seinem Aufenthalte am Kap die Arbeit seines Vaters auch noch auf den Südhimmel ausdehnte, sowie dass für den Detail der Herschel'schen Aichungen und einige verwandte neuere Arbeiten auch auf den 1884 erschienenen zweiten Band der „Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin" verwiesen werden kann. — *b.* Wilh. **Herschel** beschränkte seine Zählungen auf die Zone von $+45^\circ$ bis -30° D, und zählte im ganzen 3400 Felder wirklich ab, wobei ihm z. B. die auf die Mittelzone $+15^\circ$ bis -15° fallenden Zählungen durchschnittlich 26,995 Sterne per Gesichtsfeld ergaben, während letzteres in der ganzen Zone 215592 mal enthalten war; er konnte also einerseits schliessen, dass diese etwas mehr als ein Viertel des ganzen Himmels beschlagende Zone annähernd $26{,}995 \times 215592 \risingdotseq 5819000$ Sterne enthalten werde, folglich der ganze Himmel bei 20 Millionen mit seinem Instrumente sichtbarer Sterne aufweisen dürfte, — und als er anderseits die für die einzelnen Felder erhaltenen Häufigkeitszahlen nach deren Lage gegen die Milchstrasse ordnete, erhielt er auch die übrigen der oben angeführten Resultate. Diese letztern wurden sodann später, unter Zuzug der von John **Herschel** am Südhimmel abgezählten 2299 Felder, durch Friedrich **v. May** (Bern 1801 — ebenda 1884; Besitzer einer kleinen Sternwarte auf seinem Familiensitze zu Rued im Aargau) nochmals sorgfältig kontroliert, wobei sich (vgl. dessen Note „Über die Ausstreuung der Sterne am Himmel" in Bern. Mitth. 1853) zeigte, dass den von der Milchstrasse aus gezählten Distanzen

N 90° — 75 — 60 — 45 — 30 — 15 — 0 — 15 — 30 — 45 — 60 — 75 — 90° S

per Feld die Häufigkeitszahlen

2,5 5,0 7,7 14,5 23,5 51,0 82,0 59,0 26,7 13,5 9,6 6,6 0,0

entsprechen, deren Gang offenbar das Herschel'sche Gesetz vollständig erweist.

592. Die sog. Zonenbeobachtungen. — Den Aichungen stellen sich die sog. **Zonenbeobachtungen** an die Seite, welche darin bestehen, dass man ein Meridianinstrument successive auf verschiedene Deklinationen einstellt und je alle Sterne beobachtet, welche während einer gewissen Zeit infolge der täglichen Bewegung nach und nach durch das Gesichtsfeld gehen. Sie wurden durch **Lacaille** vorgeschlagen und sodann namentlich durch die **Lalande, Bessel, Argelander, Lamont, Carrington**, etc. in grossem Mass-Stabe ausgeführt, ja, besonders durch **Gould**, in Ausführung einer von **Horner** schon im Anfange unsers Jahrhunderts planierten Unternehmung, auch auf den südlichen Himmel ausgedehnt [a]. — Sie haben die aus den Aichungen erhaltenen Resultate vollständig bestätigt und namentlich auch W. **Struve** die Mittel verschafft, die räumliche Verteilung der Sterne zu studieren, wobei sich unter anderm die Richtigkeit der oben (591) erwähnten Vermutungen der Kepler und Halley auf das Schönste bewährte [b].

Zu 592: *a.* Wenn auch **Lacaille** (vgl. Mém. Par. 1742) das Verdienst zukömmt, spätestens 1742 zu Gunsten eines neuen Sternkataloges das Princip der Zonenbeobachtungen ganz richtig festgestellt zu haben, so wurde dasselbe

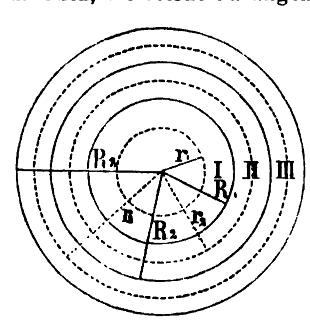
doch eigentlich erst durch **Lalande** zur wirklichen Anwendung gebracht, und auch da noch nicht ganz in der obenerwähnten Weise, da die Deklinationen an einem Mauerkreise von **Bird** (dem letztausgeführten Werke dieses Künstlers) und nur die Rektascensionen an einem Passageninstrumente bestimmt wurden: Die Beobachtungen wurden meist durch seine Schüler Joseph Lepaute **d'Agelet** (Thone-la-Long 1751 — Insel Malicolo in Polynesien, wo er 1788 mit der Expedition von Lapeyrouse verunglückte; Neffe der Lepaute in 576; Prof. math. und Akad. Paris; vgl. Lalande Bibl. 708—13) und Michel **Lefrançais** (Courcy bei Constances 1766 — Paris 1839; Adoptivsohn von Lalande und Grossneffe seines Vaters; Dir. Obs. der Ecole militaire und Akad. Paris) besorgt und ergaben von 1778 hinweg die Positionen von 50000 zwischen dem Pole und dem Wendekreis des Steinbocks gelegenen Sternen, von welchen **Lalande** einen kleinen Teil in den Pariser-Memoiren von 1789/90 publizierte, „le gros de l'armée" aber in seiner „Histoire céleste française. Paris 1801 in 4.", in deren Einleitung er mit berechtigtem Stolze sagte: „La postérité ne verra pas sans intérêt qu'au milieu des convulsions qui agitaient la patrie, un travail long et pénible s'exécutait dans le silence des nuits, et préparait des résultats faits pour durer plus longtemps que les institutions politiques, pour lesquelles on s'agit si fort et l'on verse tant de sang". Von neuern Bearbeitungen sind zu erwähnen: „Fr. **Baily**, A Catalogue of those (47390) Stars in the Histoire céleste française of Jer. Delalande for which Tables of reduction to the Epoch 1800 have been published by Prof. Schumacher. London 1847 in 8., — Jwan **Fedorenko** (Charkow 1827 — ebenda 1888; Prof. astr. Charkow), Positions moyennes pour 1790 des étoiles circompolaires de Lalande dans les Mémoires de 1789 et 1790. St-Pétersbourg 1854 in 4., — und: B. A. **Gould**, Reduction of the Observations of fixed stars made by Jos. Lepaute d'Agelet at Paris in 1783—85, with a Catalogue of the corresponding mean places referred to the equinox of 1800,0. Washington 1866 in 4." — In den Jahren 1821—25 und 1825—33 nahm sodann **Bessel** die Zonen 15 bis —15 und 15 bis 45° D in Arbeit und katalogisierte in jeder derselben an 32000 Sterne: Während er selbst die Durchgänge beobachtete, las erst **Argelander**, der schon von 1820 an sein Gehilfe war, sodann successive einer von dessen Nachfolgern: **Rosenberger**, **Anger** und August Ludwig **Busch** (Danzig 1804 — Königsberg 1855; erst Obs., dann Dir. Obs. Königsberg), die Mikroskope ab. Die Beobachtungen selbst erschienen successive in den Bänden 7—17 der Königsberger-Beobachtungen, und wurden von M. **Weisse** in seinen beiden Publikationen „Positiones mediæ stellarum fixarum in Zonis Regiomontanis. Petropoli 1846 und 1863 in 4." verarbeitet. — An diese Bessel'schen Zonen schliessen sich, nach oben bis 80 und nach unten bis —31° D gehend, zwei zusammen etwa 40000 Sterne umfassende Zonen an, welche **Argelander** in den Jahren 1841—44 und 1849—52 bearbeitet und in Bd. 1—2 der Bonner-Beobachtungen publiziert hat, — und sodann folgte die unter dem Namen „Durchmusterung" bekannte, von demselben unermüdlichen Manne unternommene, an 315000 Sterne von 0—92° Poldistanz ergebende und in Bd. 3—5 (mit Ergänzungen und Berichtigungen in 6—7) publizierte Revision der nördlichen Zonen, welche zugleich zur Grundlage der 190 erwähnten Karten diente. Noch ist beizufügen, dass Argelander bei diesen Arbeiten successive durch die Rud. **Kysäus**, Jul. **Schmidt**, Friedrich **Henzi** (Dorpat 1827 — Bern 1884; später Ingenieur; vgl. Notiz 357) und Friedrich **Thormann** (Bonn 1831 — Bern 1882; später Ingenieur; vgl. Notiz 357), sowie ganz besonders durch Adalbert **Krüger** (Marienburg 1832 geb.; später

successive Dir. Obs. Helsingfors, Gotha und Kiel) und Ed. **Schönfeld** vorzüglich unterstützt wurde, — ferner dass der letztgenannte als Nachfolger Argelanders in Bd. 8 noch eine den südlichen Deklinationen 2 bis 22° entsprechende Zone folgen liess, — und dass endlich Wilhelm Albrecht **Oeltzen** (Hannover 1824 — ebenda 1879; Obs. Wien und Paris) Bearbeitungen der beiden ersten Argelander'schen Zonen zu Wien 1851—52 und 1857—58 (berichtigte Neuausgabe durch E. Weiss 1890) herausgab. — Als Beispiele ergänzender Arbeiten führe ich noch diejenigen an, welche **Lamont** 1849—74 in den Münchner-Annalen und deren Supplementen publizierte, und den von **Carrington** verfassten „Catalogue of 3735 Circumpolar-Stars observed at Redhill in the years 1854—56. London 1857 in fol.", und verweise für einige andere auf 616. — Schon in jungen Jahren hatte sich **Horner** gewünscht, später einmal einige Jahre in Südamerika, z. B. in Buenos-Ayres, zuzubringen, um den Südhimmel aufzunehmen, und nach Rückkehr von der Weltumseglung glaubte er (vgl. Biogr. II 377—80) bereits die Petersburger Akademie für sein Projekt gewonnen zu haben; aber seine Hoffnungen wurden infolge der Kriege zu Wasser, und erst mehr als ein halbes Jahrhundert später gelang es B. A. **Gould**, einen entsprechenden Plan wirklich auszuführen, — seine schon in 190 erwähnte „Uranometria argentina" auszuarbeiten, — und, gegründet auf 105240 in den Jahren 1872—77 grösstenteils durch ihn selbst ausgeführte Bestimmungen, unter dem Titel „Mean Positions for 1875,0 of the Stars observed in the Zones at the Argentine National Observatory. Cordoba 1884, 2 Vol. in 4." einen Katalog von nicht weniger als 73160 zwischen 23 und 80° südlicher Deklination gelegenen Sternen zu veröffentlichen. — Zum Schluss erwähne ich noch, dass seit 1865 ein von **Argelander** angeregtes und unter dem Patronate der Deutschen astronomischen Gesellschaft begonnenes, seither zu einem internationalen erweitertes Unternehmen im Gange ist, das ursprünglich zum Zwecke hatte, unter Mitwirkung einer grossen Anzahl von Sternwarten die sämtlichen Sterne der „Durchmusterung" genauer zu bestimmen, und nunmehr sogar sich auf die 9 ersten Grössenklassen des ganzen Himmels ausdehnen will. Bereits ist ein grosser Teil der Beobachtungen ausgeführt und sogar schon 1890 unter dem Titel „Catalog der astronomischen Gesellschaft" die Publikation eines darauf gegründeten Fundamentalwerkes begonnen worden, das in Verbindung mit den später (594) zu besprechenden photographischen Aufnahmen schon der Gegenwart, aber allerdings namentlich den Astronomen folgender Jahrhunderte von grossem Nutzen sein wird. — Anhangsweise führe ich vorläufig (im übrigen wieder auf 616 verweisend) noch folgende Schriften auf: „R. **Wolf**, Über die Vertheilung der Fixsterne (Bern. Mitth. 1851), — K. **v. Littrow**, Zur Zählung der nördlichen Sterne im Bonner-Sternverzeichnisse nach Grössen (Wien. Sitz. 1869/70), — R. A. **Proctor**, The laws according to which the stars visible to the naked eye are distributed over the heavens (Monthly Not. 1871), — Giovanni **Celoria** (Casale Monferrato 1842 geb.; Prof. geod. und Obs. Brera in Mailand), Sopra alcuni scandagli del cielo eseguiti all' Osservatorio di Milano, e sulla distribuzione generale delle stelle nello spacio (Pubbl. Mil. 13 von 1877), — H. **Seeliger**, Über die Verteilung der Sterne auf der nördlichen Halbkugel nach der Bonner Durchmusterung. München 1884 in 8., und: Über die Vertheilung der Sterne auf der südlichen Halbkugel nach Schönfelds Durchmusterung. München 1886 in 8., — **Schiaparelli**, Sulla distribuzione apparente delle stelle visibili ad occhio nudo (Pubbl. Mil. 34 von 1889), — etc." — ***b.*** Ordnet man die 314925 Sterne, welche die „Durchmusterung" neben 64 Variabeln und 62 Nebeln ent-

hält, nach ihrer Grösse, so ergiebt sich nach der ebenerwähnten Arbeit von **Littrow** das Täfelchen

Grösse	Anzahl	Quotient
1—1,9	10	3,70
2—2,9	37	3,51
3—3,9	130	2,40
4—4,9	312	3,21
5—5,9	1001	4,38
6—6,9	4386	3,17
7—7,9	13823	4,20
8—8,9	58095	—
9—9,5	237131	
Summe	314925	—
Mittel	—	3,51

wo die als „Quotient" aufgeführten Zahlen angeben, wie oft die vorstehende Anzahl in der nachfolgenden enthalten ist, und durch ihre nahe Übereinstimmung wahrscheinlich machen, dass, wie schon W. **Herschel** (vgl. 591) und W. **Struve** (vgl. dessen „Etudes d'astronomie stellaire. St-Pétersbourg 1847 in 8.") annahmen, die Sterne im allgemeinen nahe von gleicher Grösse und nahe gleich verteilt sind, und uns einzelne zunächst darum grösser als andere erscheinen, weil sie uns näher stehen. Ersetzt man nun mit **Struve** den obigen Mittelwert der Quotienten durch 3 und bezeichnet mit R_1, R_2, R_3, ... die Radien der Kugeln, welche die Sterne 1, 1—2, 2—3, ... Grösse einschliessen, mit r_1, r_2, r_3, ... aber die Radien der Kugeln, welche die den verschiedenen Grössenklassen zugewiesenen Räume halbieren, so hat man, da die Volumina der Kugeln den dritten Potenzen ihrer Radien proportional sind,

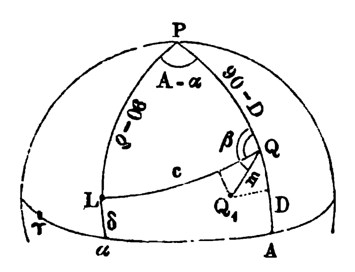


$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{1}{1+3} \qquad \frac{R_2^3}{R_3^3} = \frac{1+3}{1+3+3^2} \dots \text{ und } \frac{r_1^3}{R_1^3} = \frac{1}{2} \qquad \frac{r_2^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} = \frac{1}{2} \quad 1$$

und somit, wenn $R_1^3 = 2$ angenommen wird, $R_2^3 = 8$, $R_3^3 = 26$, ... und $r_1^3 = 1$, $r_2^3 = 5$, $r_3^3 = 17$, ... oder $r_1 = 1$, $r_2 = 1{,}71$, $r_3 = 2{,}57$, ... Setzt man diese Rechnung fort und zieht in Betracht, dass (608) die gewählte Einheit etwa 10 Lichtjahren entspricht, so ergeben sich für die Zeiten, welche das Licht braucht, um von den kleinsten mit unsern Riesenteleskopen noch sichtbaren Sternchen zu uns zu kommen, viele Jahrtausende (nach Herschels Rechnung sogar bei zwei Millionen Jahre), und es müssen also dieselben, damit wir sie jetzt sehen können, schon ebensolange existieren. Bei gehöriger Sehkraft könnte man somit auf fernen Sternen noch jetzt sehen, was sich auf der Erde vor Jahrtausenden ereignet hat, — es verschwinden gewissermassen in diesen Verhältnissen Raum und Zeit, ja sie zeigen uns, dass Allgegenwart und Allwissenheit keine leeren Begriffe sind.

593. Die sog. galaktische Ebene. — Nachdem schon W. **Struve** die Lage des der Milchstrasse bestentsprechenden grössten Kreises oder der sog. **galaktischen Ebene** annähernd bestimmt hatte, gelang es **Houzeau**, deren Pole noch genauer zu fixieren [a], und sodann, indem er die von freiem Auge sichtbaren Sterne nach Parallelzonen zu der galaktischen Ebene ordnete, den Nachweis zu leisten, dass das Herschel'sche Gesetz sich schon bei den Sternen der ersten Grössenklassen unverkennbar ausspricht [b].

Zu 593: *a.* Während sich die frühern Astronomen mit einer ganz provisorischen Bestimmung der galaktischen Ebene begnügten, so gelang es W. **Struve**, in seinen vorerwähnten „Etudes (pag. 61)“ zu zeigen, dass ihr nördlicher Pol in Beziehung auf das Equinoktium von 1825 nahe in $12^h\ 38^m$ und $31^o,5$ liege, was in Beziehung auf dasjenige von 1880 etwa mit $12^h\ 40^m$ und $31^o,3$ übereinkömmt. Seither hat nun aber **Houzeau** in seiner „Uranometria (vgl. 190)“ eine schärfere Untersuchung durchgeführt, zu deren Gunsten er die Rektascensionen und Deklinationen von 33 Punkten der Milchstrasse bestimmte, dieselben so auswählend, dass in jedem (gegenüber der nächsten Umgebung) der Glanz ein Maximum erreicht: Bezeichnet L einen dieser Punkte, P den Pol des Equators und Q den Struve'schen Pol der galaktischen Ebene, so kann man aus den bekannten Werten von α, δ und A, D nach den sich leicht ergebenden Formeln



$$\text{Co}\ {}^1/_2\ c = \text{Co}\ {}^1/_2\,(\delta - D) \cdot \text{Co}\ \varphi \qquad \text{Si}\ Q = \text{Si}\,(A - \alpha) \cdot \text{Co}\ \delta \cdot \text{Cs}\ c \qquad \mathbf{1}$$

wo

$$\text{Si}\ \varphi = \text{Si}\ {}^1/_2\,(A - \alpha) \cdot \text{Se}\ {}^1/_2\,(\delta - D) \cdot \sqrt{\text{Co}\ \delta \cdot \text{Co}\ D} \qquad \mathbf{2}$$

ist, successive c und Q berechnen. Ergiebt sich hiebei $c = 90^o + \varepsilon$, so ist gewissermassen ε der Fehler der Hypothese, und es ist Q nach einem in der Distanz m und der Position β liegenden benachbarten Punkte Q_1 zu verschieben, so dass sehr nahe

$$\varepsilon = m \cdot \text{Co}\,(\beta - Q) = x \cdot \text{Si}\ Q + y \cdot \text{Co}\ Q \qquad \mathbf{3}$$

wo

$$x = m \cdot \text{Si}\ \beta \qquad y = m \cdot \text{Co}\ \beta \qquad \mathbf{4}$$

Indem nun **Houzeau** die 3 für jeden der 33 Punkte aufschrieb und sodann die Normalgleichungen für x und y bildete, erhielt er $x = -59',6$, $y = -150',8$ und sodann nach $4: \beta = 201^o\ 54'$, $m = 162'$, folglich als neue Coordinaten des Poles der galaktischen Ebene

$$D_1 = D + m \cdot \text{Co}\ \beta \qquad = 28^o,8 \qquad \mathbf{5}$$

$$A_1 = A - m \cdot \text{Si}\ \beta \cdot \text{Se}\ D = 12^h\ 44^m,5 \qquad \mathbf{6}$$

ein Resultat, das durch eine von **Schönfeld** (Astr. Viert. 16 von 1881) unternommene Kontrolrechnung nahe bestätigt worden ist. — *b.* Als **Houzeau** die Sterne seiner „Uranometrie“ nach neun je 20° breiten, der galaktischen Ebene parallelen Zonen ordnete, erhielt er nämlich das Tableau

Zonen	Anzahl bei Grösse						Gesamtzahl	Dichte
	1	2	3	4	5	6		
Nordzone	0	1	4	8	42	86	141	0,113
70—50°	3	6	18	42	74	295	438	122
50—30	1	4	21	70	148	439	683	124
30—10	4	7	34	114	190	625	974	145
Mittelzone	7	11	46	108	243	730	1145	160
10—30	3	11	34	111	257	619	1035	154
30—50	0	7	28	65	141	465	706	129
50—70	2	2	13	65	81	281	444	124
Südzone	0	2	2	12	37	100	153	123
Summe	20	51	200	595	1213	1640	5719	—

welches, abgesehen von seinem unmittelbaren Interesse, den erwähnten Nachweis auf das Schönste liefert.

594. Die Sternphotographie. — Nachdem es den beiden **Bond** schon in den Fünfzigerjahren gelungen war, von einzelnen hellen Sternen Daguerreotypbilder zu erhalten, machte bald auch die Photographie auf diesem Gebiete rasche Fortschritte, ja man hatte bereits den **Rutherfurd**, **Gould**, etc., ganz gute und im Vergleiche mit den frühern Aufnahmen fast mühelos erhaltene Bilder verschiedener Sternhaufen zu verdanken, welche nun hinwieder die **Pickering**, **Gill**, etc., veranlassten, eine photographische Aufnahme des ganzen Himmels anzustreben [a]. Letzterer Gedanke wurde dann namentlich auch von Admiral **Mouchez** aufgenommen: Schon 1885 legte er der Pariser Akademie eine von den Brüdern **Henry** angefertigte Probe vor, und es geschah auf seinen Wunsch, dass die Akademie im Frühjahr 1887 einen internationalen astronomischen Kongress nach Paris einberief, um die Anhandnahme einer solchen Riesenarbeit unter Kooperation verschiedener Sternwarten zu beraten, und infolge dieser Beratung auch wirklich zu beschliessen, sowie eine Kommission zur Leitung derselben niederzusetzen. Die Vorarbeiten sind bereits im Gange und es unterliegt kaum mehr einem Zweifel, dass das grosse Werk in absehbarer Zeit vollendet und reiche Früchte tragen wird [b].

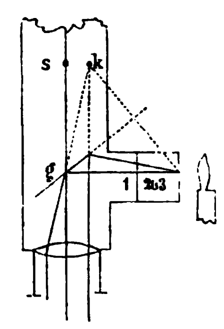
Zu 594: *a.* Der erste Versuch von Cranch **Bond** datiert von 1850 VII 17, wo J. A. Whipple unter seiner Direktion in den Brennpunkt des 15-Zöllers von Cambridge (U. S.) eine empfindliche Daguerreotypplatte brachte und so ein Bild der Wega erhielt; diesem ersten folgten dann weitere Versuche, an welchen sich auch der Sohn George **Bond** beteiligte, und 1857 IV 27 in 8ˢ von dem Doppelsterne ζ Ursæ majoris bereits eine so scharfe Abbildung empfing, dass sie Distanz und Position des Begleiters abzumessen erlaubte. — Im Jahre

1865 gelang es Lewis Morris **Rutherfurd** (Morrisania in New-York 1816 — Tranquillity in New-Jersey 1892; Privatastr. New-York), in 3 bis 4^m ein gutes photographisches Bild der Pleyaden zu erhalten, und bald wetteiferten auch **Gould** und andere mit ihm in Aufnahmen solcher Gebilde. — Edward Charles **Pickering** (Boston 1846 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Harvard College) begann wirklich 1883 zu Cambridge (U. S.) eine solche Aufnahme, die sich aber nur auf die dem freien Auge sichtbaren Sterne erstreckte und zunächst für Vergleichungen mit photometrischen Messungen bestimmt war, — während die etwas später von David **Gill** (Savock in Aberdeenshire 1843 geb.; Astron. Roy. am Kap) unternommene die Sterne bis zur 9. Grösse umfassen und zur Erstellung eines der „Durchmusterung" entsprechenden Sternkataloges des Südhimmels dienen sollte. — *b.* Die von Ernest-Amédée-Barthélémy **Mouchez** (Madrid 1821 — Paris 1892; Contre-Admiral und Dir. Obs. Paris) 1885 V 11 der Pariser Akademie vorgelegte Probe der Leistungen der **Henry** gab auf einem Quartblatte von 25^{cm} Seite 2790 Sterne von 5.—14. Grösse und war in 1^h erhalten worden. Dabei teilte er mit, dass für Sterne 1. Gr. nur eine Expositionszeit von $0^s,01$ erforderlich sei, dann aber für kleinere Sterne zwar zuerst langsam ($0^s,5$ für 6. Gr., 20^s für 10. Gr.), nachher aber rasch (2^m für 12. Gr., 10^m für 14. Gr., $1^1/_2{}^h$ für 16. Gr.) ansteige, — dass auf einer andern Karte Henrys sich Pallas als feiner Strich von den die Sterne bezeichnenden Punkten abhebe, — etc. — Auf dem Kongresse wurde allgemein die Nützlichkeit einer solchen Arbeit anerkannt, aber auch die Schwierigkeit betont, dieselbe in absehbarer Zeit zu erledigen; denn rechnet man auf zwei Quadratgrade ein Cliché und zieht die Notwendigkeit in Betracht, jede Aufnahme wenigstens noch einmal zu wiederholen, so kömmt man etwa auf 50000 Clichés, von welchen Eine Sternwarte jährlich kaum mehr als 300 liefern könnte. Wollte man ferner nach diesen Aufnahmen, welche zusammen bei 30 Millionen Sterne ergeben dürften, deren Abnahme von den Clichés kaum zu bewältigen wäre, einen Sternkatalog anlegen, so würde dieser nach Berechnung von **Weiss** bei 100 starke Quartbände füllen, und es dürfte die äusserste Grenze des Erreichbaren ein Katalog der circa 3 Millionen Sterne der Grössen 1—11 sein. — Für weitern Detail über diesen Gegenstand verweise ich teils auf frühere Angaben, teils auf: „**Janssen,** Les Méthodes en Astronomie physique (Ann. Bur. d. long. 1883), — O. **Struve,** Die Photographie im Dienste der Astronomie. St. Petersburg 1886 in 8., — **Pickering,** An investigation in Stellar Photography conducted at the Harvard College Observatory. Cambridge 1886 in 4., — **Mouchez,** La photographie astronomique à l'Observatoire de Paris et la carte du ciel (Ann. Bur. d. Long. 1887), — **Gill,** Les applications de la photographie à l'astronomie (Bull. astr. 1887), — N. v. **Konkoly,** Praktische Anleitung zur Himmelsphotographie. Halle 1887 in 8., — **Rayet,** Notes sur l'histoire de la photographie astronomique (Bull. astr. 1887 und: Annal. Bordeaux 1889), — A. G. **Winterhalter,** The international astro-photographique Congress, and a visit to certain european Observatories and other Institutions. Washington 1889 in 4., — etc."

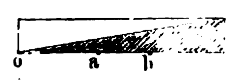
595. Die Sternphotometer. — So trefflich für die relative Grössenbestimmung der zahlreichen und alle möglichen Abstufungen repräsentierenden kleinern Sterne die früher (285) besprochene Argelander'sche Methode der Sternvergleichungen ist, so

nötig wird es, durch photometrische Messungen eine Anzahl absoluter Bestimmungen zu gewinnen und auch die Sterne der ersten Grössenklassen anzuschliessen, für welche jene Methode ganz unzureichend ist [a]. Es sind hiefür nun wirklich in der neuern Zeit durch die **Steinheil, Schwerd** und **Zöllner** wirksame **Sternphotometer** konstruiert worden, ja die Erfahrung hat bewiesen, dass bei gehöriger Vorsicht auch mit einem dafür früher schon vorgeschlagenen, aus weissem und neutralem Glase bestehenden Doppelkeil, ganz hübsche Resultate erhalten werden können [b].

Zu 595: *a.* Schon John **Herschel** versuchte dem freien Auge in der Weise etwelche photometrische Hilfe beizugeben, dass er mittelst einer kleinen Linse ein sternartiges Bild Jupiters erzeugte, — für verschiedene Sterne die Stellungen des Auges aufsuchte, für welche sie gleich hell wie jenes Bild erschienen, — und dann ihre Helligkeiten den Quadraten der nötigen Distanzen proportional setzte. Vgl. seine „Outlines (Ed. 1866, pag. 567)". — *b.* **Steinheil** ging für sein Photometer (vgl. seine von der Göttinger Akademie gekrönte Abhandlung „Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel. München 1836 in 4.)" von dem Principe aus, dass die von einem Sterne auf das Objektiv eines Fernrohrs auffallenden Strahlen nach ihrem Durchgange durch dasselbe einen Doppelkegel bilden, dessen Scheitel im Brennpunkte liege, — und dass, wenn man durch Verstellen des Okulares gegen den Brennpunkt das Licht der Sterne gewissermassen ausbreite, man eigentlich nur verschiedene Durchschnitte dieses Kegels sehe, deren Lichtmenge immer dieselbe sei, während die Intensität im umgekehrten Verhältnisse der Fläche stehe, somit die Helligkeit des Sternes dem Quadrate seines sog. „Lichtflächendurchmessers" oder der Verschiebung des Okulares aus seiner Normallage proportional sei. Er schlug darum vor, durch Bisection des Objektives und Verbindung seiner unabhängig voneinander beweglichen Hälften mit drehbaren Spiegeln, zu ermöglichen, die Bilder zweier Sterne auf derselben Ebene nebeneinander auszubreiten: Es genügt alsdann, die Stellungen solange zu verändern, bis die Intensitäten der Bilder gleich werden, und die dafür nötigen Verschiebungen zu messen, um das Helligkeitsverhältnis der beiden Sterne berechnen zu können. — Ein von **Schwerd** konstruiertes Photometer scheint nie öffentlich beschrieben worden zu sein; dagegen kann ich nach einer seinerzeit durch **Schönfeld** erhaltenen Notiz mitteilen, dass es aus einem parallaktisch montierten Fernrohr besteht, welchem ein zu demselben in jede beliebige Position zu versetzendes Hilfsrohr beigegeben ist, dessen Bilder durch Prismen in das Gesichtsfeld des Hauptfernrohrs verlegt werden: Das Hilfsfernrohr enthält eine verschiebbare Kollektivlinse, so dass der durch Reflexion gesehene Stern nicht nur durch aufgesetzte Blenden mit dem direkt Gesehenen auf gleiche Helligkeit, sondern auch auf gleiche Scheibengrösse gebracht werden kann. — Am bekanntesten und verbreitetsten ist das durch **Zöllner** konstruierte und in seiner Schrift „Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels. Berlin 1861 in 4." ausführlich beschriebene Photometer, welches nach **Schönfeld** den zwei vorbeschriebenen auch wirklich überlegen ist: Es beruht auf Vergleichung eines Sternes (s) (vgl. folg. Figur) mit einem künstlichen Sterne (k), welcher durch eine seitliche Flamme erzeugt wird, deren Licht durch drei Nicol'sche Prismen (vgl. Zus. 65) geht, von welchen Nro. 1 zur optischen Axe des Fernrohrs feststeht, während



2 und 3, zwischen welchen sich eine Bergkristallplatte b befindet, durch Drehung sowohl Intensität als Farbe des Lichtes messbar zu verändern erlauben; der künstliche Stern wird durch eine Glasplatte (g) so reflektiert, dass er neben dem wirklichen Sterne zu stehen scheint. — In der neuesten Zeit hat auch das sog. „Keilphotometer", welches schon Piazzi **Smyth** und **Dawes** ins Auge fassten, namentlich aber E. **Kayser** in Danzig in seiner Note „Ein Photometer zur Bestimmung der relativen Helligkeiten der Sterne (A. N. 1346 von 1862)" eingehend behandelte, Boden gewonnen: Es besteht aus einem Doppelkeile von weissem und neutralem Glase, der in der Bildebene oder vor dem Okulare messbar verschoben werden kann, bis jeder der zwei zu vergleichenden Sterne verschwindet. Bezeichnen A und B deren Helligkeiten, a und b aber die Distanzen der Verschwindungsstellen von dem an der Spitze des neutralen Prismas liegenden Nullpunkte der Scale, so hat man einfach



$$A : B = a : b \qquad \text{oder} \qquad B - A = A\,(b - a) : a \qquad \mathbf{1}$$

zu setzen, und es ist durch die von Charles **Pritchard** (1808? geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Oxford) ausgegebene Abhandlung „Photometric determination of the brighter stars north of the equator (Mem. Astr. Soc. 47 von 1883)" und seine nicht weniger als 2786 Sterne beschlagende „Uranometria nova Oxoniensis (Astr. Obs. Oxford 1885)" der Beweis erbracht worden, dass man bei gehöriger Vorsicht auf diese einfache Weise ganz hübsche Resultate erhalten kann. Ferner bleibt zu erwähnen, dass E. v. **Gothard** (vgl. Z. f. Instr. 1887) das Keilphotometer mit einem Typendruckapparat versehen hat, um den das Auge unsicher machenden Wechsel zwischen beobachten und ablesen zu vermeiden.

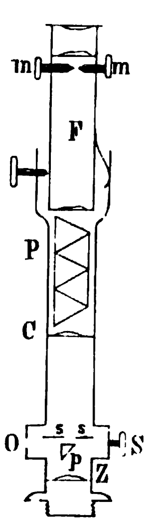
596. Die Ergebnisse der Photometrie. — Die Vergleichung der Resultate der photometrischen Bestimmungen der Helligkeit mit den alten Sterngrössen ergiebt manche interessante Resultate. So folgt z. B., dass ein Stern einer gewissen Grössenklasse uns durchschnittlich $2\frac{1}{2}$ mal weniger Licht zusendet als ein Stern der nächstvorhergehenden Klasse, — dass uns also, da die Anzahl nahe in gleichem Verhältnisse zunimmt (vgl. 592), jede Klasse nahe gleich viel Licht giebt, — dass die Gesamtheit aller Sterne, die wir mit freiem Auge erblicken, eine Helligkeit repräsentiert, die durch circa 200 Sterne erster Klasse geliefert würde, und nur etwa $^1/_{100}$ der Vollmondshelligkeit entspricht, — etc. Für den eigentlichen Detail der Messungen und der auf sie gestützten Betrachtungen muss jedoch hier auf die Speciallitteratur verwiesen werden [a].

Zu 596: *a.* Den bereits im vorhergehenden erwähnten Schriften füge ich noch folgende bei: „Philipp Ludwig **Seidel** (Zweibrücken 1821 geb.; Schüler von Steinheil; Prof. math. München), Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse (Abh. München 1852), und: Resultate

photometrischer Messungen an 208 der vorzüglichsten Fixsterne (Abh. München 1862 und 1870), — Fr. **Zöllner**, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865 in 8., — J. H. **Lindemann**, Beitrag zur Geschichte der Photometer, nebst Angabe einer neuen Methode der Lichtmessung. Breslau 1868 in 8., und: Helligkeitsbestimmungen von Fixsternen mit dem Zöllner'schen Photometer und durch Stufenschätzung (Bull. Pét. 1875), — J. Th. **Wolf**, Photometrische Beobachtungen an Fixsternen. Leipzig 1877 und Berlin 1884 in 4., — B. **Peirce**, Photometric researches (Ann. Harv. Coll. IX von 1878), — W. **Ceraski**, Photometrische Beobachtungen (Ann. Moskau V von 1879, u. f.), — **Pickering**, Photometric researches (Boston Proc. 1880 und Ann. Harv. Coll. XIV von 1882), — J. **Maurer**, Die Extinction des Fixsternlichtes in der Atmosphäre. Zürich 1882 in 8., — Gust. **Müller**, Photometrische Untersuchungen (Publ. Potsd. III 4 von 1883), — C. **Michalke**, Untersuchungen über die Extinction des Sonnenlichtes in der Atmosphäre (A. N. 2691 von 1885), — C. V. L. **Charlier**, Über die Anwendung der Sternphotographie zu Helligkeitsmessungen der Sterne. Leipzig 1889 in 4., — Joh. Baptist **Messerschmitt** (Bamberg 1861 geb.; Ing. schweiz. geod. Komm.), Zur Photometrie der Himmelskörper (Jahresb. phys. Ges. Zürich 1889), — etc."

597. Die Sternspektroskope. — Während **Fraunhofer** zu seinen Versuchen, einige Fixsternspektren zu erhalten, einfach vor dem Objektive eines Fünffüssers ein Prisma befestigt hatte, erreichte schon **Lamont** dadurch eine bedeutend bessere Leistung, dass er das Prisma unmittelbar hinter das Mikrometer seines Refraktors versetzte, und nach der seitherigen Entwicklung der Spektroskopie sind nunmehr auch für speciell astronomische Zwecke noch viel wirksamere Apparate konstruiert worden, von welchen namentlich das von **Merz** gelieferte, an jedem grössern Fernrohr leicht anzubringende „Universalspektroskop" sehr beliebt ist [a].

Zu 597: *a.* Das Merz'sche Universalspektroskop hat wesentlich folgende Einrichtung: Ein kleines Fernrohr (F) mit positivem Okular und Spitzenmikrometer (m) sitzt (zwischen Feder und Schraube gespannt, um dasselbe behufs Verfolgung des Spektrums etwas drehen zu können) vor einem Amici'schen Spektralprisma (P; vgl. 147), hinter dem eine Kollimatorlinse (C) steht, auf welche in ihrer Focalweite die mit einer Schraube (S) zu öffnende oder zu schliessende Spalte (ss) folgt, — dann ein kleines Prisma (p), um durch eine Seitenöffnung (O) einzuführendes Licht zu Vergleichungen anwenden zu können, — zuletzt noch eine in den vom Objektive des Fernrohrs (welchem das Ganze an Stelle des Okulars vorgeschraubt wird) kommenden Lichtkonus etwas eintauchende Cylinderlinse (Z), welche, wenn die Axe des Cylinders in die Prismenebene fällt, die Höhe des Spektrums vergrössern wird. Für Beobachtung der Sonne wird Z entfernt, dagegen für Beobachtung ihrer Protuberanzen zwischen P und C, um die Dispersion noch mehr zu steigern, mit Vorteil ein zweites Spektralprisma eingesetzt. — Für andere Sternspektroskope und über-



haupt für weitern Detail vgl. die in 147 bereits gegebene und in 598 noch etwas vervollständigte Speciallitteratur.

598. Die Ergebnisse der Spektroskopie. — Die von W. A. **Miller** und W. **Huggins** gemeinschaftlich ausgeführten Studien über die Spektren der Fixsterne haben die wichtigen Thatsachen ergeben, dass die Fixsterne im grossen Ganzen eine ähnliche Konstitution wie die Sonne besitzen, dass sich jedoch im Detail ihre Spektren sowohl voneinander als von dem Sonnenspektrum mehr oder weniger unterscheiden [a]. Diese specifischen Unterschiede wurden dann namentlich von **Secchi** eingehend studiert und führten ihn dazu, bei den Sternspektren vier Haupttypen nachzuweisen [b], und seither ist man auch dazu gelangt, die bei den Sternen vorkommenden Farbenunterschiede und Farbenänderungen, sowie auch gewisse Variationen in der Helligkeit, in ziemlich plausibler Weise mit Verschiedenheiten und Veränderungen in den Spektren in Parallele zu setzen. Seit es **Huggins, Draper,** etc. gelungen ist, die Spektren photographisch aufzunehmen, haben diese Untersuchungen begreiflich eine wesentlich grössere Sicherheit erhalten [c].

Zu 598: *a.* Abgesehen von einigen wenigen Andeutungen, welche **Fraunhofer** im Anfange dieses Jahrhunderts bei Anlass seiner früher (147) besprochenen wichtigen Untersuchungen gab, dürfte so ziemlich der 1862 **Janssen** (vgl. die Note zu dessen in 594 erwähnten Artikel „Les méthodes en astronomie physique") gelungene Nachweis des Vorkommens von Natrium auf *α* Orionis als Eröffnung betreffender Untersuchungen auf dem Fixsterngebiete zu betrachten sein. Namentlich war es dann aber allerdings William Allan **Miller** (Ipswich 1817 — Liverpool 1870; Prof. chem. London), der sich sehr eingehend mit solchen Arbeiten beschäftigte, und die von ihm gemeinschaftlich mit W. **Huggins** gemachten 'Studien, deren Resultate letzterer in den Abhandlungen „On the Spectra of some of the fixed stars and nebulæ (Ph. Tr. 1864—68)" niederlegte, trugen diesen beiden Gelehrten mit Recht die goldene Ehrenmedaille der Roy. Astr. Society ein, da sich daraus bereits die oben angeführten wichtigen Tatsachen ergaben. — *b.* Auch **Secchi** beschäftigte sich, wie uns seine Mitteilungen „Sugli spettri prismatici dei corpi celesti. Roma 1868 in 8." und zahlreiche Noten in den Compt. rend. beweisen, vielfach und erfolgreich mit solchen Untersuchungen, und wies unter anderm in den Sternspektren folgende vier Haupttypen nach: **Ein erster Typus** umfasst die sehr zahlreichen bläulichweissen Sterne wie Sirius, Wega, Regulus, etc., und zeichnet sich dadurch aus, dass das Farbenspektrum in rot, an der Grenze von grün und blau, in blau und in violett, vier starke schwarze Linien zeigt, welche den hellen Linien entsprechen, die sich im Spektrum stark erhitzter Wasserstoffgase finden. **Ein zweiter Typus** enthält die gelblichen Sterne Capella, Arktur, Aldebaran, etc., und zeigt Spektren, welche demjenigen der Sonne analog sind. **Ein dritter Typus**, welchem die rötlichen Sterne *α* Scorpii, *α* Orionis, 0 Ceti, etc. angehören, zeigt ausser den gewöhnlichen dunkeln Linien noch ein sog. „Säulenspektrum", d. h. „un grand nombre de bandes nébuleuses, qui divisent tout le spectre et en font une espèce de collonade". **Ein vierter Typus** endlich,

welcher sich nur bei einigen kleinen und tiefroten Sternen zu finden scheint, zeichnet sich teils dadurch aus, dass, während beim dritten Typus die hellern Seiten der Säulen nach dem roten zu stehen, sie hier dem violetten zugewandt sind, — voraus aber dadurch, dass in gelb und grün einige helle Linien auftreten. — Die Angemessenheit dieser Klassifikation ist auch von andern Forschern auf diesem Gebiete anerkannt worden: So bezogen sich z. B. die letzten Arbeiten von **d'Arrest** (A. N. 2009, 16, 33, 44 von 1874/5) auf „Auffindung neuer ausgezeichneter Sternspektren von III. und IV. Secchi'schen Typus", — und wenn H. C. **Vogel** in der von ihm mit G. **Müller** veröffentlichten Abhandlung „Spectroscopische Beobachtungen der Sterne bis einschliesslich 7,5^ter Grösse in der Zone von — 1° bis + 20° Deklination (Publ. Potsd. III 3 von 1883)" bei Mitteilung der Spektren von 4051 Sternen dieselben in drei (auch in unserer Tab. X^b benutzte) Klassen mit Unterabteilungen ordnet, von welchen die erste Klasse ausser I a = Secchi I noch I b und I c, die zweite ausser II a = Secchi II noch II b enthält, während die dritte unter III a = Secchi III und III b = Secchi IV die zwei letzten Typen von Secchi zusammenfasst, so hat er damit offenbar dessen System nicht umgestossen, sondern nur etwas weiter ausgebaut. — *c.* Fassen wir die Hauptergebnisse zusammen, so scheint sich zu ergeben, dass die Sterne im allgemeinen eine ähnliche Konstitution wie die Sonne haben dürften: Ihr Licht scheint von einer intensiv weissglühenden Masse auszugehen und eine Atmosphäre von absorbierenden Dämpfen zu durchlaufen, welche dunkle Streifen erzeugen, die z. B. bei α Orionis das Vorkommen von Natrium, Magnesium, Calcium, Eisen und Wismuth andeuten, — jedenfalls im allgemeinen nicht unserer Atmosphäre zur Last fallen, da James **Glaisher** (London 1809 geb.; bis 1874 Superint. magn. and met. Depart. Greenwich) bei seinen Ascensionen fand, dass das Spektrum und die Fraunhofer'schen Linien an Ausdehnung, Zahl und Schärfe zunehmen, je höher man steigt. Wenn in dem Spektrum eines Sternes sich nur feine und gleichmässig verteilte dunkle Streifen zeigen, so werden wir ihn weiss sehen; wenn dagegen z. B. in dem Roten und Blauen starke Streifen sind, so wird das Gelbe dominieren oder der Stern gelb erscheinen: So besteht der Doppelstern β Cygni aus einem orangen Hauptsterne und einem blauen Begleiter, und entsprechend hat das Spektrum des erstern seine Hauptstreifen im Blauen und Violetten, dasjenige des letztern dagegen im Gelben, Orangen und Roten. Man darf also wohl die Vermutung aussprechen, dass Farbenänderung mit einer andern Verteilung der Streifen, Glanzänderung mit einem Wechsel in der Häufigkeit und Dicke derselben zusammenhängen möchten, — nur darf man dabei nicht übersehen, dass damit die eigentliche Ursache nicht erkannt ist, sondern gewissermassen nur für eine Unbekannte eine andere eingeführt wird. — Für die spektroskopische Bestimmung der Bewegung der Sterne in der Gesichtslinie auf 614 verweisend, füge ich zur Ergänzung der Litteratur noch folgende Schriften bei: „W. **Klinkerfues**, Die Principien der Spektral-Analyse und ihre Anwendung auf die Astronomie. Berlin 1879 in 8., — Charles **Fievez** (Brüssel 1844 — ebenda 1890; Obs. Brüssel), Bibliographie des ouvrages, mémoires et notices de spectroscopie qui peuvent intéresser les astronomes (Annuaire Brux. 1879), — W. **Huggins**, On the photographic spectra of stars (Ph. Tr. 1880), — N. C. **Dunèr**, Sur les étoiles à spectre de la 3e classe. Stockholm 1885 in 4., — N. v. **Konkoly**, Handbuch für Spectroscopiker. Halle 1890 in 8., — Julius **Scheiner** (Köln 1858 geb.; Obs. Potsdam), Die Spectralanalyse der Gestirne. Leipzig 1890 in 8., — etc."

599. Einige Sagen von neuen Sternen. — Schon aus früherer Zeit haben sich einzelne Berichte erhalten, dass am Himmel plötzlich neue Sterne aufgetaucht und nach relativ kurzem Leuchten wieder verschwunden seien; aber alle diese Angaben wurden in das Gebiet der Sage verwiesen, bis gegen Ende des 16. und zu Anfang des 17. Jahrhunderts dieselben durch neue Erscheinungen dieser Art, welche unter der nächstfolgenden Nummer behandelt werden sollen, rehabilitiert wurden [a].

Zu 599: *a.* So glaubte man einen neuen Stern gesehen zu haben

134 v. Chr. im Scorpion zwischen β und ϱ; nach chinesischen Berichten. Es ist dies wahrscheinlich der auch von Hipparch (200) gesehene Stern.
123 n. Chr. zwischen α Herculis und α Ophiuchi; nach chinesischen Berichten.
173 zwischen α und β Centauri; nach chinesischen Berichten. Derselbe soll XII 7 erschienen und 8 Monate später wieder verschwunden sein.
369 von III—VIII; ohne Angabe der Lage.
386 von IV—VII zwischen λ und φ Sagittarii; nach chinesischen Berichten.
389 nahe α Aquilæ, drei Wochen lang; von Cuspinian beobachtet.
393 III im Schwanze des Scorpions; nach chinesischen Berichten.
827, oder doch wenigstens in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts unter der Regierung von Almamun, im Scorpion.
945 zwischen Cepheus und Cassiopeia; nach Leovitius.
1006 Anfang Mai und von da während 3 Monaten im Zeichen des Scorpions; nach dem Zeugnisse des Arabers Ibn **Abathir** (gest. 1233) und des St. Galler Mönches **Hepidannus.**
1203 im Schwanze des Scorpions; nach chinesischen Berichten.
1217 im Herbst in der Krone; nach deutschen Chroniken.
1230 Mitte XII bis 1231 III im Ophiuchus; nach chinesischen Berichten.
1264 zwischen Cepheus und Cassiopeia; nach Leovitius.

600. Die neuen Sterne von 1572 und 1604. — Über die neuen Sterne von 1572 und 1604 ist das wesentlichste schon früher (287) mitgeteilt worden, so dass nur noch einiger Detail nachzutragen bleibt und auch zu erwähnen ist, dass sich **Pigott** grosse, wenn auch mutmasslich vergebliche Mühe gab, deren periodisches Auftreten nachzuweisen [a].

Zu 600: *a.* Natürlich war **Tycho** nicht der einzige, ja er war nicht einmal der erste Beobachter des Wundersternes von 1572; denn wenn man auch der vereinzelten, von **Hageccius** in seine „Dialexis de novæ et prius incognitæ stellæ apparitione. Francof. 1574 in 4." aus einem Briefe von Paul **Fabricius** aufgenommenen Angabe, es sei die Nova schon Ende Oktober gesehen worden, kein Gewicht beilegen will, so findet sich in den von Bernhard **Lindauer** (Bremgarten 1520 — Winterthur 1581; Pfarrer in Winterthur) hinterlassenen „Annalibus" die ganz bestimmte Angabe: „A. 1572 den 7. Nov. ist am himmel ein neuwer grosser heiterer stern gesehen worden zu Winterthur, gleich ob dem haubt Cassiopeæ", und überdies weiss man aus der von Fr. **Maurolykus** verfassten (allerdings mutmasslich nur in den von Clavius in seinen Kommentar zu Sacrobosco aufgenommenen Auszügen teilweise erhaltenen) Schrift „Judicium

de nova stella", dass dieser den neuen Stern von XI 8 hinweg regelmässig beobachtete, während die erste Wahrnehmung durch **Tycho** erst von XI 9 datiert. Dagegen bleibt letzterer unbedingt als Hauptbeobachter bestehen und seine Schrift „De nova stella. Hafniæ 1573 in 4. (auch mit vielen Zusätzen in den 1602 zu Prag ausgegebenen ersten Teil seiner Progymnasmata aufgenommen)" wird für alle Zeiten die Hauptquelle für diese merkwürdige Erscheinung bilden, wenn auch für den Detail einige andere der damals erschienenen zahlreichen Gelegenheitsschriften einiges Interesse bieten mögen, wie z. B. „Corn. **Gemma**, Stellæ peregrinæ jam primum exortæ et caelo constanter haerentis φαινόμενον vel observatum divinæ providentiæ vim et gloriæ majestatem abunde concelebrans. Lovanii 1573 in 4. (soll die Behauptung enthalten, man habe den Stern XI 8 noch nicht, sondern erst XI 9 gesehen), — C. **Leovitius**, Judicium de nova stella A. 1572. Lauingen 1573 in 4. (er sah den Stern erst XI 25 und schrieb 1573 II 20: „Er ist an einem ort bliben vast zwee ganzer Monat. Es gedunkt mich aber, er sey jetzund innerhalb eines Monats bei 3 Grad gegen Cepheus fortgangen"), — Dav. **Chytræus**, De stella inusitata et nova quæ A. 1572 mense Nov. conspici coepit et de Cometa A. 1577. Rostoch 1577 in 4. (sah die Nova schon XI 8), — etc." Noch bleibt beizufügen, dass man schon während der Sichtbarkeit der Nova daran dachte, sie mit den in 599 erwähnten Sternen von 945 und 1264 zu identifizieren, — dass sodann wieder **Keill** an eine Periode von circa 300 Jahren dachte, indem er 1721 in seiner „Astronomy" aussprach, es dürfte der Stern von 1572 in 150 Jahren (also 1871) wiederkehren, — dass später Edw. **Pigott** nicht nur diesen Gedanken, sondern überhaupt die Periodicität festhielt, schon 1782 für die Gegend der Nova eine detaillierte Sternkarte entwarf und von Zeit zu Zeit wieder mit dem Himmel verglich, ohne jedoch Veränderungen zu bemerken, — und dass endlich **Argelander** (A. N. 1482 von 1864) aus den Tychonischen Bestimmungen für die Nova eine Position ($0^h\ 1^m\ 52^s,4$ und $61^0\ 46'\ 23''$ für 1573; $0^h\ 17^m\ 19^s,8$ und $63^0\ 23'\ 55''$ für 1865) erhielt, welche innerhalb ihrer Unsicherheit mit derjenigen ($0^h\ 17^m\ 18''$ und $63^0\ 22',9$ für 1865) eines von **d'Arrest** aufgefundenen Sternchens 10. 11. Grösse übereinstimmt. — Die Nova von 1604 scheint zuerst zu Prag 1604 IX 30 a. St. durch den Böhmen Johannes **Brunowski** gesehen worden zu sein. Er machte sofort seinen Lehrer **Kepler** darauf aufmerksam, der nun den Stern ebenfalls beobachtete, aber ihn zuerst für einen Kometen hielt, und eine von 1605 II 20 datierte „Epistola de Cometa 1604 ad Barth. Scultetum" in Druck legen liess, der dann aber im folgenden Jahre die Hauptschrift „De stella nova in pede Serpentarii. Pragæ 1606 in 4." folgte. Von übrigen betreffenden Publikationen erwähne ich noch „Dav. **Fabricius**, Bericht vom grossen newen wunder-stern des 1604 Jahres. Hamburg 1605 in 4. (sah die Nova zuerst 1604 X 1 a. St.)". Ferner ist beizufügen, dass der Stern von 1604 mit denjenigen der Jahre 123 und 1230 identifiziert werden wollte, woraus sich eine Periode von etwa 370^a ergeben würde, — dass **Pigott** auch für ihn eine Specialkarte entwarf, aber ebenfalls keine Veränderungen konstatieren konnte, — und endlich dass **Schönfeld** fand, er müsste $1855,0 + t$ die Position $17^h\ 21^m\ 57^s,1 + 3^s,586 \cdot t$ und $-21^0\ 21',2 - 0',055 \cdot t$ besitzen.

601. Einige spätere neue Sterne. — Zwischen die beiden so gut konstatierten neuen Sterne von 1572 und 1604 fallen noch einige, wenn auch nicht so sichere und glänzende Erscheinungen solcher Art, und ebenso hat man seit 1604 und bis auf die Gegen-

wart wiederholt neue Sterne aufgefunden, ja solche in der neuesten Zeit erfolgreich mit dem Spektroskope beobachtet [a].

Zu 601: *a.* Zwischen die neuen Sterne von 1572 und 1604 fallen nämlich noch Erscheinungen:

1578 nach chinesischen Beobachtungen; ohne Ortsangabe.

1584 VII 1 nach chinesischen Beobachtungen; unweit π Scorpii.

1600 VIII 18 nach Will. **Blaeu**; ein Stern 3. Gr. im Halse des Schwans. Er wurde auch von **Bayer** als 34 Cygni in seine Uranometrie eingetragen, fehlt dagegen nach **Kepler** (vgl. dessen der vorerwähnten Schrift von 1606 beigegebene „Narratio de stella in Cygno") auf dem von **Bürgi** kurz zuvor verfertigten und sorgfältig mit dem Himmel verglichenen Globus. Später sah man diesen, jetzt als P Cygni bezeichneten und im zweiten Schönfeld'schen Verzeichnisse (vgl. 605) als Nro. 124 aufgeführten Stern einige Jahre ziemlich konstant in 3. Grösse; dann nahm er an Helligkeit ab, — verschwand 1621, — wurde 1655 von **Cassini** während kurzer Zeit wieder in 3. Gr. gesehen, — erschien 1665 neuerdings **Hevel**, aber ohne die 3. Gr. zu erreichen, — nahm dann wieder ab, bis er zwischen 1677 und 1682 die 6. Gr. erreichte und ist seither ziemlich stationär geblieben. Die von **Pigott** vermutete Periode von etwa 18^a ist nicht haltbar.

Nach 1604 wurden im 17. Jahrhundert noch zwei neue Sterne gesehen:

1609 nach chinesischen Berichten; ohne Ortsangabe.

1670 VI 20 von Pater **Anthelme** „de la Chartreuse de Dijon" in 3. Gr.; nahe β Cygni am Kopfe des Fuchses. Nach einigen Monaten war er verschwunden, wurde dann aber von **Cassini** 1671 III—IV wieder in 4. Gr. und 1672 III 29 nochmals in 6. Gr. gesehen, — seither dagegen nie mehr.

Aus dem 18. Jahrhundert ist keine einzige solche Erscheinung zu verzeichnen, während dagegen aus dem laufenden Jahrhundert bis jetzt folgende sieben neue Sterne aufzuzählen sind:

1848 IV 28 wurde durch **Hind** ein solcher 5. Gr. im Ophiuchus gesehen, der nach etwa zwei Jahren nur noch 11. Gr. besass und seither stationär geworden ist. Er wurde namentlich auch durch Karl **Lichtenberger** (Wetzlar 1796 — Trier 1883; Beamter zu Neunkirchen bei Saarbrück und Besitzer eines Obs.) fleissig beobachtet.

1860 V 21 sah **Auwers** einen sich auf den nebligen Sternhaufen 80 Messier im Scorpion projizierenden Stern 7. Gr., der drei Tage vorher noch unsichtbar war; er verlor jedoch diese Grösse rasch wieder, — löste sich schon VI 16 von dem umgebenden Nebel nicht mehr ab, — und ist seither nie mehr sichtbar geworden.

1866 V 4 sah G. F. **Barker** in Kanada etwas unterhalb ε Coronæ einen Stern 4. Gr., der sodann V 10 die 2. Gr. erreichte, in der ihn V 12 auch John **Birmingham** (Tuam in Irland? 1816 — Millbrock 1884; für seine Abh. „The red stars" in Dublin Tr. 1877 und verwandte Arbeiten mit der Cunnigham-Medaille bedacht) und V 13 Jul. **Schmidt** sahen; V 16 besass er nur noch 4. Gr. und V 30 gab ihm **Heis** 8. 9. Gr.; seither ist er stationär 9. 10. Gr. geblieben und wohl identisch mit Nro. 2765 der Zone $+26^0$ des Bonner Sternverzeichnisses.

1876 XI 24 wurde von **Schmidt** bei ϱ Cygni ein Stern 3. Gr. gesehen, der

dann rasch abnahm, so dass ihm **Cornu** XII 2 nur noch 5. Gr. beilegte; zu Anfang 1877 war er etwa 8. Gr., 1878 noch 10. 11. Gr., und ist jetzt nur noch in sehr starken Fernröhren sichtbar. In der „Durchmusterung" fehlt er, so dass er auch früher die 9. 10. Gr. kaum erreichte.

1885 VIII 31 beobachtete **Hartwig** eine sich nahe auf die Mitte des grossen Andromeda-Nebels lagernde Nova von eigentümlicher Natur. Vgl. A. N. 2678 von 1885, und Clerke „System of stars (104 f.)" in 606.

1885 XII 13 bemerkte J. E. **Gore** in der Nähe von χ Orionis einen in den Bonner Karten fehlenden rötlichen Stern, welchen XII 17 auch Ralph **Copeland** (Woodplumpton in Lancashire 1837 geb.; damals Obs. Dun. Echt, jetzt Dir. Obs. Edinburgh) auffand. Bis Mitte 1886 ging er von 6. Gr. bis 12. Gr. hinab, um dann wieder zuzunehmen.

1892 I 23 wurde durch Th. D. **Anderson** in Edinburgh eine Nova 5. 6. Gr. im Fuhrmann aufgefunden, von der sich auf einer 1891 XII 8 durch **Max. Wolf** aufgenommenen Photographie jener Gegend noch keine Spur zeigte, so dass sie damals nicht 8. Gr. besitzen konnte; sie wurde seither vielfach beobachtet und hat bereits (602) höchst merkwürdige Eigentümlichkeiten ergeben. Nachdem ihr Glanz längere Zeit nur unbedeutende Variationen gezeigt hatte, nahm sie gegen Mitte März rasch bis zur 9., bis Ende März 1892 sogar bis zur 14. Gr. ab. Seither wurde sie wieder heller.

Über die Ergebnisse der spektroskopischen Untersuchung der letztern dieser Sterne vgl. die folgende Nummer.

602. Die gegenwärtigen Ansichten. — Dass man es bei den sog. neuen Sternen mit wirklich neuen Schöpfungen zu thun habe und dass dieselben nach kurzer Existenz wieder in das Nichts zurücksinken, ist ein längst überwundener Standpunkt; dagegen blieb die Frage, **ob** bei diesen Sternen nur, wie bei den unter den folgenden Nummern zu behandelnden Veränderlichen, ein periodischer Lichtwechsel vorhanden sei, oder **ob** ihr plötzliches Aufleuchten mit einer Katastrophe zusammenhänge, bis nach der Mitte des laufenden Jahrhunderts eine ganz offene, und erst in der allerneuesten Zeit, wo bei einigen solchen Erscheinungen das Spektroskop beraten werden konnte, hat die zweite Ansicht entschieden den Vorsprung gewonnen [a].

Zu 602: *a.* Bei der Nova von 1866 (T. Coronæ), zu deren Beobachtung das Spektroskop zum erstenmal zur Verwendung kam, erhielt **Huggins** ein kontinuierliches Spektrum, das einerseits von zahlreichen dunkeln oder Absorptionslinien durchzogen war, wie sie die Sonne und die meisten Sterne ergeben, aber anderseits auch einige helle Linien zeigte, deren Lage andeutete, dass sie von glühendem Wasserstoffe herrühren, — es war also die Annahme nahe gelegt, es habe auf dem Sterne eine ungeheure Eruption glühenden Wasserstoffes stattgefunden, durch welche die Oberfläche des sonst nur schwach leuchtenden Sternes plötzlich beträchtlich erhitzt und hellstrahlend geworden sei. Mit der allmäligen Ausstrahlung der Wärme in den Weltraum musste dann auch die Helligkeit der erhitzten Oberfläche wieder stetig schwinden, bis endlich die letzten Spuren der Eruption verschwunden waren und der Stern in seinen frühern Zustand zurückkehrte. — Ähnliches ergab die spektroskopische

Untersuchung der Nova von 1876: **Vogel** und **Lohse** fanden nämlich in Übereinstimmung mit **Cornu** und **Copeland** das kontinuierliche Spektrum von starken Absorptionsstreifen durchzogen, aber ausserdem auch mehrere helle Linien, von welchen drei jedenfalls dem Wasserstoffe, andere nach Ch. **Wolf** (vgl. Compt. rend. 1885) dem Natrium und Magnesium angehörten, während eine mit der grünen Linie der Nebel übereinstimmte. Das kontinuierliche Spektrum, und damit die Helligkeit, nahm ziemlich rasch ab, — die hellen Linien dagegen blieben bis in das Frühjahr 1877 hinein sichtbar, — zuletzt noch die grüne, was **Wolf** (l. c.) mit den Worten hervorhob: „L'étoile du Cygne ne donne plus que la ligne verte des nébuleuses, singulier exemple de la transformation d'une étoile dans une nébuleuse planétaire." — Die Nova Orionis von 1885 dagegen besass in ihrem Spektrum nach **Wolf** (l. c.) keine helle Linien, sondern dasselbe stimmte wesentlich mit demjenigen der Mira (603) überein, so dass in ihr wohl ein neuer Veränderlicher vorliegt und die Zeit der Entdeckung mit derjenigen eines Maximums übereinkömmt. — Bei der Nova Aurigæ von 1892 endlich zeigten sich, analog wie bei derjenigen von 1876, zwei übereinander liegende Spectra, welche aber nach **Vogel** sehr merklich gegeneinander verschoben erschienen, so dass sie zwei verschiedenen Sternen angehören müssen und derjenige, der die hellen Linien liefert, sich gegenwärtig rasch von uns entfernt.

603. Mira der Wunderbare. — Die Entdeckungsgeschichte des ersten als periodisch veränderlich erkannten Sternes, der **Mira Ceti**, ist in grossen Zügen schon früher (388) gegeben worden, so dass hier nur noch einiger Detail nachzutragen ist [a]. Dagegen bleibt der spätern Beobachtungen zu gedenken, namentlich der durch **Argelander** und seine Schule ausgeführten Arbeiten, durch welche alle betreffenden Verhältnisse ziemlich klar dargelegt worden sind [b].

Zu 603: *a.* David **Fabricius** mass 1596 VIII 3 a. St. die Distanz Merkurs von einem Sterne 2. 3. Gr. am Halse des Walfisches, konnte nachher diesen Stern weder auf seinem Globus noch in einem Sternverzeichnisse finden, — verfolgte ihn nun bis VIII 21 a. St., wo er ihm 2. Gr. und der brieflichen Mitteilung an Tycho würdig erschien, — bemerkte im September eine beträchtliche Glanzabnahme, — konnte den Stern im Oktober gar nicht mehr finden, — und sah ihn nur 1609 nach Mitte Februar noch einmal aufleuchten. Später wurden diese Wahrnehmungen, über welche sich **Fabricius** nur in seiner wenig verbreiteten Schrift von 1605 (vgl. 600) beiläufig äusserte, vergessen, und erst als Johann Foccens **Holwarda** (Holwerden in Friesland 1618 — Franeker 1651; Prof. philos. Franeker) neuerdings auf diesen Stern aufmerksam wurde, erinnerte man sich wieder an dieselben und fand nun auch, dass derselbe Stern 1603 durch **Bayer** in seine Uranometrie aufgenommen worden war. Er wurde nun von 1641—48 durch **Fullenius** und **Jungius**, sodann 1648—62 durch **Hevel**, der darüber in einem Anhange zu seinem „Mercurius in Sole visus A. 1661. Gedani 1662 in fol." Bericht erstattete, wiederholt beobachtet, und letzterer, der infolge konsequenterer Studien den Glanzwechsel genauer feststellen konnte, fand das Verhalten dieses Sternes so merkwürdig, dass er ihm den Namen „Mira der Wunderbare" beilegte. Diese Beobachtungen mit eigenen verbindend, gab hierauf **Boulliau** in seiner Schrift „Ism. Bullialdi ad Astronomos monita duo: primum de stella novâ quæ in collo Ceti ante aliquot annos visa est;

alterum de nebulosâ in Andromeda cinguli parte boreâ, ante biennium iterum ortâ. Parisiis 1667 in 4." eine genaue Beschreibung der Mira, — dabei die Länge der Periode zu 333 Tagen oder circa 11 Monaten bestimmend, jedoch bereits bemerkend, dass sie zwar immer zur Unsichtbarkeit komme, dagegen zur Zeit des grössten Glanzes nicht immer gleich hell werde und dass auch die Länge der Periode etwas variiere. — *b.* Später beobachtete Gottfr. **Kirch** die Mira häufig, zweifelte aber (vgl. seine „Kurze Betrachtung derer Wunder am gestirnten Himmel, welche veranlasst der itzige, recht merkwürdige Komet. Leipzig 1677 in 4.") wegen den bemerkten Unregelmässigkeiten an der Möglichkeit der Erklärung. Auch Frau Margaretha und Sohn Christfried halfen bei diesen Beobachtungen, ja setzten dieselben noch bis 1739 ziemlich regelmässig fort, und ebenso soll sein Zeitgenosse Sam. **Reyher** unsern Stern volle 44 Jahre verfolgt haben, jedoch scheinen seine Aufzeichnungen bis auf einige wenige aus den Jahren 1701—13 verloren gegangen zu sein. — In der neuern Zeit wurde die Mira von den **Wargentin**, W. **Herschel**, **Goodricke**, **Westphal**, **Heis**, **Schmidt**, **Schönfeld**, etc. vielfach beobachtet und studiert, — ganz besonders aber durch **Wurm**, der sie in seiner Note „Mira, der wunderbare Stern im Wallfisch (Z. f. Astr. I von 1816)", unter Beifügung eines Verzeichnisses der frühern Beobachtungen, sehr einlässlich abhandelte, und durch **Argelander**, welcher ihr in seiner Abhandlung „Beobachtungen und Rechnungen über veränderliche Sterne. Bonn 1869 in 4. (Bonn. Beob. VII)" einen Hauptplatz einräumte. Giebt man die Helligkeiten in den durch letztern eingeführten Stufen, so nimmt Mira zur Zeit des Maximums durchschnittlich die Helligkeit 29,5 (γ Ceti = 28,3 und α Ceti = 35,3) an; jedoch schwankt diese Zahl bei den einzelnen Erscheinungen von 20 (δ Ceti = 22,8) bis 47 (β Aurigæ = 40,6). Im Minimum sah man Mira einzelne Male in 9. 10. Gr., andere Male gar nicht, — jedoch sind darüber nur wenige Beobachtungen vorhanden. Die Maxima, deren Distanz von 306 bis 367^d, oder um etwa $\pm$ 9 % schwankt, konnte **Argelander** ziemlich befriedigend durch

$$\begin{aligned} E_x = {} & 1751 \text{ IX } 9{,}76 + x \cdot 331^d{,}3363 + \\ & + 10^d{,}5 \cdot \text{Si}\,(\ 86^0\,23' + x \cdot 360:\ 11) + 18^d{,}2 \cdot \text{Si}\,(231^0\,42' + x \cdot 360:\ 88) + \\ & + 33{,}9\ \cdot \text{Si}\,(170^0\,19' + x \cdot 360 : 176) + 65{,}3\ \cdot \text{Si}\,(6^0\,37' + x \cdot 360 : 264) \end{aligned}$$

darstellen, wo x die Anzahl der seit dem Maximum von 1751 verflossenen Perioden zählt, — doch wich noch das gut beobachtete Maximum von 1840 von dem nach dieser Formel berechneten um volle 25^d ab. Einer Reihe heller Maxima (im Mittel 40,3) ging durchschnittlich eine Periode von $340^d{,}3$ voraus, während eine solche von $326^d{,}6$ folgte, — einer Reihe schwacher Maxima (23,0) eine Periode von $338^d{,}2$ voraus, während eine solche von $339^d{,}0$ folgte; im Mittel aus 43 Bestimmungen ergab sich aus je zwei aufeinander folgenden Maxima eine Periodenlänge von $334^d{,}35$. — Das Spektrum von 0 Ceti gehört dem Typus III a an; seine allfälligen Veränderungen im Verlaufe der Periode (im Sinne von 598) sind meines Wissens noch nicht festgestellt worden.

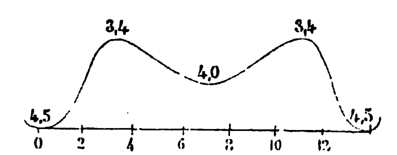
604. Algol und β Lyræ. — Einen ganz andern Verlauf als bei Mira Ceti nimmt der Lichtwechsel bei dem 1669 durch **Montanari** als veränderlich erkannten, aber erst 1782 durch **Goodricke** mit vollem Erfolge untersuchten Sterne β Persei oder Algol, der in unserm Jahrhundert wieder durch die Argelander'sche Schule, voraus durch **Schönfeld**, einlässlich studiert worden ist[a]. Und noch-

mals ein ganz anderer Verlauf zeigt sich bei dem Sterne β Lyræ, der 1784 von **Goodricke** als veränderlich erkannt und in der neuern Zeit namentlich durch **Argelander** bearbeitet wurde [b].

Zu 604: *a.* Algol hat gegenüber der Mira die Eigentümlichkeit, dass er sich gewöhnlich in nahe 2. Gr. zeigt, — dann in der kurzen Zeit von etwa 4^h bis zur 4. Gr. abnimmt, — in dieser circa 15 bis 18^m verweilt, — und dann in neuen 4^h wieder bis zur 2. Gr. zunimmt, um je wieder nach einigen Tagen denselben Wechsel zu beginnen. Seine Veränderlichkeit war schon 1669 durch Gemiano **Montanari** (Modena 1633 — Padua 1687; erst Advokat, dann Prof. math. et astr. Bologna und Padua) bemerkt und in seinem „Discorso academico sopra la sparizione d'alcune stelle ed altre novità scoperta nel cielo. Bologna 1672 in 4." besprochen worden; später hatten **Maraldi** und Christfried **Kirch** dieselbe ebenfalls konstatiert, — aber erst 1782 gelang es John **Goodricke,** den Verlauf der Veränderung genauer zu erkennen und für denselben eine Periode von $2^d\ 20^h\ 49^m = 2^d{,}867$ festzustellen, worüber dessen Mitteilungen „Observations and Period of Algol (Ph. Tr. 1783), und: On the Period of Algol (Ph. Tr. 1784)", sowie die Note seines Freundes **Englefield** „Observations of Algol 1783 (Ph. Tr. 1784)" zu vergleichen sind. Ungefähr gleichzeitig beschäftigte sich auch **Palitzsch,** wie aus einem Brief an Hoffmann (Berl. Jahrb. 1828) und seiner Note „Observations upon Algol (Ph. Tr. 1784)" hervorgeht, mit diesem Veränderlichen, wobei er zu ganz entsprechenden Resultaten kam, — und auch seither ist derselbe vielfach beobachtet und besprochen worden, vgl. z. B. „Dan. **Huber,** Circa phænomena quæ in stella Algol observantur (Nova Acta helv. I von 1787), — **Lalande,** Sur la période de lumière de l'étoile Algol (Mém. Par. 1788), — **Wurm,** Über die Lichtveränderung Algol's (Geogr. Eph. 2 von 1798, Berl. Jahrb. 1801, etc.), — etc." Die Argelander'sche Schule befasste sich ebenfalls vielfach mit Algol, und namentlich hat ihm **Schönfeld** eine Monographie „Der Lichtwechsel des Sternes Algol im Perseus (Mannh. Ber. 36 von 1870)", welche seither in der Dissertation seines Schülers Jul. **Scheiner** „Untersuchungen über den Lichtwechsel Algol's nach den Mannheimer-Beobachtungen von Prof. Schönfeld in den Jahren 1869—75. Bonn 1882 in 8." noch eine Fortsetzung erhalten hat, der seither unter anderm die Note „S. C. **Chandler,** On the period of Algol (Astr. Journ. VII von 1888)" folgte. Speciell erwähne ich, dass Schönfeld für das Algol-Minimum die Formel

$$\text{Epoche } E = 1860\ \text{VI}\ 14{,}3^h\ 24^m{,}11 + 2^d\ 20^h\ 48^m{,}89308 \cdot E' + \\ + 6^m{,}1204 \cdot (E' : 1000)^2 - 2^m{,}0449 \cdot (E' : 1000)^3$$

aufstellte, in welcher E' die seit 1860 VI $14{,}3^h{,}4$ (dem 7700sten Minimum seit 1800 I $1{,}18^h$) verflossenen Perioden zählt. — Ein Algol betreffendes höchst merkwürdiges Ergebnis der Spektroskopie wird vorläufig in 606 angedeutet und sodann in 629 eingehender besprochen werden. — *b.* Die Eigentümlichkeit von β Lyræ besteht darin, dass diesem Stern bei einer Periode von 12,91 Tagen eine Lichtkurve mit zwei Maxima von 3,4 Gr. und zwei Minima von 4,0 und 4,5 Gr. zukömmt. Man verdankt die erste Kenntnis desselben ebenfalls **Goodricke,** der von 1781 hinweg gemeinschaftlich mit **Pigott** nach Veränderlichen suchte, — dabei 1784 auf β Lyræ aufmerksam wurde, — diesen Stern nun sofort konsequenter Beobachtung



unterzog, — und die Ergebnisse in seinen „Observations of a new variable Star (Ph. Tr. 1785)“ veröffentlichte. In der neuern Zeit beschäftigte sich namentlich **Argelander** sehr eingehend mit diesem Sterne, — widmete ihm zwei Abhandlungen „De stella β Lyræ variabili. Bonnæ 1844 und 1858 in 4.“, — und fand unter anderm, dass die Periode von 1784 bis 1855 von $12^d\ 21^h\ 24^m\ 11^s$ auf $12^d\ 21^h\ 47^m\ 16^s$ angewachsen sei.

605. Einige andere Veränderliche. — Die Anzahl der als veränderlich erkannten Sterne ist bereits auf etwa anderthalb Hundert angewachsen, und es kann somit nicht davon die Rede sein, hier jeden einzelnen aufzuführen und zu beschreiben; ich muss mich darauf beschränken, unten noch eine kleine Auswahl zu geben [a], — sodann die im Laufe der Zeiten erschienenen Verzeichnisse aufzuführen [b], — und anhangsweise noch anzumerken, dass einzelne Sterne auch ihre Farbe periodisch zu wechseln scheinen [c].

Zu 605: *a.* Ich führe beispielsweise noch folgende Entdeckungen von veränderlichen Sternen auf:

1686 wurde χ Cygni durch Gottfr. **Kirch** als veränderlich erkannt, später durch **Maraldi** anhaltend beobachtet und (Mém. Par. 1713) einlässlich besprochen. Er hat eine Periode von etwa $403^d,5$ und variiert von 4,0 bis 12,8.

1704 wurde der, jetzt (nach dem Argelander'schen Vorschlage, den sonst nicht bezeichneten Veränderlichen die Buchstaben R, S, T, ... beizulegen) gewöhnlich als R Hydræ aufgeführte Stern, von **Maraldi** als veränderlich erkannt und bis 1712 beobachtet, — dann wieder von 1783 hinweg durch **Pigott**, etc. Er hat eine Periode von 469^d und variiert von 4,0 etwa bis 10.

1782 wurde R Leonis durch J. A. **Koch** entdeckt, anfänglich aber wenig beobachtet. Er hat die Periode $312^d,6$ und variiert von 5,2 bis 10,0.

1784 wurde der Stern η Aquilæ, der schon 1612 durch **Bürgi** als verdächtig bezeichnet worden sein soll, von **Pigott** (vgl. Ph. Tr. 1785) als veränderlich erwiesen. **Argelander** ermittelte für ihn die beistehende Lichtkurve, nach welcher derselbe zwischen 3,5 und 4,7 variiert, und **Schönfeld** setzte für ihn (vgl. den unten erwähnten ersten Katalog) das Minimum auf

$$1848\ \text{V}\ 18,\ 6^h\ 7^m + x \cdot 7^d\ 4^h\ 14^m\ 4^s\ \text{m. Z. Par.}$$

wo x die Anzahl der seit der Epoche von 1848 abgelaufenen Perioden bezeichnet.

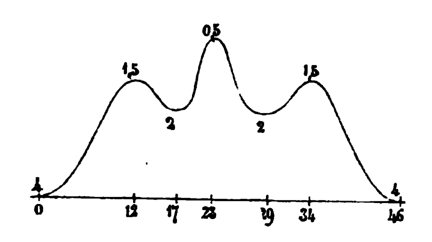
1784 entdeckte **Goodricke** die Veränderlichkeit des Sternes δ Cephei, beobachtete ihn gemeinschaftlich mit **Pigott** und besprach ihn in Ph. Tr. 1786. Seine Periode beträgt $5^d\ 8^h\ 47^m\ 40^s$, — die Variation geht von 3,7 bis 4,9.

1795 fand **Pigott** R Scuti und R Coronæ auf, und besprach sie in Ph. Tr. 1797 und 1805, — letztere Note mit der Bemerkung abschliessend, dass dies wohl seine letzte Mitteilung über Veränderliche sein werde. Für den erstern dieser zwei Sterne erhielt er eine Periode von $71^d,1$ bei einer Variation von 4,7 bis 8,5, — für den zweiten, der ihm schon 1783 verdächtig vorgekommen war, konnte er dagegen keine sichern Werte finden, und auch die Neuzeit behilft sich damit, ihn als „irregulär“ zu bezeichnen.

1795 erkannte W. **Herschel** die Veränderlichkeit von α Herculis; jedoch sind die Veränderungen gering und anscheinend irregulär.

1809 entdeckte **Harding** den jetzt als R Virginis bezeichneten Veränderlichen, der bei einer Periode von $145^d,7$ von 6,5 bis 10,9 variiert.

1827 wurde durch **Burchell** der schon lange verdächtige Stern η Argus unter die Veränderlichen eingereiht; aber bis jetzt konnte, zumal längere und zusammenhängende Beobachtungsreihen fehlen, das Gesetz seines Lichtwechsels nicht erkannt werden, so dass man es geraten fand, ihn ebenfalls mit der Bezeichnung „irregulär" abzufertigen. Ein von mir 1863 unternommener Versuch, seine Erscheinungen durch beistehende Lichtkurve, deren Hauptmaximum (bei einem Lichtwechsel von 0,5 bis 4,0) auf $1746 \pm x \cdot 46^a$ fallen würde, darzustellen, schien zwar den vereinzelten Angaben von Petrus **Theodorus** bis auf John **Herschel** gar nicht übel zu entsprechen, jedoch ist sein Ergebnis durch die neuern Beobachtungen, welche eine anders geartete und längere Kurve fordern, wieder so ziemlich hinfällig geworden.



1840 wies John **Herschel** die Veränderlichkeit von α Orionis nach; die Veränderung ist aber gering und die von ihm bestimmte Periode 196^d höchst unsicher.

1848 fand Joseph **Baxendell** (Manchester 1815 — Southport 1887; erst Seemann, dann Obs. der „Manchester-Korporation" und in Southport; vgl. Bottomley in Mem. Manch. 1888) in λ Tauri einen neuen Stern vom Algol-Typus. Die Periode beträgt $3^d\ 22^h\ 52^m$, wovon aber nur 10^h auf den Wechsel von 3,4 bis 4,2 kommen.

1855 entdeckte **Hind** in U Geminorum einen der rätselhaftesten veränderlichen Sterne, indem derselbe nicht nur scheinbar unregelmässig zwischen 8,9 und 13,1 schwankt, sondern öfters mit erstaunlicher Schnelligkeit (so z. B. einmal im Februar 1869 in 24^h um mindestens 3 Grössen) an Glanz zunimmt. Die Zwischenzeit zwischen zwei Maxima soll von 75 bis auf 617^d gehen.

1859 bemerkte J. **Schmidt** die Veränderlichkeit von δ Libræ, und erkannte sodann 1865, dass dieser Stern dem Algol-Typus angehört. Die Periode beträgt $2^d\ 7^h\ 51^m\ 20^s$, wovon etwa 12^h auf den Wechsel von 4,9 bis 6,1 kommen,

u. s. f. — *b.* Einen ersten Katalog gab schon **Pigott** in seinen „Observations and remarks on those stars which the astronomers of the last century suspected to be changeable (Ph. Tr. 1786)": Er zählte in demselben in einer ersten Klasse 12 unzweifelhaft veränderliche Sterne auf, die in der That auch noch jetzt anerkannt werden, — in einer zweiten sodann noch 38 verdächtige Sterne, von welchen allerdings in der Neuzeit die meisten freigesprochen worden sind; dabei gab er von jedem Sterne Æ, D, Max., Min. und Autorität. Seither veröffentlichten, abgesehen von den in Lehrbüchern enthaltenen, namentlich J. H. **Westphal** (Danzig. Schrift. I von 1820), **Pogson** (Radcl. Obs. XV von 1856), **Chambers** (Monthly Not. XXV von 1865), etc. immer vollständigere Verzeichnisse, — ganz besonders aber erwarb sich **Schönfeld** schon 1866 das Verdienst, einen „Catalog

von veränderlichen Sternen mit Einschluss der neuen Sterne (Mannh. Jahresber. 32)" zu geben, der bereits 119 Nummern und höchst interessante „Noten" enthielt, und diesem folgte sodann 1875 sein „Zweiter Catalog von veränderlichen Sternen (Mannh. Jahresber. 40)", der sich sogar auf 143 Nummern erstreckt, — noch jetzt in Sachen die Hauptquelle bildet, — und auch zunächst, immerhin unter Benutzung der seitherigen Arbeiten von **Vogel** und **Dunèr**, zur Erstellung unserer Tab. X^b benutzt wurde. — *c.* Wie schon angedeutet, ist bei einzelnen Sternen auch der ziemlich sichere Nachweis eines periodischen Farbenwechsels geleistet worden: So haben namentlich **Weber** und **Klein** (vgl. A. N. 2111 von 1876, Wochenschr. 1877, etc.) bei α Ursæ majoris den periodischen Wechsel feuerrot-weiss-gelb-feuerrot nachgewiesen, und ersterer die Dauer der Periode auf $33^1/_2{}^d$ festgesetzt. Jedoch dürfte es, da Beobachtungen dieser Art ausserordentlich schwierig und auch noch kaum in genügender Anzahl vorhanden sind, ratsam erscheinen, mit Schlüssen und Theorien zurückzuhalten.

606. Die gegenwärtigen Ansichten. — Es giebt kaum eine Klasse von Erscheinungen am Himmel, in welcher so viele Abstufungen und Übergänge mit wesentlichen Verschiedenheiten wechseln, als dies bei den veränderlichen und den gegenwärtig von ihnen kaum mehr abtrennbaren sog. neuen Sternen der Fall ist, und es lassen sich dieselben daher schwerlich auf eine übereinstimmende Weise erklären, so dass es angegeben erscheint, die betreffenden Himmelsgebilde zu klassifizieren und jede Klasse für sich ins Auge zu fassen, wie dies unten geschehen soll [a].

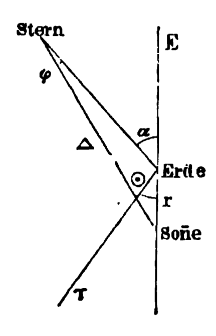
Zu 606: *a.* Nach dem überhaupt für die neuern Forschungen auf dem Gebiete der Stellarastronomie mit Nutzen zu konsultierenden Werke „Agnes **Clerke**, The system of the stars. London 1890 in 8." teilte **Pickering** die uns hier berührenden Gebilde 1880 (vgl. Proc. Amer. Acad. XVI) in die fünf Klassen: I. Temporäre oder neue Sterne; II. Sterne, die, wie Mira Ceti, in mehrmonatlichen Perioden auffallend veränderlich sind; III. Sterne mit geringen und unregelmässigen Fluktuationen; IV. Sterne, die, wie δ Cephei und β Lyræ, in Perioden von wenigen Tagen ihr Licht wechseln; V. Sterne des Algol-Typus. Ich muss jedoch gestehen, dass mich diese Einteilung nicht vollständig befriedigt und dass ich mir erlaube, derselben für die versprochene Diskussion die folgende Einteilung in vier Klassen zu substituieren: **Erste Klasse für Sterne, die nur ausnahmsweise sichtbar sind.** In diese Klasse gehören, ausser den beiden neuen Sternen von 1572 und 1604 (600), ein grosser Teil der in 599 und 601 aufgezählten und in 602 diskutierten Erscheinungen, — einige derselben möchten dagegen vielleicht allerdings besser der folgenden Klasse eingereiht werden. **Zweite Klasse für Veränderliche, deren Periode nach Dauer und Verlauf nur unvollkommen bekannt ist.** In diese Klasse gehören vor allem aus η Argus und U Geminorum (vgl. 605) und überhaupt diejenigen Veränderlichen, über deren Unkenntnis man sich gegenwärtig meistens dadurch wegzuhelfen sucht, dass man sie als „irreguläre" bezeichnet. Sie entziehen sich vorläufig noch jeder Diskussion; aber ich möchte ihre Gesamtheit, in der Hoffnung, dass es später gelingen werde, die mitwirkenden Faktoren auszuscheiden, als die „Klasse der Zukunft" bezeichnen und sie zur sorg-

fältigsten Beobachtung empfehlen. **Dritte Klasse für Sterne mit beständigem Lichtwechsel, deren Periode nach Dauer und Verlauf bereits ermittelt ist.** In diese Klasse gehören, ausser der Mira Ceti (603) und der β Lyræ (604) bereits ziemlich viele Sterne, wie z. B. die schon oben (605) besprochenen η Aquilæ, δ Cephei, etc., und es sind zunächst die Sterne dieser Klasse, auf welche sich **Wargentin** bezog, als er in seiner Abhandlung „Om den föränderlige styernan (Acad. Handl. 1779)" die Erscheinungen bei den Veränderlichen mit denjenigen auf der Sonne in Parallele setzte, — eine Idee, welche sich wenig später auch bei **Pigott** findet, und welche auch von mir, ohne dass ich damals von diesen Vorgängern etwas wusste, in meiner Abhandlung von 1852 ausgesprochen wurde. Da wir nun allerdings (vgl. 534) auch über die Vorgänge auf der Sonne nichts weniger als vollständig aufgeklärt sind, so könnte es scheinen, es sei mit Aufstellung dieser Analogie wenig gewonnen; aber es ist eben doch damit nicht etwa nur eine Unbekannte durch eine andere Unbekannte ersetzt, sondern gewissermassen eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten aufgestellt worden, und darin besteht ein entschiedener Fortschritt. **Vierte Klasse für Sterne, bei denen ein Lichtwechsel nur nach bestimmten Zeitabschnitten eintritt.** In diese Klasse gehört zunächst Algol (604), und an diesen haben sich in der neuern Zeit noch mehrere andere Sterne von ähnlichem Verhalten angeschlossen, von welchen einige bereits (605) als „zum Algol-Typus gehörend" aufgeführt worden sind. Die naheliegende Idee, dass die Sterne dieser Klasse nicht eigentliche Veränderliche seien, sondern dass sie für uns nur **scheinbar** dadurch zu solchen werden, dass dunkle Begleiter um dieselben kreisen und jeweilen partiale Bedeckungen veranlassen, ist in Beziehung auf Algol in der That schon durch **Goodricke** ausgesprochen worden, und in der neuern Zeit hat nicht nur **Pickering** gezeigt, dass für diesen Stern die Annahme eines solchen Begleiters, dessen Durchmesser ³/₄ von dem des Sternes betragen und ihn in einer Bahn von 0",0138 grosser Axe bei einer Neigung von 87° umkreisen würde, vollständig genügen könnte, sondern es ist sogar vor kurzem **Vogel** und **Scheiner** (vgl. für näheres 629) gelungen, die wirkliche Existenz dieses letztern mit aller Sicherheit nachzuweisen. Es scheidet sich damit Algol definitiv von den Veränderlichen und es dürfte bald seine ganze Klasse vollständig gestrichen werden. — Anhangsweise erwähne ich noch zur Vervollständigung der Speciallitteratur über die Veränderlichen „H. **Gyldèn**, Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne. Helsingfors 1880 in 4., — und: Joseph **Plassmann**, Die veränderlichen Sterne. Köln 1888 in 8."

607. Die ersten Bestimmungen der Fixsternparallaxe. — Es ist schon im vorhergehenden teils (263) über die frühern Misserfolge in Bestimmung der jährlichen Parallaxe, teils (289) über die ersten wirklichen Erfolge das wichtigste mitgeteilt worden, und es bleibt daher hier nur noch übrig, einigen weitern Detail nachzutragen [a] und sodann anhangsweise einige grundlegende Beziehungen zu entwickeln [b].

Zu 607: *a.* Zuerst trage ich nach, dass **Piazzi** bei einem von ihm unternommenen Versuche, die Fixsternparallaxe nach früherer Art durch Messung von Zenitdistanzen zu bestimmen, nur einen Halberfolg hatte, indem für ihn z. B. die Parallaxe der Capella in den Beobachtungsfehlern verschwand, da-

gegen diejenige des für ihn zu niedrigen Sirius auf 4" hinaufgetrieben wurde. Auch **Calandrelli** ging es wenig besser, als er um 1805 in Rom den für ihn nahe zenitalen Stern Wega mit einem 9-füssigen Sector beobachtete, indem er trotz der angewandten Sorgfalt für denselben den unzulässigen Wert von 4",4 erhielt. Etwas besser kam **Pond** weg, als er mehrere 10-füssige Fernröhren an Steinpfeilern so befestigte, dass jedes derselben auf einen bestimmten Stern gerichtet blieb, und dessen allfällige kleine Verschiebungen im Laufe des Jahres mikrometrisch ermittelt werden konnten; jedoch musste er sich trotz alledem mit dem negativen Resultate begnügen, dass die Parallaxen von Wega, Deneb und Athair kleiner als einige Zehntel einer Sekunde sein müssen. — Zu der in 289 gegebenen Schilderung der ersten wirklich gelungenen Bestimmung bleibt nachzutragen, dass **Bessel**, der damals von **Schlüter** ganz vorzüglich sekundiert war, sich für seine Messungen des Heliometers der Königsberger Sternwarte bediente und über die Ergebnisse derselben in mehreren Abhandlungen über „Bestimmung der Entfernung des 61. Sterns des Schwanes (A. N. 365—6 von 1838 und 401—2 von 1840; auch Jahrb. Schum. für 1839)" relatierte. Ferner ist zu erwähnen, dass W. **Struve** ungefähr gleichzeitig mit dem Fadenmikrometer des neunzölligen Dorpater Refraktors α Lyræ und benachbarte Sterne verglich und 1839 in einer seinen „Mensuræ micrometricæ (622)" angehängten „Disquisitio de parallaxi α Lyræ" mitteilen konnte, dass diesem Sterne die Parallaxe 0",26 oder eine Distanz von etwa 4 Sternweiten zukomme. Und endlich ergaben sich Thomas **Henderson** (Dundee in Schottland 1798 — Edinburgh 1844; folgeweise Dir. Obs. Cap und Edinburgh), wie aus seiner Abhandlung „On the Parallax of Sirius and of α Centauri (Mem. Astr. Soc. XI von 1839)" hervorgeht, ebenfalls ungefähr gleichzeitig, aus am Cap schon 1832.3 gemessenen, aber erst später ausgenutzten Meridian-Zenitdistanzen für die Parallaxen von Sirius und von α Centauri die Werte 0",31 und 0",92, so dass die Entfernung des letztern Sternes kaum viel mehr als eine Sternweite betragen dürfte. — *b.* Legt man durch Sonne, Erde und einen Stern eine Ebene, so schneidet diese die Ekliptik in einer nach E gerichteten Geraden so, dass, wenn $\odot$ die geocentrische Länge der Sonne bezeichnet, die Länge dieses Punktes E gleich $180° + \odot$ ist. Bezeichnet nun π die jährliche Parallaxe des Sternes und wird die mittlere Distanz der Erde von der Sonne als Einheit angenommen, so ist die Distanz Δ des Sternes von der Sonne gleich $1 : \mathrm{Si}\,\pi$, und man erhält

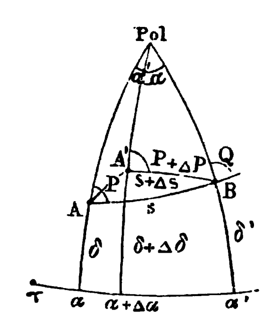


$$\mathrm{Si}\,\varphi : \mathrm{Si}\,\alpha = r : \Delta = r \cdot \mathrm{Si}\,\pi \quad \text{oder} \quad \varphi = r \cdot \pi \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \qquad 1$$

Es besteht also eine ganz entsprechende Relation, wie wir sie in 264 : 4 für die Aberration gefunden haben, und wenn man daher in die aus dieser letztern folgenden Aberrationsformeln (für deren Ableitung auf 611 verwiesen werden kann) die gegenwärtigen Bezeichnungen einführt, d. h. die Grösse k durch $r \cdot \pi$ und $\odot$ durch $\odot - 90°$ ersetzt, sowie wegen der verschiedenen Zählung die Vorzeichen abändert, so stellen die so erhaltenen Formeln

$$\Delta\alpha = r \cdot \pi \cdot \mathrm{Se}\,\delta \cdot [\mathrm{Si}\odot \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Co}\,e - \mathrm{Co}\odot \cdot \mathrm{Si}\,\alpha]$$
$$\Delta\delta = r \cdot \pi \cdot [\mathrm{Si}\odot(\mathrm{Co}\,\delta \cdot \mathrm{Si}\,e - \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\delta \cdot \mathrm{Co}\,e) - \mathrm{Co}\odot \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Si}\,\delta] \qquad 2$$

die Einflüsse der Parallaxe auf Rektascension und Deklination dar. Ist nun



A die Lage des Sternes der Parallaxe π zu der für die Reduktion sämtlicher Beobachtungen (nach 613) gewählten Epoche, A' seine durch die Parallaxe influierte Lage zur Zeit einer der Beobachtungen, und B der im Abstande s und in der Position P befindliche Vergleichstern, so hat man nach 92 : 1', 2'', wenn Co s ≓ 1 und $\text{Co}\,\delta' \cdot \text{Co}\,Q \fallingdotseq \text{Co}\,\delta \cdot \text{Co}\,P$ gesetzt wird, aus dem vom Pol mit A und B bestimmten Dreiecke

$$\Delta s = -\text{Co}\,P \cdot \Delta\delta - \text{Si}\,P \cdot \text{Co}\,\delta \cdot \Delta\alpha \qquad \mathbf{3}$$
$$\Delta P = [\text{Si}\,P \cdot \Delta\delta - \text{Co}\,\delta \cdot \text{Co}\,P \cdot \Delta\alpha] : \text{Si}\,s$$

und somit nach 2, wenn die Hilfsbeziehungen

$$m \cdot \text{Co}\,M = \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Si}\,P + \text{Co}\,\alpha \cdot \text{Si}\,\delta \cdot \text{Co}\,P$$
$$m \cdot \text{Si}\,M = (\text{Si}\,\alpha \cdot \text{Si}\,\delta \cdot \text{Co}\,P - \text{Co}\,\alpha \cdot \text{Si}\,P) \cdot \text{Co}\,e - \text{Co}\,\delta \cdot \text{Co}\,P \cdot \text{Si}\,e \qquad \mathbf{4}$$
$$m' \cdot \text{Co}\,M' = (\text{Si}\,\alpha \cdot \text{Co}\,P - \text{Co}\,\alpha \cdot \text{Si}\,\delta \cdot \text{Si}\,P) : \text{Si}\,s$$
$$m' \cdot \text{Si}\,M' = [(\text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,e \cdot \text{Si}\,P - \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Si}\,\delta) \cdot \text{Co}\,e \cdot \text{Si}\,P - \text{Co}\,\alpha \cdot \text{Co}\,e \cdot \text{Co}\,P] : \text{Si}\,s$$

eingeführt werden, die Formeln

$$\Delta s = \pi \cdot r \cdot m \cdot \text{Co}\,(\odot - M) \qquad \Delta P = \pi \cdot r \cdot m' \cdot \text{Co}\,(\odot - M') \qquad \mathbf{5}$$

welche mit denjenigen von **Bessel** (l. c.) mit der einzigen Ausnahme übereinstimmen, dass sich bei ihm irrtümlich im ersten Gliede von 4^{IV} statt Co δ der Faktor Si δ findet. Setzt man nun die von der Parallaxe freie Distanz der Sterne zur Epoche $s = s_0 + x$ und die zur Zeit τ nach der Epoche gemessene, aber bereits für Aberration etc. (nach 613) auf sie reduzierte Distanz $s' = s_0 + \sigma$, wo s_0 das Mittel aus sämtlichen s' sein mag, — ferner ihre jährliche, voraus mit der Eigenbewegung zusammenhängende Veränderung gleich y, — und endlich den der Messung s' entsprechenden Wert von $r \cdot m \cdot \text{Co}\,(\odot - M)$ gleich μ, so hat man mit Hilfe von 5', wenn τ als Jahresbruch ausgedrückt ist,

$$s_0 + \sigma = s' = s + y \cdot \tau + \Delta s = s_0 + x + y \cdot \tau + \pi \cdot \mu$$

oder

$$\sigma = x + y \cdot \tau + \pi \cdot \mu \qquad \mathbf{6}$$

kann letztere Gleichung für sämtliche Bestimmungen aufschreiben, und nun daraus nach der Methode der kleinsten Quadrate die Unbekannten x, y und π bestimmen. Letztere Grösse ist nun allerdings (289) strenge genommen gleich der Differenz der Parallaxen der beiden Sterne A und B, aber mutmasslich nur wenig kleiner als die gesuchte Parallaxe von A. — In ähnlicher Weise können nach 5'' die Messungen der Positionswinkel, oder nach 2 die Messungen der Rektascension und Deklination zur Bestimmung von π verwendet werden.

608. Die neuern Bestimmungen. — Die bahnbrechenden Arbeiten der Bessel'schen Zeit sind seither durch zahlreiche neue Untersuchungen und Messungen teils kontroliert, teils auf andere Sterne ausgedehnt worden. Ich muss mich jedoch hierauf beschränken, einige litterarische Nachweise und betreffende Bemerkungen folgen zu lassen [a] und zum Schlusse ein paar Worte über die scheinbare und wirkliche Grösse der Fixsterne beizufügen [b].

Zu 608: *a.* Aus der grossen Anzahl der die Fixsternparallaxe betreffenden Abhandlungen der neuern Zeit glaube ich folgende herausheben zu sollen: „R. **Main**, On the present state of our knowledge of the parallax of the fixed stars (Mem. Astr. Soc. XII von 1840), — G. **Lundahl** (1813—44; Dir. Obs.

Helsingfors), De numeris nutationis et aberrationis constantibus atque de parallaxi annua stellæ polaris. Helsingforsiæ 1842 in 4., — C. A. **Peters**, Resultate aus den Beobachtungen des Polarsternes am Vertikalkreise in Pulkowa (Bull. Pet. 1844; er erhielt nur 0",078), und: Recherches sur la parallaxe des étoiles fixes (Mém. Pet. 1849), — Daniel Georg **Lindhagen** (Ost-Gothland 1819 geb.; Prof. astr. Upsala), De numero constante aberrationis et parallaxi annua stellæ polaris (Mém. Pet. 1849), — Th. **Maclear**, Investigation of the Parallax of β Centauri (Mem. Astr. Soc. XXI von 1852; er erhielt 0",470), — O. **Struve**, Narratio de parallaxi α Lyræ. Petropoli 1852 in 4., und: Nouvelle détermination de la parallaxe annuelle des étoiles α Lyræ et 61 Cygni. St-Pétersbourg 1859 in 4. (er erhielt mit Positionsmikrometer 0",1460 und 0",5060), — A. **Krüger**, Bestimmung der Parallaxe des Doppelsternes 70 p Ophiuchi (A. N. 1210—12 von 1859; er erhielt in Bonn mit Heliometer 0",169), — A. **Auwers**, Parallaxenbestimmung mit dem Königsberger-Heliometer (A N. 1416 von 1863; er erhielt für 61 Cygni 0",564), ferner: Bestimmung der Parallaxe des Sternes 34 Groombridge durch chronographische Beobachtungen am Aequatoreal der Gothaer Sternwarte. Berlin 1867 in 4. (er erhielt 0",307), und: Untersuchungen über die Beobachtungen von Bessel und Schlüter am Königsberger Heliometer zur Bestimmung der Parallaxe von 61 Cygni. Berlin 1868 in 4. (eine zunächst kritische Arbeit, nach der aus den letztern Serien der beiden Beobachter 0",536 folgt, also gerade das Mittel zwischen O. Struves und seinem eigenen Werte), — H. **Gyldèn**, Neue Berechnung der Sirius-Parallaxe aus den Beobachtungen am Cap (Bull. Pet. 1864; er fand 0",193 anstatt den 0",31 in 607), — C. **Abbe**, The annual parallax of Sirius deduced from observations at the Cape of Good Hope (Monthly Not. 28 von 1867; er fand 0",273), — Ch. **Dufour**, Mémoire sur une nouvelle méthode pour déterminer la distance de quelques étoiles (Bull. vaud. 1868 und Archives 1890; er bezieht sich zunächst auf Doppelsterne, — schlägt vor, nach 614 spektroskopisch die kilometrische Geschwindigkeit a des den Hauptstern in b Sekunden im Abstande von r^{kl} umkreisenden Begleiters zu bestimmen, — und hat nun, unter m den scheinbaren Abstand der beiden Sterne voneinander und unter d ihren kilometrischen Abstand von Sonne oder Erde verstehend, $a \cdot b = 2 r \pi$ und $\text{Tg}\, m = r : d$, somit $d = a \cdot b : (2\pi \cdot \text{Tg}\, m)$, womit das Problem gelöst ist), — F. **Brünnow**, New determination of the Parallax of α Lyræ (Dunsink Obs. I von 1870; er erhielt 0",21), und: Further researches on the parallax of stars (do. II von 1873), — A. **Winnecke**, Bestimmung der Parallaxe des zweiten Argelander'schen Sternes ($10^h\ 55^m$, $36^0\ 56'$) aus Messungen am Heliometer der Sternwarte zu Bonn in den Jahren 1857 bis 1858. Leipzig 1872 in 4. (er fand für diesen Stern, der nur schwach 7. Gr. ist, aber eine starke eigene Bewegung hat, 0",501), — Will. **Elkin**, Über die Parallaxe von α Centauri. Karlsruhe 1880 in 4. (er erhielt für α_1 und α_2 die absol. Parallaxen 0",351 und 0",670), — Sir Robert **Ball** (Dublin 1840 geb.; Prof. astr. und Dir. Dublin), The distances of the stars (Nat. 1881), — Asaph **Hall**, The Parallax of α Lyræ and 61 Cygni. Washington 1882 in 4. (er erhielt 0",1797 und 0",4783), und: Observations of stellar parallax. Washington 1860 in 4., — Ludwig **Struve** (Pulkowa 1858 geb.; Sohn von Otto; Obs. Dorpat), Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. Petersburg 1883 in 4., — D. **Gill** and W. **Elkin**, Heliometer-determinations of stellar parallax in the southern hemisphere. London 1884 in 4. (sie fanden z. B. für α Centauri 0",75, für Sirius 0",38, etc.; bei β Centauri und Canopus überstieg dagegen die Parallaxe kaum die Unsicherheit der

Bestimmung), — A. **Bélopolsky**, Beitrag zur Ermittlung von Sternparallaxen aus Durchgangsbeobachtungen (A. N. 2888 von 1889; er benutzt zunächst Wagner'sche Rektascensionen und betont, auf L. Struves Arbeit verweisend, dass Durchgangsbeobachtungen ganz gute Resultate ergeben), — Joh. Abraham Christian **Oudemans** (Amsterdam 1827 geb.; Prof. astr. und Dir. Obs. Utrecht), Übersicht der in den letzten 60 Jahren ausgeführten Bestimmungen von Fixsternparallaxen (A. N. 2915—16 von 1889), — etc.“ — *b.* Noch viel schwieriger als die Distanzbestimmung ist die Ermittlung der mit der Grössenklasse nur in hypothetischer Weise zusammenhängenden **scheinbaren** Grösse der Sterne, und so lange diese Kenntnis fehlt, kann natürlich von einer Festsetzung der **wahren** Grösse erst keine Rede sein: Von freiem Auge gesehen erscheinen uns die Sterne infolge der Irradiation viel grösser als durch Fernröhren, und für diese besteht der 1693 von **Horrox** aufgestellte Satz „que plus les lunettes sont parfaites, plus elles font paraître les étoiles petites et semblables à des points lumineux“ auch heute noch zu Recht. — Bezeichnet r den Radius und d die Distanz eines Gestirnes, so ist sein scheinbarer Halbmesser $x = \text{Atg}(r : d) = r : (d \cdot \text{Si}\, 1'')$. Für die Sonne ist nun $r = 92800$ g. M. und es würde somit dieselbe in der Distanz einer einzigen Sternweite von 4 Billionen Meilen nur noch den scheinbaren Radius $x = 0'',005$ besitzen, — während in dieser Distanz beispielsweise ein Stern, der bei 5 Sternweiten (wie etwa die Wega nach der Schätzung von W. Herschel) den scheinbaren Radius 0″,2 besitzt, den Radius $x = 1'' = 200 \times 0'',005$ halten, also ein Volumen von $200^3 = 8$ Millionen Sonnen beanspruchen würde. Es sind also gewisse Fixsterne entweder ungeheuer gross oder haben für uns eine ganz verschwindend kleine scheinbare Grösse.

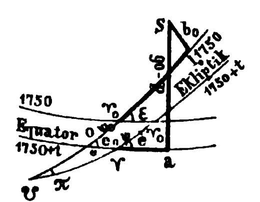
609. Der Einfluss der Präcession auf die Sterncoordinaten. — Wie schon früher (201) erwähnt und sodann (514) näher ausgeführt wurde, ist die **Präcession** von theoretischer Seite als eine notwendige Folge der Abplattung der Erde, sowie die periodische Veränderung der Schiefe der Ekliptik als eine Wirkung der Planeten erwiesen worden. Hier ist namentlich nachzutragen, dass es **Bessel** unter Benutzung des von **Bradley** hinterlassenen Beobachtungsschatzes gelang, die in diesen Theorien auftretenden Konstanten mit der wünschbaren Schärfe zu bestimmen [a] und sodann zu zeigen, wie hierauf gestützt der Einfluss der Präcession auf die Sterncoordinaten ausgemittelt werden kann [b].

Zu 609: *a.* Die von **Bradley** und seinem langjährigen Gehilfen und Nachfolger Nathaniel **Bliss** (? 1700 — Greenwich 1764; früher Prof. math. Oxford) von 1750 an in Greenwich mit einem neuen Mauerquadranten von **Bird** und einem achtfüssigen Passageninstrument unter sorgfältigster Berücksichtigung der Refraktion gesammelten, 13 Folianten füllenden Beobachtungen kamen 1776 nach langjährigem Streite mit den Erben Bradleys an die Universität Oxford, und wurden sodann in deren Auftrage durch Thomas **Hornsby** (Oxford 1733 — ebenda 1810; Prof. astr. et phys. Oxford) unter dem Titel „Astronomical observations made at the Roy. Observatory at Greenwich from 1750 to 1765 by the Rev. James Bradley and the Rev. Nathaniel Bliss. Oxford 1798—1805, 2 Vol. in fol.“ herausgegeben. Als **Olbers** bald nachher ein Exemplar dieses Werkes erhielt, zeigte er dasselbe dem jungen **Bessel** und schlug ihm

vor, sich an die Reduktion zu machen. Der kolossale Umfang einer solchen Arbeit schreckte diesen nicht, — ja als er im Laufe derselben sich von dem hohen Werte dieser bisdahin unbekannten und unbenutzten Serien überzeugte, beschloss er, nicht nur die anfänglich in Aussicht genommenen Reduktionen auszuführen, sondern gleichzeitig auch die Reduktionselemente, welche bisher jeder so ziemlich willkürlich angenommen hatte, aus den Beobachtungen selbst abzuleiten. Er rückte mit dieser Arbeit so rasch vorwärts, dass er eine betreffende Preisschrift ausarbeiten konnte, welche als eine Art Vorläufer unter dem Titel „Untersuchung der Grösse und des Einflusses des Fortrückens der Nachtgleichen. Berlin 1815 in 4.“ erschien, und dieser folgte sodann bald sein kapitales Werk „Fundamenta astronomiæ pro anno MDCCLV deducta ex observationibus viri incomparabilis James Bradley in specula astronomica Grenovicensi per annos 1750—62 institutis. Regiomonti 1818 in fol.“ — Ein Hauptergebnis der Untersuchungen von **Bessel** war, dass die Ausdrücke

$$\psi_0 = 50'',37572 \cdot t - 0'',00012\,17945 \cdot t^2$$
$$\psi = 50'',21129 \cdot t + 0'',00012\,21483 \cdot t^2 \qquad 1$$

angeben, um wie viel sich während t Jahren von der Epoche 1750 hinweg der Frühlingspunkt in der damaligen oder sog. **festen Ekliptik** und in der 1750 + t entsprechenden oder sog. **wahren Ekliptik** verschoben hat, d. h. wie viel die sog. **Lunisolarpräcession** ψ_0 und die sog. **allgemeine Präcession** ψ beträgt, während



$$e_0 = 23^0\,28'\,18'',0 + 0'',0000\,98423 \cdot t^2$$
$$e = 23^0\,28'\,18'',0 - 0'',48368 \cdot t - 0'',00000\,27229 \cdot t^2 \qquad 2$$

die Winkel der festen und wahren Ekliptik mit dem Equator von 1750 + t sind. Bezeichnet man nun die Distanz von γ_0 bis zum aufsteigenden Knoten der wahren in der festen Ekliptik mit ☊ (so dass ☋ O = 180° — ☊ — ψ_0 und ☋ ♈ = 180° — ☊ — ψ ist) und die sog. **planetarische Präcession** O ♈ mit θ, so erhält man durch Anwendung der sog. Gauss'schen Formeln auf das Dreieck ☋ O ♈ die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{Si}\ {}^1/_2\pi \cdot \mathrm{Si}\ [☊ + {}^1/_2(\psi_0+\psi)] &= \mathrm{Si}\ {}^1/_2\theta \cdot \mathrm{Si}\ {}^1/_2(e_0+e)\\
\mathrm{Si}\ {}^1/_2\pi \cdot \mathrm{Co}\ [☊ + {}^1/_2(\psi_0+\psi)] &= -\mathrm{Co}\ {}^1/_2\theta \cdot \mathrm{Si}\ {}^1/_2(e_0-e)\\
\mathrm{Co}\ {}^1/_2\pi \cdot \mathrm{Si}\ {}^1/_2(\psi_0-\psi) &= \mathrm{Si}\ {}^1/_2\theta \cdot \mathrm{Co}\ {}^1/_2(e_0+e)\\
\mathrm{Co}\ {}^1/_2\pi \cdot \mathrm{Co}\ {}^1/_2(\psi_0-\psi) &= \mathrm{Co}\ {}^1/_2\theta \cdot \mathrm{Co}\ {}^1/_2(e_0-e)
\end{aligned} \qquad 3$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tg}\ {}^1/_2\theta &= \mathrm{Tg}\ {}^1/_2(\psi_0-\psi)\cdot \mathrm{Co}\ {}^1/_2(e_0-e)\cdot \mathrm{Se}\ {}^1/_2(e_0+e)\\
\mathrm{Tg}\ [☊ + {}^1/_2(\psi_0+\psi)] &= -\mathrm{Tg}\ {}^1/_2\theta \cdot \mathrm{Si}\ {}^1/_2(e_0+e)\cdot \mathrm{Cs}\ {}^1/_2(e_0-e)\\
\mathrm{Si}\ {}^1/_2\pi &= -\mathrm{Co}\ {}^1/_2\theta\cdot \mathrm{Si}\ {}^1/_2(e_0-e)\cdot \mathrm{Se}\ [☊ + {}^1/_2(\psi_0+\psi)]
\end{aligned} \qquad 4$$

nach welchen Formeln successive θ, ☊, π berechnet, aus denen aber auch bequemere Näherungsformeln erhalten werden können: Führt man nämlich in 4' statt $^1/_2(e_0 + e)$ den gleichwertigen Ausdruck. $e_0 - {}^1/_2(e_0 - e)$ ein, und bleibt bei den zweiten Potenzen der kleinen Grössen θ, $\psi_0 - \psi$ und $e_0 - e$ stehen, so erhält man, da nach 1 und 2 die Beziehungen

$$\psi_0 - \psi = \alpha \cdot t - \beta \cdot t^2 \qquad e_0 - e = \gamma \cdot t + \delta \cdot t^2 \qquad 5$$

bestehen, wo α, β, γ, δ bekannte Zahlen sind,

$$\theta = \frac{\psi_0-\psi}{\mathrm{Co}\,e_0 + {}^1/_2(e_0-e)\cdot\mathrm{Si}\,e_0\cdot\mathrm{Si}\,1''} = \frac{\psi_0-\psi}{\mathrm{Co}\,e_0} - \frac{(\psi_0-\psi)(e_0-e)\cdot\mathrm{Si}\,e_0\cdot\mathrm{Si}\,1''}{2\,\mathrm{Co}^2 e_0}$$
$$= \frac{\alpha}{\mathrm{Co}\,e_0}\cdot t - \frac{2\beta+\alpha\cdot\gamma\cdot\mathrm{Tg}\,e_0\cdot\mathrm{Si}\,1''}{2\,\mathrm{Co}\,e_0}\cdot t^2 = \mu\cdot t - \nu\cdot t^2 \qquad 6$$

wo $\mu = 0'',17926 \qquad \nu = 0'',00026\,60393$

und aus 4''

$$\mathrm{Tg}\,[\Omega + \tfrac{1}{2}(\psi_0 + \psi)] = \tfrac{1}{2}\theta \cdot \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,1'' - \theta \cdot \mathrm{Si}\,e_0 : (e_0 - e) =$$
$$= -\frac{\mu \cdot \mathrm{Si}\,e_0}{\gamma} + \left(\frac{\mu \cdot \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,1''}{2} + \frac{\nu \cdot \gamma + \mu \cdot \delta}{\gamma^2} \cdot \mathrm{Si}\,e_0\right) \cdot t =$$
$$= -9{,}1691307 + 0{,}00022 \cdot t = -A + B \cdot t$$

oder mit Hilfe von 40 : 17

$$[\Omega + \tfrac{1}{2}(\psi_0 + \psi)] \cdot \mathrm{Si}\,1'' = -A + \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{5}A^5 + .. + B \cdot t \cdot (1 - A^2 + A^4 - ..)$$

folglich

$$\Omega = -\frac{\psi_0 + \psi}{2} - \mathrm{Atg}\,A + \frac{B \cdot t}{(1 + A^2) \cdot \mathrm{Si}\,1''} = 171^0\,36'\,10'' - 5'',88304 \cdot t \qquad 7$$

Die Quadratsumme von 3' und 3'' giebt endlich

$$\mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}\pi = \mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}\theta \cdot \mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}(e_0 + e) + \mathrm{Co}^2\,\tfrac{1}{2}\theta \cdot \mathrm{Si}^2\,\tfrac{1}{2}(e_0 - e)$$

oder, wenn noch $e_0 = \varepsilon + \eta \cdot t^2$ gesetzt wird, nahe

$$\pi^2 = (e_0 - e)^2 + \theta^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,[e_0 - \tfrac{1}{2}(e_0 - e)] =$$
$$= (e_0 - e)^2 + \theta^2 \cdot [\mathrm{Si}^2\,e_0 - \tfrac{1}{2}(e_0 - e) \cdot \mathrm{Si}\,2\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,1''] =$$
$$= (\gamma^2 + \mu^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\varepsilon) \cdot t^2 + (2\gamma\delta - 2\mu\nu \cdot \mathrm{Si}^2\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}\gamma\mu^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\,\varepsilon \cdot \mathrm{Si}\,1'') \cdot t^3$$

folglich

$$\pi = \sqrt{\gamma^2 + \mu^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\varepsilon} \cdot t + \frac{4\gamma\delta - 4\mu\nu \cdot \mathrm{Si}^2\,\varepsilon - \gamma\mu^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\,\varepsilon \cdot \mathrm{Si}\,1''}{4\sqrt{\gamma^2 + \mu^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\varepsilon}} \cdot t^2 =$$
$$= 0'',48892 \cdot t - 0'',00000\,30715 \cdot t^2 \qquad 8$$

— *b.* Bezeichnen a und p Rektascension und Poldistanz eines Sternes S zur Zeit 1750 + t, α und π aber diejenigen zur Zeit 1750 + t', l_0 und b_0 endlich seine Länge und Breite in Beziehung auf Ekliptik und Frühlingspunkt der Epoche, so ist in Beziehung auf den Frühlingspunkt O seine Länge gleich $l_0 + \psi_0$ und seine Rektascension gleich $a + \theta$, und man hat daher nach 197 : 1, 4, 3 die Formeln

$$\mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,(l_0 + \psi_0) = \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Co}\,(a + \theta)$$
$$\mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0) = \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Co}\,p + \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,(a + \theta) \qquad 9$$
$$\mathrm{Si}\,b_0 = \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Co}\,p - \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,(a + \theta)$$

welche b_0 und l_0 aus a und p zu berechnen erlauben. Sind sodann θ', ψ_0' und e_0' die der Zeit 1750 + t' entsprechenden Werte, so hat man in Beziehung auf den Durchschnittspunkt O' des damaligen Equators mit der festen Ekliptik offenbar die den 9 analogen Formeln

$$\mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha + \theta') = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,(l_0 + \psi_0')$$
$$\mathrm{Si}\,\pi \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha + \theta') = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,e_0' \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0') - \mathrm{Si}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0' \qquad 10$$
$$\mathrm{Co}\,\pi = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0' \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0') + \mathrm{Si}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,e_0'$$

so dass nun aus b_0 und l_0 auch die eigentlich gesuchten α und π erhältlich sind. — In dem besonders häufig vorkommenden Falle, wo die Zwischenzeit t' — t nur wenige Jahre beträgt und somit auch $\alpha - a = da$ und $\pi - p = dp$ kleine Grössen sind, lässt sich diese Rechnung noch bedeutend vereinfachen: Man hat nämlich entsprechend 10

$$\mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Co}\,(a + \theta) = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,(l_0 + \psi_0)$$
$$\mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,(a + \theta) = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0) - \mathrm{Si}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0 \qquad 11$$
$$\mathrm{Co}\,p = \mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0) + \mathrm{Si}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,e_0$$

Differenziert man nun die dritte dieser Gleichungen, so erhält man, da die von der Präcession unabhängigen Grössen l_0 und b_0 als Konstante behandelt

werden dürfen, und auch die Veränderung von e_0 gegen diejenige von ψ_0 verschwindet, mit Hilfe von der ersten

$$\mathrm{Si}\,p \cdot dp = -\mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Co}\,(l_0 + \psi_0) \cdot d\psi_0 = -\mathrm{Si}\,p \cdot \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Co}\,(a + \theta) \cdot d\psi_0$$

oder nahe

$$dp = -\mathrm{Co}\,a \cdot \mathrm{Si}\,\varepsilon \cdot d\psi_0 \qquad 12$$

Ferner erhält man aus der ersten und dritten

$$\mathrm{Tg}\,(a + \theta) = \frac{\mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,e_0 \cdot \mathrm{Si}\,(l_0 + \psi_0) - \mathrm{Si}\,b_0 \cdot \mathrm{Si}\,e_0}{\mathrm{Co}\,b_0 \cdot \mathrm{Co}\,(l_0 + \psi_0)}$$

also durch Differentiation nach $(a + \theta)$ und ψ_0 und Benutzung von 9

$$\frac{da + d\theta}{\mathrm{Co}^2\,(a + \theta)} = [\mathrm{Co}\,e_0 + \mathrm{Tg}\,(l_0 + \psi_0) \cdot \mathrm{Tg}\,(a + \theta)] \cdot d\psi_0$$
$$= \frac{\mathrm{Co}\,e_0 + \mathrm{Si}\,e_0 \cdot \mathrm{Ct}\,p \cdot \mathrm{Si}\,(a + \theta)}{\mathrm{Co}^2\,(a + \theta)} \cdot d\psi_0$$

folglich nahe

$$da = (\mathrm{Co}\,\varepsilon + \mathrm{Si}\,\varepsilon \cdot \mathrm{Ct}\,p \cdot \mathrm{Si}\,a) \cdot d\psi_0 - d\theta \qquad 13$$

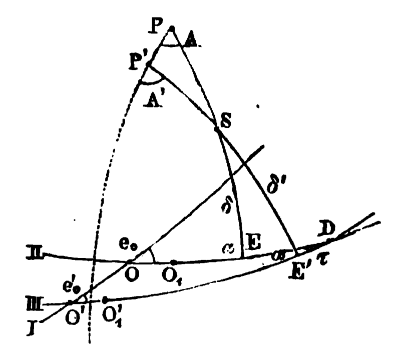
Führt man daher die Hilfsgrössen

$$m = \mathrm{Co}\,\varepsilon \cdot \frac{d\psi_0}{dt} - \frac{d\theta}{dt} = 46'',02824 + 0'',00030\,86450 \cdot t$$
$$n = \mathrm{Si}\,\varepsilon \cdot \frac{d\psi_0}{dt} = 20'',06442 - 0'',00009\,70204 \cdot t \qquad 14$$

und statt a die Rektascension α, statt p die Deklination $\delta = 90 - p$ ein, und bezeichnet die durch die Präcession in einem Zeitelemente bewirkten Veränderungen in Æ und D mit P_α und P_δ, so hat man nach 12 und 13 die Näherungsformeln

$$P_\alpha = m + n \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\delta \qquad P_\delta = n \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad 15$$

Für polare Sterne genügen nun allerdings diese Näherungsformeln nicht, und das Durchrechnen der beiden Formelnsysteme 9 und 10, welches somit für jeden einzelnen solchen Stern einzutreten hätte, wäre doch gar zu unbequem. Zum Glück hat nun schon **Bohnenberger** in seiner Note „Über die Präcession der Fixsterne in gerader Aufsteigung und Abweichung (Z. f. Astr. I von 1816)" gezeigt, dass man auch mit scharfen Formeln von den für eine Zeit 1750 + t giltigen Equatorcoordinaten α und δ **direkt** auf die für eine andere Zeit 1750 + t' giltigen α' und δ' übergehen kann, falls man gewisse von der Lage des Sternes unabhängige, also nur Ein Mal zu berechnende Hilfsgrössen einführt: Ist nämlich I die feste Ekliptik der Epoche, während II und III, welche sich in D schneiden mögen, die Lagen des Equators zu den beiden Zeiten bezeichnen, — sind ferner ψ_0 und ψ_0' die Beträge der Lunisolar-Präcession seit der Epoche, so dass $OO' = \psi_0' - \psi_0$ ist, — und werden noch die Hilfsgrössen τ, $z = 90^\circ - OD$ und $z' = O'D - 90^\circ$ eingeführt, so erhält man aus Dreieck ODO' nach den sog. Gauss'schen Formeln



$$\mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(e_0 - e'_0) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0' - \psi_0) = \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(z' + z) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,\tau$$
$$\mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(e_0 + e'_0) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0' - \psi_0) = \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(z' + z) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,\tau$$
$$\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(e_0 - e'_0) \cdot \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0' - \psi_0) = \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(z - z') \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,\tau \qquad 16$$
$$\mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(e_0 + e'_0) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0' - \psi_0) = \mathrm{Co}\,{}^1\!/_2\,(z - z') \cdot \mathrm{Si}\,{}^1\!/_2\,\tau$$

und hieraus durch paarweise Verbindung, wenn überdies berücksichtigt wird, dass $(z' - z)$ und $(e_0' - e_0)$ klein sind,

$$\begin{aligned} \text{Tg}\,{}^1\!/_2\,(z'+z) &= \text{Co}\,{}^1\!/_2\,(e_0'+e_0)\cdot\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0'-\psi_0) \\ z'-z &= (e_0'-e_0)\cdot\text{Ct}\,{}^1\!/_2\,(\psi_0'-\psi_0)\cdot\text{Cs}\,{}^1\!/_2\,(e_0'+e_0) \end{aligned} \qquad \mathbf{17}$$

$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,\tau = \text{Tg}\,{}^1\!/_2\,(e_0'+e_0)\cdot\text{Si}\,{}^1\!/_2\,(z'+z) \qquad \mathbf{18}$$

woraus sich die Hilfsgrössen z, z', τ bequem berechnen lassen. Setzt man sodann, wenn O_1 und O_1' die wahren Equinoktien für die beiden Zeiten sind, die nach 6 leicht zu berechnenden planetarischen Präcessionen $OO_1 = \theta$ und $O'O_1' = \theta'$, so hat man

$$90^0 - ED = \theta + \alpha + z = A \qquad 90 - E'D = \theta' + \alpha' - z' = A'$$

und somit aus Dreieck PP'S nach 90 : 8, 7[IV]

$$\text{Tg}\,(A'-A) = \frac{p\cdot\text{Si}\,A}{1-p\cdot\text{Co}\,A} \quad \text{wo} \quad p = [\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,\tau\cdot\text{Co}\,A + \text{Tg}\,\delta]\cdot\text{Si}\,\tau \qquad \mathbf{19}$$

$$\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,(\delta'-\delta) = \text{Co}\,{}^1\!/_2\,(A'+A)\cdot\text{Se}\,{}^1\!/_2\,(A'-A)\cdot\text{Tg}\,{}^1\!/_2\,\tau \qquad \mathbf{20}$$

womit die Aufgabe, welche sich **Bohnenberger** gestellt hatte, wirklich strenge gelöst ist. — Zum Schlusse habe ich noch zu bemerken, dass zwar seit der Zeit von **Bessel** und **Bohnenberger** sowohl die Konstantenbestimmungen als die Reduktionsmethoden wiederholt vorgenommen und diskutiert worden sind, dass es aber hier genügen dürfte, an das bereits Gegebene noch einige betreffende Litteraturnachweise anzureihen, wie etwa „O. **Struve**, Bestimmung der Constante der Präcession mit Berücksichtigung der eigenen Bewegung des Sonnensystemes. St. Petersburg 1841 in 4., — H. L. **d'Arrest**, Über die Linien gleicher Präcession in gerader Aufsteigung (A. N. 967 von 1855), — M. **Nyrén**, Détermination du coéfficient constant de la précession au moyen d'étoiles de faible éclat. St-Pétersbourg 1870 in 4., — J. L. E. **Dreyer**, A new determination of the constant of Precession (Copernicus II von 1882), — F. **Folie**, Douze tables pour le calcul des réductions stellaires. Bruxelles 1883 in 4., — E. **Weiss**, Über die Berechnung der Präcession mit besonderer Rücksicht auf die Reduction eines Sterncataloges auf eine andere Epoche. Wien 1886 in 4., — L. **Struve**, Bestimmung der Constante der Präcession und der eigenen Bewegung des Sonnensystemes. St. Petersburg 1887 in 4., — etc.", — und endlich daran zu erinnern, dass A. **Auwers** schon vor geraumer Zeit eine „Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750—62" an die Hand genommen, ja schon 1882 eine betreffende Publikation begonnen hat.

610. Der Einfluss der Nutation. — Auch die durch **Bradley** (vgl. 201) entdeckten, an die Mondknotenperiode gebundenen kleinen Störungen der Präcession, welche unter dem Namen **Nutation** zusammengefasst werden, sind jeweilen mit jener behandelt worden, so dass für sie ebenfalls zunächst nur die namentlich durch C. A. **Peters** ausgeführten Konstantenbestimmungen mitzuteilen sind, und in Verbindung damit zu zeigen ist, welcher Einfluss dadurch auf die Sterncoordinaten ausgeübt wird [a].

Zu 610: *a.* Um die durch die Nutation bewirkten Änderungen N_α und N_δ in Æ und D zu erhalten, hat man offenbar

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \frac{d\alpha}{d\lambda}\cdot\Delta\lambda + \frac{d\alpha}{d\varepsilon}\cdot\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\cdot\Delta\lambda^2 + \frac{d^2\alpha}{d\lambda\cdot d\varepsilon}\cdot\Delta\lambda\cdot\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2}\cdot\Delta\varepsilon^2 \\ N_\delta &= \frac{d\delta}{d\lambda}\cdot\Delta\lambda + \frac{d\delta}{d\varepsilon}\cdot\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\cdot\Delta\lambda^2 + \frac{d^2\delta}{d\lambda\cdot d\varepsilon}\cdot\Delta\lambda\cdot\Delta\varepsilon + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2\delta}{d\varepsilon^2}\cdot\Delta\varepsilon^2 \end{aligned} \qquad \mathbf{1}$$

zu setzen, wo $\Delta\lambda$ und $\Delta\varepsilon$ die Störungen in Länge und Schiefe der Ekliptik bezeichnen. Da aber nach 197 : 6

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\,\mathrm{Si}\,\alpha\cdot\mathrm{Se}\,\delta\cdot d\beta - \mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta\cdot d\varepsilon + (\mathrm{Co}\,\varepsilon + \mathrm{Si}\,\varepsilon\cdot\mathrm{Si}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta)\,d\lambda \\ d\delta &= \mathrm{Co}\,u\cdot d\beta + \mathrm{Si}\,\alpha\cdot d\varepsilon + \mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Si}\,\varepsilon\cdot d\lambda \end{aligned} \qquad \mathbf{2}$$

so ist

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = \mathrm{Co}\,\varepsilon + \mathrm{Si}\,\varepsilon\cdot\mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\alpha,\quad \frac{d\delta}{d\lambda} = \mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Si}\,\varepsilon,\quad \frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\,\mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta,\quad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \mathrm{Si}\,\alpha \qquad \mathbf{3}$$

und hieraus folgt durch nochmaliges Differenzieren

$$\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{d\lambda^2} &= \mathrm{Si}^2\varepsilon\,[\mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Ct}\,\varepsilon + \mathrm{Si}\,2\alpha\,(1/_2 + \mathrm{Tg}^2\delta)] \\ \frac{d^2\delta}{d\lambda^2} &= -\,\mathrm{Si}^2\varepsilon\cdot\mathrm{Si}\,\alpha\,[\mathrm{Ct}\,\varepsilon + \mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\alpha] \\ \frac{d^2\alpha}{d\lambda\cdot d\varepsilon} &= -\,\mathrm{Si}\,\varepsilon\,[\mathrm{Co}^2\alpha - \mathrm{Ct}\,\varepsilon\cdot\mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + \mathrm{Tg}^2\delta\cdot\mathrm{Co}\,2\alpha] \\ \frac{d^2\delta}{d\lambda\cdot d\varepsilon} &= \mathrm{Si}\,\varepsilon\cdot\mathrm{Co}\,\alpha\,[\mathrm{Ct}\,\varepsilon + \mathrm{Tg}\,\delta\cdot\mathrm{Si}\,\alpha] \\ \frac{d^2\alpha}{d\varepsilon^2} &= -\,\mathrm{Si}\,2\alpha\,(1/_2 + \mathrm{Tg}^2\delta) \qquad \frac{d^2\delta}{d\varepsilon^2} = -\,\mathrm{Co}^2\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta \end{aligned} \qquad \mathbf{4}$$

Führt man aber diese Werte in 1 ein, und setzt für $\begin{Bmatrix}1800\\1900\end{Bmatrix}$ nach **Bessel** (l. c.) $\varepsilon = \left\{23^0\,27'\begin{matrix}58'',8\\11'',5\end{matrix}\right\}$ und nach der C. A. **Peters** zu verdankenden Abhandlung „Numerus constans nutationis ex ascensionibus rectis stellæ polaris in Specula Dorpatensi A. 1822—38 observatis deductus. Petropoli 1842 in 4.“

$$\begin{aligned} \Delta\lambda = {} & \left\{\begin{matrix}-17'',2405\\2577\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,\Omega + 0'',2073\cdot\mathrm{Si}\,2\,\Omega - \left\{\begin{matrix}1'',2692\\93\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,2\odot + \\ & + \left\{\begin{matrix}0'',1279\\75\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,(\odot - P) - 0'',2041\cdot\mathrm{Si}\,2\,\leftmoon - 0'',0213\cdot\mathrm{Si}\,(\odot + P) + \\ & + 0'',0677\cdot\mathrm{Si}\,(\leftmoon - P') \\ \Delta\varepsilon = {} & \left\{\begin{matrix}9'',2231\\40\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,\Omega - \left\{\begin{matrix}0'',0897\\96\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,2\,\Omega + \left\{\begin{matrix}0'',5509\\06\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,2\odot + \\ & + \left\{\begin{matrix}0'',0886\\85\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,2\,\leftmoon + \left\{\begin{matrix}0'',0093\\92\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,(\odot + P) \end{aligned} \qquad \mathbf{5}$$

wo Ω die Länge des aufsteigenden Mondknotens bezeichnet, $\odot$ und $\leftmoon$ die Längen von Sonne und Mond, P und P' diejenigen ihrer Perigeen sind, so erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} N_\alpha = {} & -\left\{\begin{matrix}15'',8148\\321\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,\Omega + 0'',1902\cdot\mathrm{Si}\,2\,\Omega - \left\{\begin{matrix}6'',8650\\83\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,\Omega\cdot\mathrm{Si}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta - \\ & - \left\{\begin{matrix}9'',2231\\40\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,\Omega\cdot\mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta - 1'',1642\cdot\mathrm{Si}\,2\odot + \\ & + [0'',0825\cdot\mathrm{Si}\,2\,\Omega\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + 0'',0897\cdot\mathrm{Co}\,2\,\Omega\cdot\mathrm{Co}\,\alpha]\cdot\mathrm{Tg}\,\delta - 0'',0195\cdot\mathrm{Si}(\odot + P) - \\ & - [0'',5054\cdot\mathrm{Si}\,2\odot\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + 0'',5509\cdot\mathrm{Co}\,2\odot\cdot\mathrm{Co}\,\alpha]\cdot\mathrm{Tg}\,\delta - \\ & - [0'',0085\cdot\mathrm{Si}\,(\odot + P)\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + 0'',0093\cdot\mathrm{Co}\,(\odot + P)\cdot\mathrm{Co}\,\alpha]\cdot\mathrm{Tg}\,\delta + \\ & + [0'',1173 + 0'',0509\cdot\mathrm{Si}\,\alpha\cdot\mathrm{Tg}\,\delta]\cdot\mathrm{Si}\,(\odot - P) + \ldots \\ N_\delta = {} & -\left\{\begin{matrix}6'',8650\\83\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Si}\,\Omega\cdot\mathrm{Co}\,\alpha + \left\{\begin{matrix}9'',2231\\40\end{matrix}\right\}\cdot\mathrm{Co}\,\Omega\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + 0'',0825\cdot\mathrm{Si}\,2\,\Omega\cdot\mathrm{Co}\,\alpha - \\ & - 0'',0897\cdot\mathrm{Co}\,2\,\Omega\cdot\mathrm{Si}\,\alpha - 0'',5054\cdot\mathrm{Si}\,2\odot\cdot\mathrm{Co}\,\alpha + 0'',5509\cdot\mathrm{Co}\,2\odot\cdot\mathrm{Si}\,\alpha - \\ & - 0'',0085\cdot\mathrm{Si}\,(\odot + P)\cdot\mathrm{Co}\,\alpha + 0'',0093\cdot\mathrm{Co}\,(\odot + P)\cdot\mathrm{Si}\,\alpha + \\ & + 0'',0509\cdot\mathrm{Co}\,\alpha\cdot\mathrm{Si}\,(\odot - P) + \ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{6}$$

Von der einschlagenden, zum Teil schon in 608 gegebenen Litteratur nur noch die Abhandlung „M. **Nyrén**, Bestimmung der Nutation der Erdachse. St. Petersburg 1872 in 4." erwähnend, bleibt mir dagegen, infolge des 514 gegebenen Versprechens, übrig, beizufügen, dass F. **Folie** in seinen Abhandlungen „Existence de la précession et de la nutation diurne. Bruxelles 1882 in 4., — Theorie der täglichen, jährlichen und säculären Bewegung der Erdaxe. Brüssel 1883 in 4., — etc." und in zahlreichen in den A. N. und den Compt. rend. erschienenen Noten, darzulegen suchte, dass gewisse bei fester Erde verschwindende Beträge ganz erheblich werden, wenn man, unter Annahme eines wenigstens zum Teil flüssigen Erdkernes, die Einwirkungen auf die alsdann davon unabhängige und mutmasslich relativ dünne Erdrinde aufsucht. Er bemühte sich Formeln aufzustellen, durch welche der Einfluss einer täglichen Nutation auf die Sterncoordinaten berechnet werden kann, sowie an Beispielen zu zeigen, dass gewisse Beobachtungen nach Anbringung einer betreffenden Korrektion wesentlich übereinstimmender werden. Dagegen haben andere Forscher die Richtigkeit seiner Theorien in Zweifel gezogen, und so schloss z. B. (vgl. A. N. 2975 von 1890) Rudolf **Lehmann**-Filhés (Berlin 1854 geb.; Prof. astr. Berlin) eine scharfe Kritik derselben mit den Worten: „Ich wage daher zu behaupten, dass die Existenz der täglichen Nutation bisher durch nichts bewiesen ist".

611. Der Einfluss der Aberration. — Die Aberration ist bereits früher (264) einlässlich behandelt und ihr Betrag in Länge und Breite ermittelt worden, so dass die gewöhnlichen Transformationsformeln (197) hinreichen, um den Einfluss derselben auf Rektascension und Deklination zu bestimmen [a]. Ebenso wurde schon damals erwähnt, dass zu dieser **jährlichen Aberration** wegen der Rotation der Erde noch ein kleiner Betrag, die sog. **tägliche Aberration** hinzutritt, deren Betreffnis ebenfalls leicht berechnet werden kann [b].

Zu 611: *a.* Die Komponenten der Aberration in Länge und Breite sind nach 264 : 6 nahe

$$\triangle\lambda = -k \cdot Co(\lambda - \odot) \cdot Se\,\beta \qquad \triangle\beta = k \cdot Si(\lambda - \odot) \cdot Si\,\beta) \qquad 1$$

Bezeichnet man daher die Komponenten der Aberration in Rektascension und Deklination mit A_α und A_δ, so erhält man mit Hilfe von 197 nach leichter Reduktion

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [Co\,u \cdot Co\,\beta \cdot \triangle\lambda - Si\,u \cdot \triangle\beta] \cdot Se\,\delta \\ &= -k \cdot Se\,\delta\,[Co\odot \cdot Co\,\alpha \cdot Co\,e + Si\odot \cdot Si\,\alpha] \qquad 2 \\ A_\delta &= Co\,\beta \cdot Si\,u \cdot \triangle\lambda + Co\,u \cdot \triangle\beta \\ &= k\,[Co\odot \cdot (Si\,\alpha \cdot Si\,\delta \cdot Co\,e - Co\,\delta \cdot Si\,e) - Si\odot \cdot Co\,\alpha \cdot Si\,\delta] \qquad 3 \end{aligned}$$

Zu leichterer Berechnung dieser Formeln hat **Gauss** (vgl. Mon. Corr. 17 von 1808) für $k = 20'',255$ Tafeln entworfen, welche sodann **Nicolai** für $k = 20'',4451$ zu Gunsten von „**Schumacher**, Sammlung von Hülfstafeln. Kopenhagen 1822 in 8. (neue A. von Warnstorff, Altona 1845)" umrechnete. — *b.* Die Rektascension des Ostpunktes, nach welchem die zum Equator parallele tägliche Bewegung gerichtet ist, beträgt für die Sternzeit t offenbar $t + 90°$, diejenige des betreffenden Sternes α, also ist jetzt der frühere Winkel $\lambda - \odot + 90°$

durch $\alpha - t - 90°$, oder es ist $\odot - \lambda$ durch $t - \alpha + 180°$ zu ersetzen, während $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$, β, k der Reihe nach in $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, δ, k' übergehen. Man hat daher, statt den 1, für die tägliche Aberration in Rektascension und Deklination

$$\Delta\alpha = k' \cdot \text{Co}(t - \alpha) \cdot \text{Se}\,\delta \qquad \Delta\delta = k' \cdot \text{Si}(t - \alpha) \cdot \text{Si}\,\delta \qquad 4$$

und speciell nimmt für $t = \alpha$, d. h. für eine Culmination, $\Delta\alpha$ den Maximalwert $k' \cdot \text{Se}\,\delta$ an, während $\Delta\delta$ verschwindet.

612. Der scheinbare und mittlere Ort und die sog. Eigenbewegung. — Für die Definition des **scheinbaren** und **mittlern Ortes** kann auf das früher (290) Mitgeteilte verwiesen werden; ebenso wurde die **Eigenbewegung** bereits (291) besprochen, und da den betreffenden Reduktionsformeln die folgende Nummer speciell gewidmet ist, so sind hier nur noch einige historische Nachweise beizufügen [a].

Zu 612: *a.* Schon **Halley** wies in seiner Note „On the change of the latitudes of some of the principal fixed stars (Ph. Tr. 1718)“ nach, dass einzelne Sterne, wie z. B. Sirius, Arcturus und Aldebaran, eigene Bewegungen haben müssen, indem ihre Positionsveränderungen etwas anders seien als bei den Sternen im allgemeinen. Erste wirkliche Bestimmungen der Eigenbewegungen einer grössern Anzahl von Sternen verdankt man dagegen Tob. **Mayer,** der solche durch Vergleichung seiner eigenen Beobachtungen mit denjenigen von Römer ermittelte und darüber 1760 der Göttinger Akademie in der Abhandlung „De motu fixarum proprio (Opera inedita I)“, auf welche wir noch in 614 zurückzukommen haben werden, Bericht erstattete. — Die neuere Zeit hat diesen, namentlich auch für 614 höchst wichtigen Untersuchungen grosse Aufmerksamkeit geschenkt, wie die zahlreichen betreffenden Schriften erweisen, von welchen die folgenden nur eine ganz kleine Auswahl bilden: „**Triesnecker,** De motibus propriis fixarum (Eph. Vind. 1792), — **Lalande,** Sur le mouvement particulier propre à différentes étoiles (Conn. d. t. 1798), und: Table du mouvement propre de 500 étoiles (Conn. d. t. 1808), — **Seidner,** Über die relative Bewegung der Fixsterne (Berl. Jahrb. 1803), — **Piazzi,** Saggio sui movimenti proprii delle fisse (Mem. Ist. ital. I von 1806), — **Pond,** Proper motion of 30 fixed stars (Ph. Tr. 1815), — **Bessel,** De motibus propriis stellarum (in Fund. astr. von 1818), — **Cacciatore,** Posizioni e movimenti propri delle stelle (in seiner Schrift „Del Osservat. di Palermo“ von 1826), — **Baily,** On the proper motion of the fixed stars (Mem. Astr. Soc. V von 1835), — **Argelander,** DLX stellarum fixarum positiones mediæ. Helsingforsiæ 1835 in 4., — **Main,** Proper motions of the stars (Mem. Astr. Soc. XIX von 1851 und später), — W. **Struve,** De motibus propriis stellarum (in Pos. med. von 1852), — **Oeltzen,** Eigene Bewegungen von Fixsternen (Wien. Sitz. 1855), — Ernest **Quetelet** (Brüssel 1825 — ebenda 1878; Sohn von Adolf in 13; Obs. Brüssel), Essai sur le mouvement propre en ascension droite de quelques étoiles (Mém. Brux. 1859; die schon 1857 begonnene betreffende Revision am Himmel wurde durch seinen Tod unterbrochen), — **Proctor,** Two charts showing the proper motions (Monthly Not. 33 von 1872), — etc.“ — Es bleibt noch beizufügen, dass, wenn P den Pol des Equators, S' aber den Ort bezeichnet, welchen ein Stern S der Coordinaten (α, δ) infolge der Eigenbewegungen ($\Delta\alpha$, $\Delta\delta$) erhält, die Grössen $\varrho = SS'$ und $\psi = 180° - PS'S$ sich mittelst

den aus $\triangle PSS'$ nach 90 : 1, 3' folgenden Formeln

$$\text{Si}\,\varrho \cdot \text{Si}\,\psi = \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,\Delta\alpha$$
$$\text{Si}\,\varrho \cdot \text{Co}\,\psi = \text{Co}\,\delta \cdot \text{Si}\,(\delta + \Delta\delta) \cdot \text{Co}\,\Delta\alpha - \text{Si}\,\delta \cdot \text{Co}\,(\delta + \Delta\delta) \qquad \mathbf{1}$$

oder (da $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ immer kleine Grössen sind) mit genügender Genauigkeit nach den aus denselben hervorgehenden Näherungsformeln

$$\varrho \cdot \text{Si}\,\psi = \Delta\alpha \cdot \text{Co}\,\delta \qquad \varrho \cdot \text{Co}\,\psi = \Delta\delta \qquad \mathbf{2}$$

berechnen lassen, ja in den Verzeichnissen der Eigenbewegungen häufig schon beigegeben werden.

613. Die Reduktionsformeln für die Sterncoordinaten. — Kennt man die dem mittlern Orte zu Anfang irgend eines als Epoche gewählten Jahres entsprechenden Coordinaten eines Sternes, so lassen sich die dem scheinbaren Orte desselben nach T Jahren und t (in Jahresbruch ausgedrückten) Tagen zukommenden Coordinaten nach den unter den vorhergehenden Nummern gegebenen Vorschriften leicht berechnen, — namentlich wenn man letztere nach dem Vorgange von **Bessel** zu den Formeln

$$\text{Æ}_{app.} = \text{Æ}_{ep.} + (\text{Var. ann.} + {}^1/_{200}\,T \cdot \text{Var. sec.} + E_\alpha) \cdot T + A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D \cdot d + t \cdot E_\alpha \qquad \mathbf{1}$$

$$D_{app.} = D_{ep.} + (\text{Var. ann.} + {}^1/_{200}\,T \cdot \text{Var. sec.} + E_\delta) \cdot T + A \cdot a' + B \cdot b' + C \cdot c' + D \cdot d' + t \cdot E_\delta \qquad \mathbf{2}$$

zusammenstellt, wo Var. ann., Var. sec. und E den Komponenten der Präcession und Eigenbewegung entsprechen, — die Hilfsgrössen

$$A = -18'',732 \cdot \text{Co}\odot \qquad B = -20'',420 \cdot \text{Si}\odot$$
$$C = t - 0'',025 \cdot \text{Si}\,2\odot - 0'',343 \cdot \text{Si}\,\Omega + 0'',004 \cdot \text{Si}\,2\Omega \qquad \mathbf{3}$$
$$D = -0,545 \cdot \text{Co}\,2\odot - 9,250 \cdot \text{Co}\,\Omega + 0'',090 \cdot \text{Co}\,2\Omega$$

für alle Sterne gleich sind und nur mit der Zeit wechseln, — und dagegen die Hilfsgrössen

$$a = \text{Se}\,\delta \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad a' = \text{Tg}\,e \cdot \text{Co}\,\delta - \text{Si}\,\delta \cdot \text{Si}\,\alpha$$
$$b = \text{Se}\,\delta \cdot \text{Si}\,\alpha \qquad b' = \text{Si}\,\delta \cdot \text{Co}\,\alpha$$
$$c = 46'',059 + 20'',055 \cdot \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Tg}\,\delta \qquad c' = 20'',055 \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad \mathbf{4}$$
$$d = \text{Tg}\,\delta \cdot \text{Co}\,\alpha \qquad d' = -\text{Si}\,\alpha$$

zunächst von dem Sterne und nur in ganz untergeordneter Weise von der Zeit abhängen [a].

Zu 613: *a.* Die obern Zeilen von 1 und 2 entsprechen offenbar dem **mittlern Orte** zu Anfang des Jahres T. Die **Variatio annua** ist der für die Epoche nach 609 : 15 berechnete Jahresbetrag der Präcession, die **Variatio secularis** seine Veränderung in einem Jahrhundert, so dass $T \cdot \text{Var. ann.} + [{}^1/_2 + {}^3/_2 + {}^5/_2 + \ldots + {}^1/_2\,(2T-1)] \cdot {}^1/_{100}\,\text{Var. sec.} = T \cdot [\text{Var. ann.} + {}^1/_{200} \cdot \text{Var. sec.}\,T]$ den vollständigen Betrag der Präcession bis zum Anfange des Jahres T giebt. — Die untern Zeilen von 1 und 2 enthalten dagegen die Korrektionen, welche zuzufügen sind, wenn man den **scheinbaren Ort** zur Zeit t erhalten will. Um dies zu erweisen, hat man, da nach 611 : 2, 3 und

unter Anwendung der im Cat. Brit. Assoc. (616) **benutzten Konstanten**, die $A \cdot a + B \cdot b$ und $A \cdot a' + B b'$ die Einflüsse der Aberration darstellen, nur zu zeigen, dass die $C \cdot c + D \cdot d$ und $C \cdot c' + D \cdot d'$ auch denjenigen der Präcession und Nutation gerecht werden: Behalten wir nun von N_α nur die neun Hauptglieder bei, und bezeichnen deren Koeffizienten mit n und einem der Reihe nach aufsteigenden Zeiger, so haben wir nach 609 und 610, wenn

$$n_3 = n \cdot i_1, \quad n_5 = n \cdot i_2, \quad n_7 = n \cdot i_3, \quad n_1 = h_1 + m \cdot i_1, \quad n_2 = h_2 + m \cdot i_2, \quad n_9 = h_3 + m \cdot i_3$$

also

$$i_1 = -0{,}343 \quad i_2 = 0{,}004 \quad i_3 = -0{,}025 \quad h_1 = 0{,}049 \quad h_2 = 0{,}001 \quad h_3 = 0{,}003$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} P_\alpha \cdot t + N_\alpha &= (m + n \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\delta) \cdot t + n_1 \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + n_2 \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + n_9 \cdot \mathrm{Si}\,2\odot + \\ &+ (n_3 \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + n_5 \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + n_7 \cdot \mathrm{Si}\,2\odot) \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\delta + \\ &+ (n_4 \cdot \mathrm{Co}\,\Omega + n_6 \cdot \mathrm{Co}\,2\Omega + n_8 \cdot \mathrm{Co}\,2\odot) \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\delta \\ &= (t + i_1 \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + i_2 \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + i_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\odot) \cdot (m + n \cdot \mathrm{Si}\,\alpha \cdot \mathrm{Tg}\,\delta) + \\ &+ h_1 \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + h_2 \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + h_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\odot + D \cdot d \\ &= C \cdot c + D \cdot d + h_1 \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + h_2 \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + h_3 \cdot \mathrm{Si}\,2\odot \end{aligned}$$

wo die drei letzten Glieder etwa von der Ordnung der weggeworfenen Nutationsglieder und somit ebenfalls wegzuwerfen sind, — und entsprechend, wenn bei N_δ nur die sechs Hauptglieder berücksichtigt werden,

$$\begin{aligned} P_\delta \cdot t + N_\delta &= n \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \cdot \left(t + \frac{n_1}{n} \cdot \mathrm{Si}\,\Omega + \frac{n_3}{n} \cdot \mathrm{Si}\,2\Omega + \frac{n_5}{n} \cdot \mathrm{Si}\,2\odot\right) + \\ &+ \mathrm{Si}\,\alpha\,(n_2 \cdot \mathrm{Co}\,\Omega + n_4 \cdot \mathrm{Co}\,2\Omega + n_6 \cdot \mathrm{Co}\,2\odot) \\ &= C \cdot c' + D \cdot d' \end{aligned}$$

womit der nötige Nachweis geleistet ist. — Für die Sternkataloge und die zur Erleichterung obiger Rechnungen vorhandenen Hilfsmittel vgl. 616—18.

614. Die fortschreitende Bewegung der Sonne. — Der möglicher Weise der bereits (612) erwähnten Abhandlung von Tob. **Mayer** entnommene Gedankengang [a], welcher **Herschel** zur Lösung der von **Lambert** gestellten Aufgabe und damit, jedenfalls unter Benutzung der von **Mayer** in derselben niedergelegten Bestimmungen, zur Ermittlung der gegenwärtigen Bewegungsrichtung unsers Sonnensystemes führte, ist schon früher (292) ziemlich einlässlich auseinandergesetzt worden, so dass nur noch einige, teils die Vorgeschichte ergänzende, teils die neuern Arbeiten auf diesem Gebiete beschlagende Notizen beizufügen sind [b]. — Anhangsweise bleibt sodann auseinander zu setzen, wie auch da die Spektroskopie der neuesten Zeit noch ein wesentlich anderes Mittel an die Hand gegeben hat, nämlich nach der Doppler-Fizeau'schen Methode die scheinbaren Bewegungen der Sterne in der Gesichtslinie und somit die Verschiebung unsers Sonnensystemes gegen die Fixsterne zu studieren [c].

Zu 614: *a.* In der Übersetzung, welche P. **Prevost** (Mém. Berlin 1781) von Mayers Abhandlung herausgab, liest man nämlich: „Si le Soleil, et avec lui les planètes et la terre que nous habitons, tendaient directement vers quelque plage du ciel, toutes les fixes semées dans cette plage paraîtraient

s'éloigner peu à peu les unes des autres, et celles de la plage opposée paraîtraient s'approcher mutuellement; ainsi qu'un homme qui se promène dans une forêt voit les arbres qui sont devant lui s'écarter et ceux qu'il laisse derrière lui se rapprocher les uns des autres", und kann nur bedauern, dass **Mayer** durch zu grosse Bedenklichkeit verhindert wurde, auf Grund der beigegebenen Tafel selbst in analoger Weise weiter zu gehen, wie es etwas mehr als zwei Decennien später durch **Herschel** geschah, — ja sogar glaubte, dass seine Tafel eher gegen die grundsätzlich von ihm zugegebene Bewegung des Sonnensystemes zeuge. — *b.* Schon der Bremer Arzt **Biedenburg** sprach in seinem „Versuch vom Bau der Welt aus den Observationen. Bremen 1730 in 4." die ganz bestimmte Ansicht aus, dass sich die Sonne in etwa 25000 Jahren um einen mächtigen Centralkörper bewege, womit er bereits einen Schritt weiter ging als andere Zeitgenossen, welche nur die Wahrscheinlichkeit betonten, dass mit der Rotation der Sonne auch eine fortschreitende Bewegung derselben verbunden sein werde. — Als Erster, der Herschels Untersuchungen wiederholte (aber ja nicht als Vorläufer), ist Pierre **Prevost** zu nennen, der 1783 VII 3 (also fast vier Monate nach Herschels Mitteilung an die Roy. Society) und dann wieder IX 11 der Berliner Akademie betreffende Abhandlungen vorlegte, welche noch im gleichen Jahre „anticipando" mit den Berliner Memoiren von 1781 unter den Titeln „Sur le mouvement progressif du centre de gravité de tout le système solaire, und: Mémoire sur l'origine des vîtesses projectiles, contenant quelques recherches sur le mouvement du systême solaire" abgedruckt wurden und den Apex in $15^h\ 20^m$ und $+25^0$ legen wollten. Bald darauf gab S. **Klügel** „Formeln zu der Untersuchung über die Fortrückung der Sonne und der Sterne (Berl. Jahrb. 1789)". — In der neuern Zeit fand **Argelander** aus den Sternen seines bereits (612) erwähnten Kataloges von 1835 den Apex in $17^h\ 19^m$ und $32^0\ 29'$, und als er damit den von **Lundahl** (vgl. A. N. 209 von 1840) aus andern Sternen erhaltenen Punkt $16^h\ 50^m$ und $10^0\ 26'$ verband, die ihm gewöhnlich zugeschriebene Position $17^h\ 12^m$ und $28^0\ 49'$, — während **Gauss** (vgl. Encke in A. N. 348 von 1848) ermittelte, dass der Apex in das Viereck falle, dessen Ecken die Coordinaten $17^h\ 15^m$ und $30^0\ 14'$, $17^h\ 15^m$ und $30^0\ 57'$, $17^h\ 17^m$ und $31^0\ 9'$, $17^h\ 20^m$ und $30^0\ 32'$ besitzen. Ferner erhielten O. **Struve** (Mém. Pet. 1841) $17^h\ 26^m$ und $37^0\ 45'$, — Thomas **Galloway** (Lanarckshire 1796 — London 1851; erst Lehrer der Math. zu Sandhurst, dann Agent einer Versich. in London; vgl. Ph. Tr. 1847) $17^h\ 20^m$ und $34^0\ 22'$, — **Mädler** (vgl. seine Schrift von 1856 in 615) $17^h\ 27^m$ und $39^0\ 54'$, — **Airy** (Mem. Astr. Soc. 28 von 1859) $17^h\ 26^m$ und $24^0\ 44'$, — **Dunkin** (Mem. Astr. Soc. 32 von 1864) $17^h\ 35^m$ und $25^0\ 0'$, — Leo de **Ball** (Lobberich bei Düsseldorf 1853 geb., Obs. Lüttich; vgl. seine „Untersuchungen über die eigene Bewegung des Sonnensystems. Bonn 1877 in 4.") $17^h\ 58^m$ und $23^0\ 11'$, — Will. **Plummer** (Mem. Astr. Soc. 47 von 1883) $18^h\ 25^m$ und $26^0\ 31'$, — Johann Hinrich **Bischof** (Lehe in Dithmarschen 1857 geb.; vgl. seine „Untersuchungen über die Eigenbewegung des Sonnensystemes. Bonn 1884 in 8.") $19^h\ 0^m$ und $48^0\ 30'$, — L. **Struve** (vgl. seine Schrift von 1887 in 609) $18^h\ 14^m$ und $27^0\ 18''$, — Lewis **Boss** (vgl. Astr. Journ. 223 von 1890) $18^h\ 40^m$ und $40^0\ 0'$, — Oskar **Stumpe** (A. N. 2999 bis 3000 von 1890) $19^h\ 0^m$ und $36^0\ 0'$, — etc." — Ist P der Pol des Equators, O der Punkt, nach welchem sich die Sonne zu bewegen scheint und dessen Coordinaten vorläufig (z. B. wie in 292) gleich A und D gefunden worden sind, und S ein Stern der Coordinaten α und δ, so kann man $r = OS$, $\varphi = \angle POS$ und $\psi' = 180^0 - PSO$ nach den 612 : 1 analogen Formeln

$$\text{Si r}\cdot\text{Si}\,\varphi = \text{Co}\ \delta\cdot\text{Si}(\alpha-\text{A}),\quad \text{Si r}\cdot\text{Co}\ \varphi = \text{Si}\ \delta\cdot\text{Co D} - \text{Co}\,\delta\cdot\text{Si D}\cdot\text{Co}(\alpha-\text{A}) \quad 1$$

$$\text{Si r}\cdot\text{Si}\,\psi' = \text{Co D}\cdot\text{Si}(\alpha-\text{A}),\quad \text{Si r}\cdot\text{Co}\,\psi' = -\text{Co}\,\delta\cdot\text{Si D} + \text{Si}\ \delta\cdot\text{Co D}\cdot\text{Co}(\alpha-\text{A}) \quad 2$$

berechnen, und dabei wird sich, wenn die scheinbare Eigenbewegung des Sternes nur eine Folge der Sonnenbewegung ist, für ψ' ein Wert ergeben, der nur insofern von dem (612) für ψ gefundenen um eine Grösse $\triangle\psi'$ abweicht, als A und D merklicher Korrektionen $\triangle$ A und $\triangle$ D bedürfen. Nun hat man nach 92 : 2″, da α und δ in diesem Falle als konstant zu betrachten sind,

$$\text{Si r}\cdot\triangle\psi' = \text{Si}\,\varphi\cdot\triangle\text{D} - \text{Co}\,\varphi\cdot\text{Co D}\cdot\triangle\text{A} \quad 3$$

kann also, da diese Gleichung unter obiger Voraussetzung für jeden Stern von bekannter scheinbarer Eigenbewegung nur die beiden Unbekannten $\triangle$ D und Co D $\cdot \triangle$ A enthält, zu deren Bestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate leicht zwei Normalgleichungen bilden, — ja sogar, auch wenn die Voraussetzung nicht statt hat, d. h. die $\triangle\alpha$ und $\triangle\delta$ aus scheinbaren und wirklichen Eigenbewegungen resultieren, dennoch gute Werte erhalten, sobald nur die Anzahl der verwendeten Sterne eine etwas grosse ist, da sich in diesem Falle der Einfluss der wirklichen Eigenbewegungen, entsprechend demjenigen zufälliger Fehler, nahezu eliminieren wird. — *c.* Die Anwendung des Doppler-Fizeau'schen Principes (vgl. Z. 85) auf Bestimmung der scheinbaren Bewegung in der Visierlinie mag an folgenden Beispielen erläutert werden: Es fand z. B. **Huggins** 1868, dass die F-Linie des Siriusspektrums von der entsprechenden des Sonnenspektrums um $^1/_4$ der Distanz der beiden D-Linien gegen rot hin abweiche. Nun hatte **Angström** in der (Z. 65) angedeuteten Weise für die Linien D_1, D_2 und F die Wellenlängen

$$D_1 = 0{,}589517\cdot\mu \qquad D_2 = 0{,}588909\cdot\mu \qquad F = 0{,}486072\cdot\mu$$

erhalten, also betrug die von Huggins bestimmte relative Verschiebung $(D_1 - D_2) : 4\,F \risingdotseq {}^1/_{3200}$. Es muss sich somit, die Geschwindigkeit des Lichtes zu 40000 g. M. angenommen, nach dem erwähnten Principe Sirius zur Zeit der Beobachtung mit der Geschwindigkeit $g = 40000 : 3200 = 12{,}5$ g. M. $=$ $= 92{,}6$ km $= 57{,}5$ e. M. von der Erde entfernt haben. Ferner erhielten entsprechend **Vogel** und **Scheiner** für α Tauri die Werte:

Datum	g	L	Co x	G	g′
1888 X 28	4,3	124° 47′	0,548	2,2	6,5
- XI 10	5,4	137 50	0,347	1,4	6,8
- XII 4	6,7	162 50	— 0,067	— 0,3	6,4

Da nun die Längen L = ⊙ — 90° des Apex der Erde zu diesen Zeiten die beigesetzten Werte haben, — da ferner, unter der Annahme, es habe α Tauri zu diesen Zeiten die Equatorcoordinaten Æ = 67° 22′ und D = 16° 17′, nach 197 : 7—9 die Ekliptikcoordinaten dieses Sternes l = 68° 13′ und b = — 5° 28′ sind, — so erhält man, wenn x den Winkel der Gesichtslinie nach dem Sterne mit der Bewegungsrichtung der Erde bezeichnet, nach Co x = Co b · Co (L — l) die ebenfalls beigesetzten Werte, — folglich, da die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn durchschnittlich $2\pi \times 20$ Mill. : $365{,}256 \times 86400 \risingdotseq 4{,}0$ g. M. beträgt, als Geschwindigkeitskomponenten der Erde in der Gesichtslinie G = 4,0 · Co x, — und somit endlich als Geschwindigkeiten, mit welchen sich α Tauri in der Gesichtslinie von der Sonne zu entfernen scheint, die vorzüglich übereinstimmenden Werte g′ = g + G. — Für weitere An-

wendungen vgl. 629, sowie die ausgezeichnete Arbeit „H. C. **Vogel**, Untersuchung über die Eigenbewegung der Sterne im Visionsradius auf spektrographischem Wege. Potsdam 1892 in 4.“

615. Die sog. Centralsonne. — Dass die Bestimmung des Centralpunktes unsers Sternsystemes und der Bewegung unserer Sonne um denselben die vornehmste Aufgabe der Zukunft sein dürfte, ist schon früher (292) hervorgehoben worden, und wenn nun auch die bisherigen Bemühungen der **Mädler** und Maxwell **Hall**, dieselbe zu lösen, als verfrüht angesehen und scharf kritisiert worden sind, so darf man denn doch dieselben als ernste Vorstudien auch nicht unterschätzen [b].

Zu 615: *a.* Ohne gerade behaupten zu wollen, dass in Alcyone eine wirkliche Centralsonne vorhanden sei, suchte **Mädler** in seinen Schriften „Die Centralsonne. Dorpat 1846 in 8. (2. A. Mitau 1847), — Untersuchungen über die Fixsternsysteme. Mitau 1847—48, 2 Bde. in fol., — und: Die Eigenbewegungen der Fixsterne in ihrer Beziehung zum Gesammtsystem. Dorpat 1856 in 4.“ nachzuweisen, dass der Schwerpunkt des Sternsystemes, zu welchem unsere Sonne gehöre, in die Pleyaden falle, — sich namentlich darauf stützend, dass letztere Gruppe fast ganz frei von Eigenbewegung sei, und dass die eigene Bewegung eines Fixsternes sich im allgemeinen um so grösser erzeige, je weiter er von den Pleyaden abliege. Seine Untersuchungen fanden aber in den Abhandlungen „C. A. **Peters**, Über Prof. Mädlers Untersuchungen über die eigenen Bewegungen der Fixsterne (Bull. Pet. 1848), — **Kowalski**, Sur les lois du mouvement propre des étoiles du Catalogue de Bradley (A. N. 1266 von 1859), — etc.“ eine scharfe, fast vernichtende Kritik. — Seither hat Maxwell **Hall** in seiner Abhandlung „The sidereal System (Mem. Astr. Soc. 43 von 1877; Revision in Monthly Not. 47 von 1887)“ die Studien von Mädler, denen man immerhin ein gewisses Verdienst nicht absprechen kann, wieder aufgenommen und ist zu den vorläufigen Resultaten gekommen, dass eine eigentliche Centralsonne wohl nicht vorhanden sei, dass sich aber unsere Sonne etwa in 20 Millionen Jahren um einen Punkt drehen dürfte, der im Jahre 1850 in $0^h\ 37^m$ Æ und $26^0\ 32'$ D lag. — Die folgenden Jahrhunderte werden in der früher (292) angedeuteten Weise zu entscheiden haben.

616. Die Aufzählung der wichtigsten Sternkataloge. — Seit den ältesten bis auf die neuesten Zeiten sind immer und immer wieder kleinere und grössere Sternverzeichnisse angelegt worden, so dass sie gegenwärtig bereits mehrere Hunderte zählen. Es kann daher nicht die Rede davon sein, dieselben hier sämtlich aufzuführen oder gar zu beschreiben, und ich muss mich auf eine kleine Auswahl unter Beigabe einiger weniger sachbezüglicher Notizen beschränken [a].

Zu 616: *a.* Für eine annähernd vollständige, nicht weniger als 527 Nummern und viele betreffende Notizen enthaltende Aufzählung der Sternkataloge auf die Abhandlung „E. B. **Knobel**, The Chronology of Star Catalogues (Mem. Astr. Soc. 43 von 1877)“, und speciell für die ältesten derselben

auf „Fr. **Baily**, The Catalogues of Ptolemy, Ulugh Beigh, Tycho Brahe, Halley, Hevelius, deduced from the best Authorities (London 1843) in 4.“ verweisend, füge ich den bereits früher (190, 592, 612, etc.) aufgeführten Sternverzeichnissen noch folgende bei: „Chr. **Grienberger**, Catalogus veteres affixarum longitudines ac latitudines conferens cum novis. Imaginum coelestium prospectiva duplex. Romæ 1612 in 4. (beigegeben zwei saubere Hemisphären von circa 27^{cm} Durchmesser und 26 die Sterne und Figuren in richtigem Verhältnisse zeigende Specialkärtchen), — **Hevel**, Firmamentum Sobiescianum, sive Uranographia. Gedani 1690 in fol. (scheint der erste Katalog zu sein, in welchem die Sterne nach gegenwärtigem Gebrauche fortlaufende Nummern besitzen), — **Flamsteed**, Historia coelestis britanicæ volumina tria. Londini 1725 in fol. (der in Vol. III enthaltene Katalog von 3310 Sternen erhielt durch Fr. Baily in seinem „Account of the Revd John Flamsteed. London 1835 in 4.“ eine sorgfältig revidierte neue Ausgabe; vgl. auch „Carol. Herschel, Catalogue of Stars taken from Flamsteed's observations. London 1798 in fol.“), — **Lacaille, Table** des ascensions droites et des déclinaisons apparentes des étoiles australes (Mém. Par. 1752; vgl. auch die von Maraldi besorgte Schrift „Coelum australe stelliferum. Parisiis 1763 in 4.“, für welche der junge S. Bailly die Reduktionen ausführte, — ferner die von Henderson „London 1847 in 8.“ veranstaltete, die ursprünglichen 1942 auf 9766 Sterne erhöhende neue Ausgabe, — und die 1890 durch Gould im Astr. Journ. gegebene „Investigation of errors in Lacaille's Coelum australe coeliferum“), — **Bradley**, MMMCCXXII stellarum fixarum Catalogus pro initio anni 1755 (in Bessels Fundamenta Astronomiæ), — Tob. **Mayer**, Fixarum zodiacalium Catalogus novus (in Opera ed. Lichtenberg 1775; von Koch in Berl. Jahrb. 1789 auf 1800 reduziert, — von Baily in Mem. Astr. Soc. IV von 1831 verbessert und erweitert; vgl. „Astronomical observations made at Gottingen from 1756 to 1761 by Tob. Mayer. London 1826 in fol.“), — F. **v. Zach**, Fixarum præcipuarum Catalogus novus. Gothæ 1792 in 4., und: Tabulæ aberrationis et nutationis cum insigniorum 494 stellarum zodiacalium catalogo novo. Gothæ 1806—7, 2 Vol. in 8., — **Piazzi**, Præcipuarum stellarum inneranthium positiones mediæ ineunte seculo XIX. Panormi 1803 in fol. (2. A. 1814; auch Bodes Ausgabe Berlin 1805, ferner Bianchi red. auf 1840 in Mem. Soc. Ital. 1844 und C. v. Littrow in Wiener Annalen 24 bis 32), — W. **Struve**, Stellarum fixarum positiones mediæ. Petropoli 1852 in fol. (nach Houzeau als 2. A. eines Kataloges von 1824 zu betrachten), — Thomas Macdougall **Brisbane** (Bishopton 1770 — Makerstown 1860; General und Gouverneur von Neusüdwales, wo er in Paramatta eine Sternwarte erbaute), A Catalogue of 7385 stars chiefly in the southern hemisphere. London 1835 in 4. (derselbe beruht auf den von Rümker und Dunlop in Paramatta gemachten Beobachtungen), — Stephen **Groombridge** (1755? — Blackheath bei London 1832; Tuchhändler in London und Besitzer einer gut ausgerüsteten Sternwarte zu Blackheath), Catalogue of Circumpolarstars, edited by Airy. London 1838 in 4., — Ch. C. L. **Rümker**, Mittlere Örter von 12000 Fixsternen für den Anfang von 1836. Hamburg 1843 in 4. (Forts. 1850), — **Airy**, Catalogue of the places of 1439 stars deduced from the observations made at Greenwich from 1836 to 1841. London 1843 in 4. (Diesem ersten liess sodann Airy jeweilen nach einigen Jahren neue Kataloge folgen, und sein Nachfolger Christie ist dieser Übung treu geblieben, ja hat noch 1889 einen den Beobachtungen von 1877 bis 1886 entnommenen Katalog herausgegeben), — The Catalogue of Stars of the British Association for the advancement of sciences, containing the mean

right ascensions and north polar distances of 8377 Fixed Stars reduced to January 1, 1850. With a preface explanatory of their construction and application by the late Francis **Baily**. London 1845 in 4. (immer noch einer der geschätztesten Kataloge), — Thomas Glanville **Taylor** (Ashburton in Devonshire 1804 — Southampton 1848; Dir. Obs. Madras), A general Catalogue of the principal Stars from observations made at Madras 1830—43. Madras 1845 in 4. (umfasst 11015 Sterne), — Manuel John **Johnson** (1805 — Oxford 1859; Radcliffe Observer), The Radcliffe Catalogue of 6317 Stars chiefly circumpolar. Oxford 1860 in 8., — **Lamont**, Verzeichniss von 9412 Aequatorialsternen. München 1866 in 8., — M. **Yarnall**, Catalogue of Stars observed at the U. S. Naval Observatory. Washington 1878 in 4. (3. ed. 1889), — E. J. **Stone**, The Cape Catalogue of Stars. Cape Town 1878 in 8. (umfasst 2892 am Kap von 1834 bis 1840 unter Leitung von Maclear beobachtete Sterne; ein zweiter Katalog von 12441 in den Jahren 1871—79 daselbst beobachteten Sternen erschien „London 1881 in 4.“), — **Auwers**, Fundamental-Catalog für die Zonenbeobachtungen am nördlichen Himmel (Publ. astr. Ges. XIV von 1879 mit Suppl. in XVII von 1883 für die südl. Zonen bis 30°), — **Newcomb**, Catalogue of standard clock and zodiacal stars (in Papers Am. Eph. 1880; giebt die Positionen von 1098 Sternen für 1755, 1850 und 1900), — Robert **Grant** (Grantown-on-Spey 1814 — Glasgow 1892; Prof. astr. und Dir. Obs. Glasgow), Catalogue of 6415 stars from observations at Glasgow 1860—81. Glasgow 1883 in 4., — E. **Quetelet**, Catalogue de 10792 étoiles observées à Bruxelles 1857—78 (Ann. N. S. VI von 1887), — Hugo **Seeliger** (Biala in Galizien 1849 geb.; Dir. Obs. Bogenhausen) und Julius **Bauschinger** (Fürth bei Nürnberg 1860 geb.; Obs. Bogenhausen), Erstes Münchener-Sternverzeichniss enthaltend die mittlern Örter von 33082 Sternen. München 1890 in 4., — M. **Loewy**, Détermination des Ascensions droites des étoiles de culmination lunaire et de longitude (Ann. du Bur. des Long. IV von 1890), — H. **Romberg**, Catalog von 5634 Sternen aus Beobachtungen in Pulkowa von 1874—80. St. Petersburg 1891 in 4., — J. **Hilfiker**, Catalogue d'étoiles lunaires. Neuchatel 1891 in 4., — etc.“ — Anhangsweise mag noch an die im Erscheinen begriffenen Werke, den „Catalogue de l'Observatoire de Paris“ und den „Catalog der astronomischen Gesellschaft“, erinnert, sowie auf das in unserer Tab. X[a] gegebene kleine, vorzugsweise für Zeitbestimmungen berechnete Sternverzeichnis hingewiesen werden.

617. Die Reduktion der Sternkataloge auf andere Epochen. — Die bereits (613) gegebenen Formeln reichen natürlich auch zur Lösung der Aufgabe aus, einen Sternkatalog auf eine andere, nur nicht gar zu entfernte Epoche überzutragen; dagegen bleiben etwelche historisch-litterarische Angaben über solche Arbeiten beizufügen und einige zu ihrer Erleichterung veröffentlichte Tafeln zu erwähnen [a].

Zu 617: *a.* Dem immer steigenden Bedürfnisse, die Angaben der verschiedenen Sternverzeichnisse behufs Vergleichung auf dieselbe Epoche zu bringen, suchte schon **Bode** in der von der Berliner Akademie patronisierten „Sammlung astronomischer Tafeln. Berlin 1776, 3 Bde. in 8.“ entgegenzukommen; aber namentlich geschah es sehr eingehend und sorgfältig durch Francis **Wollaston** (1731 — Chiselhurst 1815; Pfarrer zu East-Derham in Norfolk, wo ihm 1766 der nachmals als Physiker so berühmte und 1828 zu London

verstorbene William Hyde Wollaston geboren wurde, — dann zu Chiselhurst in Kent), und sein Werk „A specimen of a general astronomical Catalogue, arranged in zones of north polar distance, and adapted to 1790 I 1. London 1789 in fol.“, welchem er dann noch einen, sich auf die Epoche 1800 I 1 beziehenden „Fasciculus astronomicus. London 1800 in 4.“ folgen liess, leistete am Ende des vorigen und im Anfange des gegenwärtigen Jahrhunderts den Lalande, Méchain, etc., grosse Dienste. Seither sind nun allerdings die betreffenden Hilfsmittel und die nötigen kritischen Untersuchungen, wie die Vorberichte zu manchen der oben erwähnten neuern Sternverzeichnissen zeigen, bedeutend erweitert und verschärft worden; aber deswegen dürfen jene grundlegenden Arbeiten von **Wollaston** nicht vergessen werden, und ich glaube denselben noch speciell entnehmen zu sollen, dass er fand, es seien in Beziehung auf 1800 die sämtlichen Längen bei

Ptolemäus, dessen Epoche er von 137 auf 63 zurückversetzte, um den gegenüber Hipparch begangenen Fehler zu korrigieren, um .	24°	16′	47″
Ulugbegh, dessen Epoche er auf das Jahr 841 der Hedschra legte, welches bei ihm mit 1437 (statt 1463 bei Flamsteed) übereinstimmt, um	5	4	35
Wilhelm IV. mit Epoche 1593/4, um	2	52	50
Tycho mit Epoche 1601, um	2	46	58
Hevel mit Epoche 1661, um	1	56	36
Flamsteed mit Epoche 1690, um	1	32	17

zu vermehren. Und in der That, wenn wir die jährliche Präcession gleich $50\frac{1}{3}$″ setzen, so erhalten wir die damit nahe übereinstimmenden Werte

1800— 63	= 1737 × $50\frac{1}{3}$	= 24° 17′ 9″	1800—1601	= 199 × $50\frac{1}{3}$	= 2° 46′ 56″
—1437	363	5 4 31	—1661	139	1 56 36
—1594	206	2 52 49	—1690	110	1 32 16

Nehmen wir ferner als Epoche des Hipparch'schen Kataloges 128 v. Chr. = — 127 an, und bestimmen x aus $(137 + 127) \cdot 36'' = (x + 127) \cdot 50\frac{1}{3}$, so ergiebt sich $x = 62$ statt der von Wollaston angenommenen 63. — Zum Schlusse führe ich noch folgende Schriften an: „**Groombridge**, Universal tables for the reduction of fixed stars (Mem. Astr. Soc. I von 1822), — **Auwers**, Tafeln zur Reduction der Declinationen verschiedener Sternverzeichnisse auf ein Fundamentalsystem (A. N. 1532—36 von 1865), — **Newcomb**, On the right ascensions of the Equatorial Fundamental Stars and the Corrections necessary to reduce the right ascensions of different Catalogues to a mean homogeneous System. Washington 1872 in 4., — O. **Danckworth**, Sterntafeln, enthaltend die Positionen von 46 Fundamentalsternen für alle Jahrhunderte (von 100 zu 100 Jahren) von — 2000 bis + 1800, nach Leverrier, mit Berücksichtigung ihrer Eigenbewegung (Astr. Viert. 16 von 1880), — F. **Schjellerup**, Recherches sur l'astronomie des anciens (Copernicus 1881; er giebt ähnliche Tafeln wie Danckworth, die aber nur von — 300 bis + 100 gehen und sich auf die Zeitsterne Hipparchs, vgl. 359, beziehen), — Norb. **Herz** und Jos. **Strobl**, Reduction des Auwers'schen Fundamental-Cataloges auf die Leverrier'schen Präcessionscoefficienten. Wien 1883 in 4., — etc.“ Vgl. auch die unter der folgenden Nummer verzeichneten Schriften.

618. Die Sternangaben der astronomischen Jahrbücher. — Während ein Sternkatalog für jeden Stern die mittlere Lage zur Epoche, sowie deren Variationen, und in der Regel auch die von

dieser Lage abhängigen und für eine Reihe von Jahren als konstant anzusehenden Reduktionsfaktoren (die a, b, c, d unserer Formeln in 613) enthält, so giebt dagegen das astronomische Jahrbuch für das einzelne Jahr, aber nur für eine Auswahl von Pol- und Zeitsternen, den mittlern Ort, daneben aber auch die nur von der Zeit abhängigen, also für alle Sterne brauchbaren Reduktionsfaktoren (die A, B, C, D jener Formeln), z. B. für jeden 10. Tag, — ferner für jeden Tag den scheinbaren Ort der Polsterne, und wieder etwa für jeden 10. Tag den scheinbaren Ort der Zeitsterne [a].

Zu 618: *a.* Die gebräuchlichsten astronomischen Jahrbücher habe ich schon in 516 vorgeführt; dagegen mögen hier noch folgende, speciell die Erstellung von Sternephemeriden erleichternde Hilfstafeln Erwähnung finden: „W. **Struve**, Der Ort des Polarsterns von 1819—22. Dorpat 1819 in 8. (Forts. bis 1830 durch K. F. Knorre, Nicolajew 1824), und: Der Ort des Sterns δ Ursæ minoris für 1820—22. Dorpat 1821 in 8. (Forts. bis 1830 durch K. F. Knorre, Nicolajew 1824), — **Bessel**, Tabulæ Regiomontanæ reductionum observationum astronomicarum ab A. 1750 usque ad A. 1850 computatæ. Regiomonti 1830 in 8., — Jakob Philipp **Wolfers** (Minden 1803 — Berlin 1878; von 1827 hinweg für das Berl. Jahrb. beschäftigt), Tabulæ reductionum observationum astronomicarum ab A. 1860 usque ad A. 1880 respondentes. Additæ sunt Tabulæ Regiomontanæ A. 1850—60 respondentes ab ill. Zech continuatæ. Berolini 1858 in 8., — O. **Struve**, Tabulæ quantitatum Besselianarum pro A. 1750 bis 1894. Petropoli 1861—89 in 8., — **Auwers**, Tafeln zur Reduction von Fixstern-Beobachtungen für 1726—50 (Astr. Viert. IV für 1869), — etc.“

XXIV. Die Sternsysteme.

L'univers, pour qui saurait l'embrasser d'un seul coup-dœil, serait un fait unique, une grande vérité. *(d'Alembert.)*

619. Die vielfachen Sterne. — Die ältern Astronomen kannten nur sehr wenige einander ganz nahe erscheinende Sterne, und wandten auch diesen keine besondere Aufmerksamkeit zu, da sie dieselben nur als **optische** Doppelsterne, d. h. als nur für unsern Standpunkt einander scheinbar nahe Sterne, nicht als **physische** Doppelsterne, d. h. als wirklich zusammengehörende oder ein System bildende Sterne betrachteten [a]. Erst **Lambert** empfand, wie schon früher (293) erwähnt wurde, das Bedürfnis, über die in Systemen der letztern Art infolge der allgemeinen Gravitation bestehenden Verhältnisse nachzudenken, und John **Michell** erwarb sich bald darauf das Verdienst, auf die Unwahrscheinlichkeit hinzuweisen, dass gewisse Sterngruppen nur Folge einer zufälligen Sternausstreuung, sowie die sog. Doppelsterne sämtlich nur Folge unserer Stellung zu denselben seien [b].

Zu 619: *a.* Der erste Doppelstern, auf welchen man aufmerksam wurde, scheint ζ Ursæ majoris (Mizar) gewesen zu sein, der schon den Alten durch seinen Begleiter Alcor oder das Reuterchen auffällig geworden war: **Riccioli** bemerkte ihn schon 1650, sodann G. **Kirch** 1700, und **Bradley** bestimmte 1755 die Coordinaten-Differenzen der beiden Komponenten. Von andern Doppelsternen wurden sodann α Capricorni und 61 Cygni um 1659 von **Hevel**, der erstere derselben auch 1690 durch **Flamsteed**, der zweite 1753 durch **Bradley**, — β Scorpii 1678 durch **Cassini**, — α Centauri 1709 durch **Feuillée** in Chili und 1752 durch **Lacaille** am Kap, — γ Virginis und α Geminorum 1719 durch **Bradley**, — etc. aufgefunden und zum Teil vermessen, jedoch ohne dass an eine tiefere Bedeutung gedacht worden wäre. — *b.* Erst **Lambert** gelang es, wie schon angedeutet, in verschiedenen Publikationen, voraus in seinen „Cosmologischen Briefen über die Einrichtung des Weltbaues. Augsburg 1761 in 8.“, richtigere Begriffe über solche Systeme zu verbreiten, — obschon er selbst, infolge eines Trugschlusses, deren wirkliche Existenz eher bezweifelte als annahm. Bald darauf wies John **Michell** in seiner Abhandlung „An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars, from the quantity of

light which they afford us, and the particular circumstances of their situation (Ph. Tr. 1767; cont. 1784)" auf die Unwahrscheinlichkeit hin, dass gewisse Sternhaufen, wie z. B. die Pleyaden (680), und sämtliche Doppelsterne, nur Folgen eines Zufalles oder unserer Stellung seien. Und in der That, wenn man einerseits bedenkt, dass sich aus n über den Himmel verteilten Sternen $\frac{1}{2} n \cdot (n-1)$ optische Doppelsterne bilden lassen, und anderseits die bei gleichmässiger Verteilung plausible Annahme macht, dass sich die Anzahl x derjenigen Sternpaare, deren Distanz höchstens r Sekunden beträgt, zur Gesamtheit ebenso verhalte wie die Fläche eines Kreises des Radius r zur Oberfläche einer Kugel des Radius 206265, so erhält man die Proportion

$$x : \frac{1}{2} n \cdot (n-1) = r^2 \cdot \pi : 4 \cdot 206265^2 \cdot \pi \quad \text{d. h.} \quad x = \frac{n(n-1) \cdot r^2}{8 \cdot 206265^2} \qquad 1$$

Setzt man nun z. B. $n = 100000$, so ergiebt sich

$$x = \overline{8{,}468060} \cdot r^2 = 0{,}02938 \cdot r^2 \qquad 2$$

so dass sich annähernd

r =	1	2	4	8	16	32	.....
x =	0,029	0,118	0,470	1,880	7,521	30,086	.....

entsprechen, und z. B. bis auf 4" Distanz nicht einmal Ein optischer Doppelstern zu erwarten wäre, während man jetzt mehrere Hundert Doppelsterne kennt, welche diese Distanz nicht erreichen.

620. Die Fixsterntrabanten von Christian Mayer. — Angesichts der von Lambert und Michell ausgesprochenen Anschauungen war es unbedingt eine sehr verdienstliche und zeitgemässe Unternehmung, als Christian **Mayer** in den Siebzigerjahren des vorigen Jahrhunderts förmlich nach Doppelsternen zu suchen begann, und man hätte erwarten sollen, dass seine daherigen Erfolge von seinen Zeitgenossen freudig begrüsst worden wären und nicht, wie schon früher (293) erwähnt wurde und hier noch näher mitzuteilen ist, einzelne geglaubt hätten, über seine Nachrichten von entdeckten **Fixsterntrabanten** mit Spott, ja förmlich leidenschaftlich herfallen zu sollen [a].

Zu 620: *a.* Kaum war in der „Mannheimer-Zeitung" vom 20. Oktober 1777 ein Referat über eine Vorlesung erschienen, in welcher Christian **Mayer** (Mesritz in Mähren 1719 — Mannheim 1783; Jesuit; erst Lehrer in Aschaffenburg, dann Prof. math. et phys. Heidelberg und Hofastronom in Mannheim; vgl. „Klüber, Die Sternwarte zu Mannheim. Mannheim 1811 in 4.") der kurpfälzischen Akademie der Wissenschaften angekündigt hatte, dass er im Verlaufe der letzten drei Vierteljahre im Vereine mit seinem Gehilfen Johann **Metzger** (Unterginsbach bei Mainz 1735 — Mannheim? 1780; Jesuit; Obs. Mannheim) etwa ein Hundert Trabanten von Fixsternen aufgefunden habe, als Pater **Hell** im „Wiener-Diarium" über ihn herfiel und seine angeblichen Entdeckungen als optische Illusionen bezeichnete. Als sodann **Mayer** antwortete und in angemessener Weise sein Recht verteidigte, die Bezeichnung „Comes" auch auf den Fixsternhimmel auszudehnen, wurde **Hell** grob und persönlich, und es entspann sich eine bis zum Tode von **Mayer** fortdauernde, höchst unerquickliche Polemik, in der sich ihm leider schliesslich auch noch Nic. **Fuss**

mit seinen „Réflexions sur les satellites des étoiles (Mém. Pet. 1780; deutsch in Berl. Jahrb. 1785)" gegenüberstellte, ja von den Zeitgenossen fast nur **Lichtenberg** seine Arbeit nach ihrem vollen Werte erkannte. Die neuere Zeit ist dagegen **Mayer** gerecht geworden und betrachtet die von ihm in seinen Streitschriften „Gründliche Vertheidigung neuer Beobachtungen von Fixsterntrabanten. Mannheim 1778 in 8., — und: De novis in coelo sidereo phænomenis in miris stellarum fixarum comitibus Manhemii detectis. Manhemii 1779 in 4." niedergelegten Arbeiten, trotz aller Unvollkommenheiten in Beobachtung und Überlegung, als bahnbrechend.

621. Die Arbeiten von Herschel. — Als, bald nach Mayer, Wilh. **Herschel** mit der ihm eigenen grossen Umsicht und Ausdauer, wenn auch anfänglich in ganz anderer Absicht, nach Doppelsternen zu suchen begann, und schon 1782 der Roy. Society einen „Catalogue of double stars" vorlegen konnte, der nicht weniger als 269 Nummern enthielt, verstummten die Gegner, — ja, als er nach und nach diese Zahl auf volle 846 erhöhte und, dank dem von Anfang an befolgten Verfahren, den einen Stern durch Polarcoordinaten auf den andern und dessen Deklinationskreis zu beziehen, schon 1803 in seinem „Account of the changes that have happened during the last 25 years in the relative situation of double stars" den bestimmten Nachweis von der Existenz binärer Systeme liefern konnte, waren natürlich die letzten Zweifel gehoben [a].

Zu 621: *a.* Anfänglich sah Wilh. **Herschel** (vgl. pag. 236 f. von Bessels Vorlesungen), entsprechend den Anschauungen der ältern Astronomen, in solchen Sternpaaren nur „optische" Doppelsterne, suchte sie aber dennoch in der Meinung auf, bei ihnen die durch die jährliche Bewegung der Erde bewirkten relativen Stellungsänderungen am leichtesten konstatieren und auch deren Parallaxe (607) bestimmen zu können; als er dann aber bei planmässigem Aufsuchen so viele derselben fand, dass ihm das bloss Zufällige unwahrscheinlich vorkam, dachte er an wirkliche Zusammengehörigkeit, und fing dann an, nach dieser Richtung zu arbeiten. — Den oben über die Erfolge von W. **Herschel** gemachten Mitteilungen bleibt beizufügen, dass er schon in seiner Vorlage von 1782 angab, es gehören 24 der aufgefundenen Doppelsterne einer **ersten Klasse** an, indem sie nur mit ganz starken Instrumenten getrennt werden können, — 38 einer **zweiten** bis auf 5″ Distanz gehenden, — 46 einer **dritten** mit Distanzen von 5 bis 15″, — 44 einer **vierten** von 15 bis 30″, — 51 einer **fünften** von 30 bis 60″, — und endlich 66 einer **sechsten** von 1 bis 2′ Distanz. Ferner ist zu erwähnen, dass diese Arbeiten erst noch von W. **Herschel** selbst und sodann (wie die Ph. Tr. von 1824 und 1826, sowie die Mem. Astr. Soc. I—X zeigen) ganz in seinem Sinne durch seinen Sohn John **Herschel** und dessen Freund James **South** (London 1785 — Kensington 1867; erst Arzt, dann Privatastronom in Kensington) fleissig weiter fortgeführt wurden, woraus schliesslich ein Material hervorging, das, ganz abgesehen von den vorläufigen Resultaten, für alle künftigen Untersuchungen auf diesem Gebiete eine breite Basis bildet. Endlich ist an die pietätvolle Arbeit „John **Herschel**, A Synopsis of all Sir Will. Herschel's micrometrical measurements and estimated positions and distances of the Double Stars described by him (Mem. Astr. Soc. XXXV

von 1867)" zu erinnern, aber auch nicht zu vergessen, dass ungefähr gleichzeitig mit Vater Herschel sich Nath. **Pigott** (vgl. dessen Note „Double Stars discovered in 1779" in Ph. Tr. 1781) mit den Doppelsternen zu befassen begann, und z. B. an seinem kleinen Passageninstrumente γ Delphini, β Aquarii und ζ Pegasi beobachtete.

622. Die Arbeiten der Struve. — Die Arbeiten von Herschel über die Doppelsterne wurden später durch **Wilhelm Struve** in grossartigem Mass-Stabe fortgesetzt und seine betreffenden Werke, welche, obschon er die frühern Grenzen noch bedeutend enger zog, nicht weniger als 2640 Systeme doppelter und vielfacher Sterne umfassen, werden natürlich noch in höherm Masse als die Arbeiten seines Vorgängers, abgesehen von den bereits abgeworfenen reichen Ergebnissen, für die kommenden Zeiten die Grundlage aller Untersuchungen auf diesem Gebiete bilden [a]. Auch sein Sohn **Otto Struve**, der schon an den Arbeiten des Vaters regen Anteil nahm, hat in derselben Richtung mit grossem Erfolge fortgearbeitet, und z. B. durch Messungen an künstlichen Doppelsternen nicht nur gewisse systematische Fehler mikrometrischer Messungen aufgedeckt, sondern sogar Mittel für ihre nachträgliche Elimination gefunden [b].

Zu 622: *a.* Seine umfangreichen, mit aller erdenklichen Sorgfalt und Umsicht ausgeführten Arbeiten legte **Wilhelm Struve** in zahlreichen Abhandlungen, namentlich aber in den drei grossen Specialwerken „Catalogus novus stellarum duplicium et multiplicium. Dorpati 1827 in fol., — Stellarum duplicium et multiplicium mensuræ micrometricæ, institutæ in Specula Dorpatensi. Petropoli 1837 in fol., — und: Stellarum fixarum, imprimis duplicium et multiplicium, positiones mediæ pro epocha 1830,0 deductæ ex observ. merid. annis 1822 ad 1843 in Specula Dorpatensi institutis. Petropoli 1852 in fol." nieder, je in der Einleitung reichen Detail über Geschichte und angewandte Methoden gebend. Ich kann jedoch auf letztern hier nicht wohl eintreten, sondern muss mich darauf beschränken, anzuführen, dass die von ihm in den „Mensuræ micrometricæ" behandelten 2640 Systeme nur etwa den ersten vier Herschel'schen Klassen entsprechen, indem den Distanzen

0—1"	1—2"	2—4"	4—8"	8—12"	12—16"	16—32"
91	314	535	582	352	231	535

derselben zukommen, — dass **Struve** selbst etwa bei einem Hundert dieser Paare merkliche Positionsveränderungen nachweisen konnte, — und dass nach ihm etwa 60 % aus gleichfarbigen und meist weissen, die übrigen aus verschiedenfarbigen, doch nicht gerade nach ihrer Farbe komplementären Sternen bestehen. — Lord **Lindsay** hat sich das Verdienst erworben, in den „Dun Echt Observatory Publications (Vol. 1 von 1876)" eine Art Index der Struve'schen Messungen zu veröffentlichen. — *b.* Ausser den „Résultats d'observations faites sur des étoiles doubles artificielles (Bull. Pét. 1854 u. f.)", seiner damit zusammenhängenden Publikation „Mesures micrométriques corrigées des étoiles doubles (Obs. Pulkowa IX von 1879)", und seinem „Catalogue revu et corrigé des étoiles doubles et multiples découvertes à Poulkowa (Mém. Pét. 1850)", verdankt man **Otto Struve** noch eine ganze Reihe in den Bull. Pét., den

Monthly Not., der Astr. Viert., etc. erschienener Special-Untersuchungen, auf die wir zum Teil noch in 629 zurückkommen werden. — Es bleibt beizufügen, dass nach Otto Struve auch verschiedene andere Beobachter, wie namentlich **Bigourdan** in seiner von der Pariser Akademie mit dem Valz-Preise bedachten These „Sur l'équation personelle dans les mesures d'étoiles doubles. Paris 1886 in 4.", auf die Notwendigkeit eingehender Berücksichtigung der persönlichen Gleichung, welche wesentlich eine Funktion des Grössenunterschiedes der zu vergleichenden Sterne zu sein scheint, hingewiesen haben.

623. Einige andere Arbeiten. — Ausser den Herschel und Struve haben sich noch verschiedene Astronomen energisch mit den Doppelsternen befasst. Ich muss mich jedoch, um Platz für Darstellung der Bearbeitung des grossen Beobachtungsmateriales zu gewinnen, teils auf einige betreffende litterarische Nachweise beschränken [a], teils auf einige vorläufige Andeutungen, dass auch auf diesem Gebiete die Spektroskopie den Astronomen zu Hilfe gekommen ist [b].

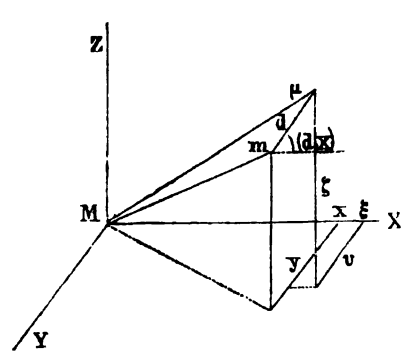
Zu 623: *a.* Von den zahlreichen grössern und kleinern Arbeiten über die Doppelsterne glaube ich noch folgende hier namhaft machen zu sollen: „**Bessel**, Verzeichniss von 257 auf der Königsberger Sternwarte beobachteten Doppelsternen (A. N. 88 von 1825), und: Beobachtungen von Doppelsternen (Berl. Abh. 1833), — James **Dunlop** (Schottland 1800? — Paramatta 1848?; Dir. Obs. Paramatta), Approximate places of double stars in the southern hemisphere (Mem. Astr. Soc. III von 1828; 253 Sterne), — William Rutter **Dawes** (Christs Hospital 1799 — Haddenham 1868; erst Arzt, dann Geistlicher; Besitzer Obs. Haddenham), Observations of double stars (Mem. Astr. Soc. V von 1831; auch später), — J. J. **v. Littrow**, Die Doppelsterne. Wien 1835 in 8., — John **Herschel**, List of test objects, principally double stars (Mem. Astr. Soc. VIII von 1834; höchst unsichere Bestimmungen wegen Veränderlichkeit der Durchsichtigkeit der Luft), und: A catalogue of 10500 multiple and double stars arranged in the order of right ascension (Mem. Astr. Soc. XL von 1874; mutmasslich letzte grössere Arbeit dieses verdienten Mannes), — William Stephen **Jacob** (1813—1862; erst Geodäte der ostind. Kompagnie, dann Dir. Obs. Madras), Double stars observed at Poonah (Mem. Astr. Soc. XVI von 1846; auch später), — **Wichmann**, Beobachtungen von Doppelsternen in den Jahren 1833—47 mit dem Königsberger Heliometer (A. N. Erg. von 1847), — John **Wrottesley** (Wrottesley-Hall in Staffordshire 1798 — ebenda 1867; Lord und Besitzer von Obs. in Blackheath und Wrottesley-Hall), On the results of periodical observations of the positions and distances of 19 of the (double) stars in Sir John Herschels Lists of stars favourably situated for the investigation of parallax. London 1851 in 4., und: A catalogue of the positions and distances of 398 double stars (Mem. Astr. Soc. XXIX von 1861; vgl. auch Proc. Roy. Soc. von 1860), — E. B. **Powell**, Observations of double stars at Madras 1853 bis 1862 (Mem. Astr. Soc. XXV und XXXII von 1856 und 1864), — A. **Secchi**, Catalogo di 1321 stelle doppie misurate col grande equatoriale di Merz all'Osservatorio del Collegio Romano. Roma 1860 in 4. (er stellte sich namentlich die Aufgabe, eine grössere Anzahl der Struve'schen Doppelsterne behufs Vergleichungen neu zu vermessen, und fand so wirklich in dessen ersten vier Klassen 35 + 63 + 51 + 26 = 175 Sternpaare mit unzweifelhafter Bewegung),

— R. **Engelmann**, Messungen von 90 Doppelsternen am sechsfüssigen Refraktor der Leipziger Sternwarte. Leipzig 1865 in 8. (enthält viele historische Angaben), — **Steinheil**, Über die Trennung heller Doppelsterne (A. N. 1525 von 1865; empfiehlt ein Moderator-Glas anzuwenden), — S. W. **Burnham**, Catalogue of 81 double stars discovered with a 6-inch Alvan Clark refractor (Monthly Not. 33 von 1873; diesem ersten Kataloge folgten noch 12 andere, von welchen der letzte mit Nro. 1013 abschloss und 1880 unter dem Titel „Double star observations made 1877—80 at Chicago" in Bd. 47 der Mem. Astr. Soc. erschien; seine Virtuosität bestand im Auffinden der engsten Doppelsterne, und er vermehrte die 622, welche die beiden Struve nach und nach in ihren ersten zwei Klassen gezählt hatten, um volle 520), — W. **Meyer**, Über Doppelsterne. Zürich 1875 in 8. (zu gutem Teil historisch), — **Knobel**, Reference catalogue of astronomical papers and researches (Monthly Not. 36 von 1876), — C. **Flammarion**, Catalogue des étoiles doubles et multiples en mouvement relatif certain, comprenant toutes les observations faites sur chaque couple depuis sa découverte, et les résultats conclus de l'étude des mouvements. Paris 1878 in 8. (eine sehr schätzenswerte, 14000 Positionen umfassende und sich auf 819 Systeme beziehende Zusammenstellung), — H. **Seeliger**, Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Wien 1881 in 4. (Fortsetzung: München 1888), — Ercole **Dembowski** (Mailand 1812 — Gallarate 1881; erst Marine-Offizier, dann Privatastronom in Neapel und Gallarate), Misure micrometriche di stelle doppie e multiple fatte nelle anni 1852 bis 1878. Roma 1883—84, 2 Vol. in 4. (umfasst ein ungeheures, zum Teil schon von 1852 hinweg in A. N. publiziertes Material, das für die Folgezeit von grösster Wichtigkeit werden wird), — Francis P. **Leavenworth** (Mt. Vernon in Indiana 1858 geb.; Dir. Obs. Haverford College), Micrometical measurements of double Stars and other observations made at the Haverford College Observatory (1889) in 8., — etc." — *b.* Es ist nämlich in letzter Zeit **Vogel** und **Pickering** mehrfach gelungen, nachzuweisen, dass die Photographien der Spectra gewisser, früher als einfach geltender Sterne periodische Verschiebungen oder Verdopplungen einzelner Linien zeigen, welche sich kaum anders erklären lassen als durch die Annahme, dass zwei sehr nahe Sterne sich um ihren Schwerpunkt drehen, und so gegenüber dem Beobachter ein periodisches Annähern und Entfernen eintritt, welches sich durch Verschieben der Linien feststellen und messen lässt. Es sind also auf solche Weise Doppelsterne entdeckt worden, welche durch die gewöhnlichen optischen Mittel nicht getrennt werden konnten. Vgl. 629.

624. Die nötigen Vorbereitungen auf die Bestimmung der Doppelsternbahnen. — Die Lösung der Aufgabe, die Bahn zu bestimmen, welche der Eine zweier Doppelsterne um den Andern beschreibt, beruht vor allem auf der Annahme, es herrsche auch in diesen binären Systemen das Gravitationsgesetz, und es sei daher die gesuchte Bahn eine Ellipse, in deren Einem Brennpunkte der als ruhend gedachte Stern stehe [a]. — Dabei ist nicht zu übersehen, dass unsere Messungen sich nicht direkt auf diese Ellipse beziehen, sondern auf ihre Projektion auf eine zur Gesichtslinie nach dem als ruhend gedachten Sterne senkrechte Ebene, so dass die Be-

ziehungen zwischen derselben und der Projektion aufzusuchen sind [b]. — Endlich darf nicht vergessen werden, dass die gemessenen, in der Regel der Zeit nach relativ weit voneinander entfernten Positionen vor ihrer Verwendung von dem Einfluss der Präcession zu befreien sind [c].

Zu 624: *a.* Bezeichnet man die Massen zweier Sterne mit m und μ, ihre Coordinaten auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem mit x y z, $\xi\, \upsilon\, \zeta$, ihren Abstand mit d, und die Anziehung der Masseneinheit in der Distanz 1 wie früher (481) mit f^2, so sind die Differentialgleichungen für die Bewegung des ersten Sternes infolge Anziehung des zweiten nach dem Gravitationsgesetze



$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = \frac{f^2 \mu}{d^2} \cdot \mathrm{Co}\,(d, x) = \frac{f^2 \mu (\xi - x)}{d^3}$$

$$\frac{d^2 y}{d\,t^2} = \frac{f^2 \mu (\upsilon - y)}{d^3}, \quad \frac{d^2 z}{d\,t^2} = \frac{f^2 \mu (\zeta - z)}{d^3} \qquad 1$$

Entsprechende Gleichungen haben für den zweiten Stern (für den jedoch der Sinn der Anziehung der entgegengesetzte ist) statt, und wenn man erstere von letztern abzieht, so erhält man für die relative Bewegung des zweiten Sternes um den ersten die Gleichungen

$$\frac{d^2 (\xi - x)}{d\,t^2} + \frac{f^2 \cdot (\mu + m) \cdot (\xi - x)}{d^3} = 0$$

$$\frac{d^2 (\upsilon - y)}{d\,t^2} + \frac{f^2 \cdot (\mu + m) \cdot (\upsilon - y)}{d^3} = 0 \qquad 2$$

$$\frac{d^2 (\zeta - z)}{d\,t^2} + \frac{f^2 \cdot (\mu + m) \cdot (\zeta - z)}{d^3} = 0$$

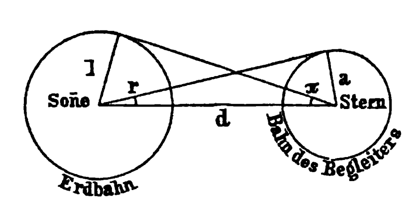
welche, sofern man sich durch m ein Parallelsystem gelegt denkt, ganz mit den Gleichungen 482 : 1 der elliptischen Bewegung übereinstimmen. Es beschreibt also, wenigstens scheinbar, μ um m als Brennpunkt eine Ellipse, und es bestehen, unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungen, auch die den 482 : 11 und 483 : 1 entsprechenden Gleichungen

$$r^2 \cdot \frac{d\,v}{d\,t} = k \qquad T = \frac{2 \cdot a^{3/2} \cdot \pi}{f \cdot \sqrt{m + \mu}} \qquad 3$$

Die 3' sagt uns, dass auch bei der Doppelsternbewegung der Radius vector in jeder Zeiteinheit ein konstantes Flächenelement überstreicht, und die 3'' erlaubt uns folgende eigentümliche, zuerst von **Bessel** (vgl. Mon. Corr. 26 von 1812, pag. 148) durchgeführte Betrachtung: Wählen wir für T, a, m und μ Erdjahr, Sonnendistanz und Sonnenmasse je als Einheit, so ist (da 3'' auch für die Bewegung der Erde um die Sonne gilt, und für diese $T = 1$, $a = 1$ und $m + \mu = 1$ ist) $1 = \pi : f$, so dass 3'' in

$$T = a^{3/2} : \sqrt{m + \mu} \qquad 4$$

übergeht. Setzt man aber die jährliche Parallaxe des betreffenden Doppelsternes gleich π, die scheinbare mittlere Distanz der beiden Sterne voneinander



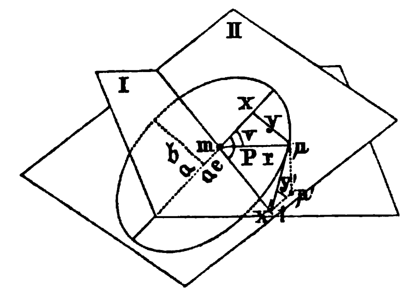
gleich r, und ihre Distanz von der Sonne gleich d, so hat man $\mathrm{Si}\,\pi = 1 : d$ und $\mathrm{Si}\,r = a : d$, also $a = \mathrm{Si}\,r : \mathrm{Si}\,\pi$, oder

$$\pi \cdot (m + \mu)^{1/2} = r : T^{2/3} \qquad 5$$

Macht man daher die Annahme, dass $m + \mu$ der als Einheit gewählten Sonnenmasse nahe komme, so erhält man nach 5 als sog. **hypothetische Parallaxe** des Doppelsternes

$$\pi = r : T^{2/3} \qquad 6$$

und dass diese Annahme sich von der Wahrheit kaum sehr weit entfernt, hat sich bereits mehrmals gezeigt: So ergab sich **Bessel**, als er für 61 Cygni in obige Formel $r = 25''$ und $T = 400$ einsetzte, $\pi = 0'',46$, während ihm (607) viele Jahre später die direkte Messung $0'',37$ lieferte. — *b.* Die von μ um m beschriebene Ellipse lässt sich (73) gewissermassen in zwei Ellipsen auflösen, welche m und μ um ihren Schwerpunkt beschreiben; jedoch wollen wir dieses vorläufig nicht weiter verfolgen, sondern die oben erwähnten Beziehungen zwischen jener Ellipse und ihrer Projektion ins Auge fassen: Stellt I die zum Gesichtsstrahl senkrechte Ebene dar, in welcher die scheinbare Bahn liegt, II dagegen die Ebene, in welcher die von μ um m beschriebene relative Bahn sich wirklich befindet, so geht die Knotenlinie von II in I notwendig durch den Brennpunkt m der relativen Bahn, von welcher jeder Punkt μ durch die gewöhnlichen Mittelpunktscoordinaten x, y gegeben, seine Projektion μ' auf I aber durch x', y' auf m als Anfangspunkt und die Knotenlinie als Axe bezogen werden mag. Man hat somit die Beziehungen



$$\mathfrak{a}^2 \cdot y^2 + \mathfrak{b}^2 \cdot x^2 = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 \qquad r \cdot \mathrm{Si}\,v = y \qquad r \cdot \mathrm{Co}\,v = x - \mathfrak{a} \cdot e \qquad 7$$

$$x' = r \cdot \mathrm{Co}(P - v) = (x - \mathfrak{a}e)\,\mathrm{Co}\,P + y \cdot \mathrm{Si}\,P \qquad y' \cdot \mathrm{Se}\,i = (x - \mathfrak{a}e) \cdot \mathrm{Si}\,P - y \cdot \mathrm{Co}\,P \qquad 8$$

Aus den 8 folgen aber

$$x = \mathfrak{a} \cdot e + x' \cdot \mathrm{Co}\,P + y' \cdot \mathrm{Si}\,P \cdot \mathrm{Se}\,i \qquad y = x' \cdot \mathrm{Si}\,P - y' \cdot \mathrm{Co}\,P \cdot \mathrm{Se}\,i \qquad 9$$

und durch Substitution dieser Werte in 7' ergiebt sich

$$0 = a \cdot y'^2 + b \cdot y' \cdot x' + c \cdot x'^2 + d \cdot y' + e \cdot x' + f \qquad 10$$

wo

$$a = (\mathfrak{a}^2 \cdot \mathrm{Co}^2 P + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathrm{Si}^2 P) \cdot \mathrm{Se}^2 i \qquad b = -2\,\mathrm{Si}\,P \cdot \mathrm{Co}\,P \cdot \mathrm{Se}\,i \cdot (\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2)$$

$$c = \mathfrak{a}^2 \cdot \mathrm{Si}^2 P + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathrm{Co}^2 P \qquad d = 2\mathfrak{a} \cdot e \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot \mathrm{Si}\,P \cdot \mathrm{Se}\,i \qquad 11$$

$$e = 2\mathfrak{a} \cdot e \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot \mathrm{Co}\,P \qquad f = -\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot (1 - e^2) = -\mathfrak{b}^4$$

Da $\mathrm{Si}^2 P + \mathrm{Co}^2 P = 1$, also $\mathrm{Si}^4 P + \mathrm{Co}^4 P = 1 - 2\,\mathrm{Si}^2 P \cdot \mathrm{Co}^2 P$, so findet man unter Benutzung von 73 successive

$$g = -4\,\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 \cdot \mathrm{Se}^2 i \qquad k^2 = (\mathfrak{a}^2 \cdot \mathbf{A} + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathbf{B})^2 + g$$

wo $\mathbf{A} = 1 + \mathrm{Co}^2 P \cdot \mathrm{Tg}^2 i \qquad \mathbf{B} = 1 + \mathrm{Si}^2 P \cdot \mathrm{Tg}^2 i$

$$h = -4\mathfrak{a}^4 \cdot \mathfrak{b}^4 \cdot e^2 \cdot \mathrm{Se}^2 i \qquad A = -\mathfrak{a} \cdot e \cdot \mathrm{Co}\,P \qquad B = -\mathfrak{a} \cdot e \cdot \mathrm{Si}\,P \cdot \mathrm{Co}\,i \qquad 12$$

$$\mathfrak{a}'^2 = \tfrac{1}{2} \cdot (\mathfrak{a}^2 \cdot \mathbf{A} + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathbf{B} + k) \cdot \mathrm{Co}^2 i \qquad \mathfrak{b}'^2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}^2 \cdot \mathbf{A} + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathbf{B} - k) \cdot \mathrm{Co}^2 i$$

$$\mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{b}'^2 = (\mathfrak{a}^2 \cdot \mathbf{A} + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathrm{Co}^2 i, \quad \mathfrak{a}'^2 - \mathfrak{b}'^2 = k^2 \cdot \mathrm{Co}^2 i, \quad \mathrm{Tg}\,\varphi = (a - c - k) : b$$

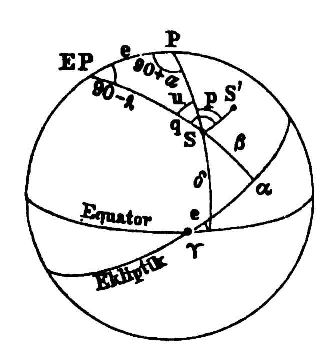
Bezeichnet aber P' die Projektion des Winkels P auf I, so ist

$$\text{Tg } P' = \text{Tg } P \cdot \text{Co } i \qquad 13$$

und es wird daher P' nur gleich φ werden können, wenn die Gleichheit $\text{Tg } P \cdot \text{Co } i = (a - c - k) : b$ oder $k = a - c - b \cdot \text{Tg } P \cdot \text{Co } i$ besteht, aus der durch Quadrieren mit Hilfe von 73 : 9

$$0 = b^2 \cdot \text{Co}^2 P - b^2 \cdot \text{Si}^2 P \cdot \text{Co}^2 i + 2 b \cdot (a - c) \cdot \text{Si } P \cdot \text{Co } P \cdot \text{Co } i \qquad 14$$

folgt, — eine Gleichheit, die nach den Werten 11 nur für $i = 0$ vorhanden ist. — Aus 12' folgt nun das für sich klare Resultat, dass die Projektion der Ellipse wieder eine Ellipse ist, — aus 14 aber, dass die Axe der letztern nur für $i = 0$ mit der Projektion der Axe der erstern zusammenfällt, also auch (während offenbar die Projektion des Mittelpunktes den Mittelpunkt giebt) der Brennpunkt der neuen Ellipse nicht mit dem Brennpunkte der ursprünglichen Ellipse zusammenfällt. Strenge genommen wird allerdings der 14 auch Genüge geleistet, wenn der gemeinschaftliche Faktor b gleich Null wird, d. h. in den speciellen Fällen $P = 0$ und $P = 90°$; aber, wenn auch in diesen beiden Fällen die Axe der Projektion die Projektion der Axe ist, so hat ein Zusammenfallen der Brennpunkte doch nicht statt, da in ersterm Falle die kleine, im zweiten die grosse Axe durch das Projizieren verkleinert, also die Excentricität verändert wird. — *c.* Die sog. **Position** p des Begleiters wird gewöhnlich so gezählt, dass man von N nach E geht, und dabei heisst die Bewegung des Begleiters **direkt** oder **retrograd**, je nachdem die Position mit der Zeit zu- oder abnimmt. Würde nun der Begleiter ruhen, so würde allerdings seine Position q in Beziehung auf den Breitenkreis wenigstens sehr nahe konstant sein, die Position p in Beziehung auf den Deklinationskreis aber wegen der Präcession dennoch variieren, und es müssen daher die gemessenen p, wenn sie vergleichbar werden sollen, jeweilen auf eine bestimmte Epoche reduziert werden, wozu folgende Rechnung Anleitung giebt: Vorerst ist



$$p + u = q \quad \text{also} \quad dp : dt = - du : dt \qquad 15$$

während aus Dreieck P — EP — S die Beziehungen

$$\text{Co } \delta \cdot \text{Si } u = \text{Si } e \cdot \text{Co } \lambda \qquad \text{Co } \delta \cdot \text{Co } u = \text{Co } e \cdot \text{Co } \beta - \text{Si } e \cdot \text{Si } \beta \cdot \text{Si } \lambda$$
$$\text{Co } \delta \cdot \text{Si } \alpha = \text{Co } \beta \cdot \text{Co } e \cdot \text{Si } \lambda - \text{Si } \beta \cdot \text{Si } e \qquad 16$$

folgen. Aus den 16 ergiebt sich aber

$$\text{Ct } u = \text{Ct } e \cdot \text{Co } \beta \cdot \text{Se } \lambda - \text{Si } \beta \cdot \text{Tg } \lambda$$

woraus, da e und β als konstant angesehen werden dürfen, durch Differentiation

$$\text{Cs}^2 u \cdot du = \text{Si } \beta \cdot \text{Se}^2 \lambda \cdot d\lambda - \text{Ct } e \cdot \text{Co } \beta \cdot \text{Si } \lambda \cdot \text{Se}^2 \lambda \cdot d\lambda$$

erhalten wird, und es ist somit nach 15 mit Hilfe von 16

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\text{Si } \alpha}{\text{Co } \delta} \cdot \frac{d\lambda}{dt} \cdot \text{Si } e \quad \text{wo} \quad \frac{d\lambda}{dt} \cdot \text{Si } e = 20'',0564 - 0'',000086 \cdot t \qquad 17$$

nach **Peters** den Jahresbetrag für 1850 + t giebt. Um daher den zur Zeit 1850 + t gemessenen Winkel p auf die Zeit 1850 + t' zu reduzieren, hat man einerseits das konstante Glied von 17'' für jedes der Jahre t' — t beizufügen,

und anderseits das zweite Glied $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \ldots + (t' - t - \frac{1}{2})$ mal, also im ganzen $\frac{1}{2} \cdot (t' - t)^2$ mal abzurechnen, und erhält somit nach 17 die Korrektion der Position

$$\Delta p = [20'',0564 \cdot (t' - t) - 0,000048 \cdot (t' - t)^2] \cdot \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Se}\,\delta \qquad 18$$

Statt jedoch nach dieser Formel für jede einzelne Beobachtung zu rechnen, genügt es vollständig, den sekulären Betrag für jeden Stern nach der aus 18 für $t' - t = 100$ folgenden Formel

$$\Delta p' = 0^{\circ},557 \cdot \text{Si}\,\alpha \cdot \text{Se}\,\delta \qquad 19$$

zu berechnen, und dann jeder Beobachtung die ihrer Zeit entsprechenden Proportionalteile beizufügen.

625. Die konstruktiven Methoden für die Bahnbestimmung. — Um eine vorläufige Übersicht über die Bahnverhältnisse eines während längerer Zeit beobachteten Doppelsternes zu gewinnen, giebt es verschiedene konstruktive Methoden, und diese können sogar in einzelnen Fällen, wo die Positionen einen grossen Teil der Umdrehung beschlagen, zu ziemlich sichern Resultaten führen [a].

Zu 625: *a.* Zu den am frühesten und auch seither regelmässigst beobachteten Doppelsternen gehört der am linken Hinterfusse des grossen Bären liegende Stern ξ, dessen beide Komponenten 4. und 5. Grösse sind, und für den ich den Verzeichnissen von Engelmann und Flammarion eine Reihe von 67 sich über den Zeitraum von 1781 bis 1873 verteilende Angaben über die Polarcoordinaten r und v des Begleiters entnehmen konnte, von welcher ich das folgende Specimen beifüge:

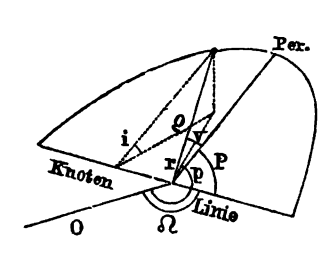
Beobachter	Zeit	r	v Beob.	v 1850	$-\frac{dv}{dt}$	$-k$	r'
Herschel	1781,97	—	143°,78	143°,87	3°,40	—	2'',48
—	1802,09	—	97,52	97,58	3,50	—	2,45
—	1804,08	—	92,63	92,69	3,91	—	2,32
Struve	1821,78	1'',92	264,70	264,74	6,54	24,10	1,79
—	1828,23	1,89	220,80	220,83	6,76	23,83	1,76
Bessel	1831,39	1,93	199,02	199,05	6,50	24,21	1,80
Encke	1837,53	2,50	167,38	167,40	5,10	31,88	2,03
Mädler	1843,39	2,37	143,67	143,68	3,44	19,32	2,47
—	1845,42	2,48	136,72	136,73	3,01	18,51	2,64
—	1851,28	2,98	123,25	123,25	2,13	18,92	3,14
—	1856,42	2,97	112,76	112,75	2,03	17,91	3,21
—	1858,42	2,98	108,93	108,92	2,18	19,36	3,10
Dembowski	1862,99	2,68	97,53	97,51	3,00	21,55	2,64
—	1864,83	2,23	91,96	91,94	4,09	20,34	2,26
Secchi	1866,31	2,26	86,55	86,53	5,02	25,64	2,04
Wilson	1873,21	0,90	3,93	3,90	22,24	18,01	0,97

für welches die v nach Massgabe des für ξ Urs. maj. ($\text{Æ} = 167^{\circ}\,31'$; $D = 32^{\circ}\,22'$) aus 624 : 19 folgenden Wertes $\Delta p' = 0^{\circ},135$ auf 1850 reduziert wurden.

— Die Positionen können mit ziemlicher Sicherheit bestimmt werden, während dagegen für die schwer erhältlichen Distanzen eine etwelche Ausgleichung wünschbar ist, die auf folgende Weise erzielt werden kann: Aus den obigen Angaben folgt z. B., dass von 1856,42 bis 1858,42 die Position um 3°,83 abnahm, also für Mitte 1857 der jährliche Betrag $dv : dt = -1°,92$ war, und ähnliche Bestimmungen konnten aus der vollständigen Reihe noch weitere 46 erhalten werden, aus welchen sich eine Mittelreihe bilden liess, der die obigen Werte von $dv : dt$ entnommen sind. Aus den Zahlen dieser Mittelreihe und den ihnen entsprechenden Werten von r wurden sodann (entsprechend 482 : 8) nach $k = r^2 \cdot dv : dt$ ebensoviele Werte für die doppelte Flächengeschwindigkeit k berechnet, — aus diesen der Mittelwert $k = 20,97$ erhalten, — und nun rückwärts nach $r' = \sqrt{k : (dv : dt)}$ verbesserte Werte für die Distanz gefunden. — Nach dieser Vorbereitung kann nun zur konstruktiven Bestimmung der Bahnelemente in folgender Weise vorgegangen werden: Unter Anwendung der auf die Epoche **reduzierten** Positionen v und der **berechneten** Distanzen r' trägt man eine Reihe von Punkten der scheinbaren Bahn (z. B. 1" durch 4^cm^ darstellend) auf, — legt durch mehrere Systeme von je 5 dieser Punkte nach geometrischen Methoden (z. B. mit Hilfe der Sätze von Pascal und Brianchon in 57) je eine Ellipse, — wählt von diesen diejenige aus, welche sich der Gesamtheit der Punkte am besten anschliesst, — ermittelt durch Versuch, inwieweit sich durch eine kleine Verschiebung oder Axenänderung ein noch etwas besserer Anschluss erreichen lässt, — und erhält so schliesslich die scheinbare Bahnellipse mit ihren Axen. Da nun der Mittelpunkt dieser Hilfsellipse mit der Projektion des Mittelpunktes der wahren Bahnellipse und der Pol der Positionen mit deren Brennpunkt zusammenfällt, so ergiebt die Verbindung dieser beiden Punkte die **Projektion der grossen Axe**, und eine durch den Mittelpunkt geführte Parallele zu den Scheiteltangenten die **Projektion der kleinen Axe.** Da ferner durch Projektion das Verhältnis der Teile einer Geraden nicht verändert wird, und aus der für ξ Urs. maj. nach obigen Vorschriften erhaltenen Zeichnung (vgl. Verz. 210) für die Projektion der halben grossen Axe 1",9375, für die Projektion der Excentricität aber 0",7375 folgte, so ist somit $e = 0,3806$, $\varphi = \text{Asi}\, e = 22^\circ\, 22^1/_2{}'$, $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \text{Se}\, \varphi = 1,0815$. — Zieht man nun, wie dies z. B. **Flammarion** in seinen „Etudes et lectures (VI von 1875)" empfahl, zu der Projektion der kleinen Axe ein System von parallelen Sehnen, — vergrössert jede derselben im Verhältnisse $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$, — und zieht durch die erhaltenen Punkte eine Kurve, so stellt diese notwendig die Projektion eines Kreises dar, welcher in der Ebene der Bahnellipse über ihrer grossen Axe beschrieben ist, — muss also eine Ellipse sein, deren grosse Axe die Projektion des einzigen Durchmessers jenes Kreises ist, der beim projizieren nicht verkürzt wurde, — also einerseits die **Länge der grossen Axe** der Bahnellipse ergiebt, und anderseits, indem man durch den Pol eine Parallele zu ihr zieht, die **Knotenlinie** bestimmt. Es ergab sich aus der Zeichnung, wenn ☊ die Position des (allerdings willkürlich) als aufsteigend betrachteten Knotens bezeichnet, $\mathfrak{a} = 2'',625$ und ☊ $= 102°,8$. Die Coordinaten des Mittelpunktes in Beziehung auf Pol und Knotenlinie fanden sich $A = 0'',580$ und $B = -0'',450$, also hat man (nach 624 : 12), da obige Daten $\mathfrak{a} \cdot e = 0'',998$ ergeben, $P = 128°,6$ und $i = 56°,3$. Ferner folgt, da $dv : dt$ in Graden ausgedrückt wurde, die Umlaufszeit

$$U = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \cdot \pi : (^1/_2\, k) = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{b}' \cdot 360^\circ : k \qquad 1$$

wo nach Zeichnung $a' = 2'',50$, $b' = 1'',41$ und nach oben $k = 20,97$ ist, was $U = 60^a,515$ ergiebt. Anderseits war nach Herschel 1781,97 die Position $143^0,87$ und nach Mädler 1843,39 ebendieselbe $143^0,68$, so dass die Position sich in $61^a,42$ um volle $360^0 + 0^0,19$ verminderte; da nun die jährliche Verminderung der Position für 1843 gleich $3^0,44$ gefunden wurde, so entsprechen die $0^0,19$ nahe $0^a,06$, und es war also die gleiche Position $61,42 - 0,06 = 61^a,36$ später wieder vorhanden. Auf ähnliche Weise geben die für 1802,09 und 1804,08 erhaltenen Positionen in Vergleichung mit 1862,99 und 1864,83 die Umlaufszeiten 60,88 und 60,56, so dass im Mittel aus allen dreien 60,933 folgt, und man darf daher wohl im Mittel aus dieser Zahl und der oben erhaltenen $U = 60^a,724$ setzen. — Aus der Zeichnung folgt ferner die Position des Aphels gleich $136^0,3$, während Mädler 1845,42 (wo $dv : dt = 3^0,01$ war) für die Position des Begleiters $136^0,73$ erhalten hatte, wie wenn letzterer etwa 1845,56 durch sein Aphel passierte, und hievon $\frac{1}{2} U$ abziehend, ergiebt sich $T = 1815,20$ als Durchgangszeit durch das Perihel. Endlich ist die mittlere jährliche Bewegung $\mu = 360^0 : U = 5^0,928$ und zwar offenbar retrograd. Diese Elemente, welche ich 1877 (vgl. Mitth. 44) publizierte, stimmen mit den seither (vgl. 628) von Dunèr auf dem Rechnungswege erhaltenen ganz ordentlich überein. — Sind die Elemente einer Doppelsternbahn bestimmt, so lässt sich leicht mit ihrer Hilfe eine Ephemeride erstellen, d. h. für eine gegebene Zeit t der Positionswinkel p und die scheinbare Distanz r berechnen. Bezeichnet nämlich u die excentrische Anomalie, so hat man (entsprechend 482)



$$u - e \cdot \mathrm{Si}\, u = \mu (t - T) \qquad \mathrm{Tg}\, \frac{v}{2} = \mathrm{Tg}\, \frac{u}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \qquad 2$$

wo μ die mittlere jährliche Bewegung bezeichnet, — sodann aus der Figur

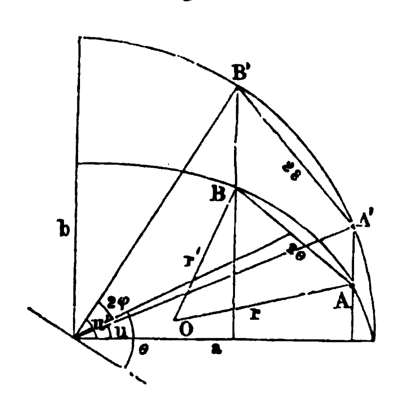
$$\mathrm{Tg}\,(p - \Omega) = \mathrm{Tg}\,(v + P) \cdot \mathrm{Co}\, i, \quad r = a\,(1 - e \cdot \mathrm{Co}\, u) \cdot \mathrm{Co}\,(v + P) \cdot \mathrm{Se}\,(p - \Omega) \quad 3$$

und kann somit successive u, v, p, r berechnen. So z. B. erhält man für $t = 1875,31$ aus obigen Elementen $u = 5^0\, 40'$, $v = 8^0\, 27'$, $p = 311^0\, 46'$, $r = 1'',364$, während **Schiaparelli** (A. N. 2133 von 1877) durch eine zu jener Zeit vorgenommene Messung $p = 317^0\, 5'$ und $r = 1'',312$ fand. — Für andere, wenigstens zum Teil graphische Verfahren vgl. z. B. ausser der schon angeführten Schrift von Flammarion: „John **Herschel**, On the investigation of the orbits of revolving double stars (Mem. Astr. Soc. V von 1833), — Em. **Reuss**, De la détermination des orbites des étoiles doubles par une méthode purement graphique (Annal. des Vosges 1867), — J. M. **Wilson**, A geometrical investigation of the orbit of a double star (Monthly Not. 33 von 1873), — Serge de **Glasenapp** (Vishni-Wolotschok 1848 geb., Prof. astr. und Dir. Obs. Petersburg), On a graphical method for determining the orbit of a binary star (Monthly Not. 49 von 1889), — etc."

626. Die Rechnungsmethode von Savary. — Im allgemeinen ist auch für Bahnbestimmung von Doppelsternen die Rechnung der Konstruktion vorzuziehen und es hat **Savary** durch die in seiner Abhandlung „Sur la détermination des orbites que dé-

crivent autour de leur centre de gravité deux étoiles très rapprochées l'une de l'autre (Conn. d. t. 1830, ausgegeben 1827)" niedergelegte Rechnungsmethode unzweifelhaft der Astronomie einen grossen Dienst erwiesen [a].

Zu 626: *a.* Die Methode von **Savary** besteht, nach Elimination einiger in seiner Abhandlung unterlaufenen Druckfehler und Weitschweifigkeiten, wesentlich in folgendem: Es sei O der Ort des als unbeweglich gedachten Sternes oder also die Projektion des Brennpunktes der wahren Bahn, während der als beweglich gedachte Begleiter in der Zeit T scheinbar von A nach B geht und sein Radius vector r dabei, weil durch projizieren das Flächenverhältnis nicht verändert wird, eine dieser Zeit proportionale Fläche überstreicht, deren Duplum gleich $n \cdot T$ gesetzt werden kann, falls n eine Konstante bezeichnet. Zieht man von letzterm $S = r \cdot r' \cdot \mathrm{Si}\,(r, r')$ ab, so erhält man für die Doppelfläche des von der Sehne 2 e bestimmten Ellipsensegmentes den Wert $n \cdot T - S$. Letztere Grösse

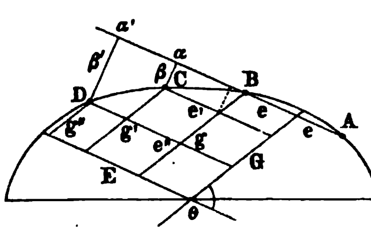


kann man aber auch als Projektion des von 2 ε bestimmten Kreissegmentes berechnen, wodurch man, wenn φ die halbe Differenz der excentrischen Anomalien und c das Produkt der Halbaxen der scheinbaren Ellipse bezeichnet, den Wert $2\,[a^2 \cdot \varphi - \tfrac{1}{2}\, a^2 \cdot \mathrm{Si}\,2\varphi] \cdot b : a = c \cdot (2\varphi - \mathrm{Si}\,2\varphi)$ erhält, und es muss somit

$$n \cdot T - S = c \cdot (2\varphi - \mathrm{Si}\,2\varphi) \qquad 1$$

sein, sowie entsprechend, wenn der Begleiter in den Zeiten T' und T'' von B nach zwei andern Positionen C und D gebracht wird,

$$n \cdot T' - S' = c \cdot (2\varphi' - \mathrm{Si}\,2\varphi') \qquad n \cdot T'' - S'' = c \cdot (2\varphi'' - \mathrm{Si}\,2\varphi'') \qquad 2$$



Werden aber diese zwei letztern Positionen durch rechtwinklige Coordinaten α, β auf die Sehne 2 e und ihre Mitte bezogen, und bezeichnet 2 E den zu 2 e parallelen, 2 G den dazu konjugierten Durchmesser, $\theta = \mathrm{Act}\,s$ den Winkel der beiden letztern, — sind ferner 2 e', 2 e'', 2 g', 2 g'' die jenen Positionen entsprechenden Parallelsehnen, und endlich ψ und ψ' die Werte, welche φ annimmt, wenn 2 e in 2 e' und 2 e'' übergeht, so hat man

$$2\varphi' = u'' - u' = u'' - \tfrac{1}{2}(u' + u) - [u' - \tfrac{1}{2}(u' + u)] = \psi - \varphi \text{ und } 2\varphi'' = \psi' - \varphi \qquad 3$$

$$\mathrm{Si}\,\varphi = \varepsilon : a = e : E \qquad \mathrm{Co}\,\varphi = g : G \qquad \mathrm{Co}\,\psi = g' : G \qquad \mathrm{Co}\,\psi' = g'' : G$$
$$\mathrm{Si}\,\psi = e' : E = [\alpha - \beta \cdot \mathrm{Tg}\,(90 - \theta)] : E = (\alpha - \beta \cdot s) : E, \quad \mathrm{Si}\,\psi' = (\alpha' - \beta' \cdot s) : E \qquad 4$$

$$\beta = (g - g') \cdot \mathrm{Co}\,(90^0 - \theta) = (g - g') : \sqrt{1 + s^2} \qquad \beta' = (g - g'') : \sqrt{1 + s^2} \qquad 5$$

und somit unter Benutzung von 74 : 23

$$c = a \cdot b = E \cdot G \cdot \mathrm{Si}\,\theta = \frac{E \cdot G \cdot \beta}{g - g'} = \frac{e \cdot \beta}{\mathrm{Si}\,\varphi \cdot (\mathrm{Co}\,\varphi - \mathrm{Co}\,\psi)} = \frac{e \cdot \beta'}{\mathrm{Si}\,\varphi\,(\mathrm{Co}\,\varphi - \mathrm{Co}\,\psi')} \qquad 6$$

Aus Gleichsetzung der letztern zwei Werte von c folgt aber

$$(\beta - \beta') \cdot \text{Co}\,\varphi = \beta \cdot \text{Co}\,\psi' - \beta' \cdot \text{Co}\,\psi \qquad 7$$

Setzt man nun mit Savary

$$\frac{\beta \cdot \alpha' - \beta' \cdot \alpha}{(\beta - \beta') \cdot e} = \pi \qquad \frac{\beta \cdot \alpha' - \beta' \cdot \alpha}{(\beta + \beta') \cdot e} = \pi' \qquad \gamma = \pi' \cdot \sqrt{\frac{\pi^2 - 1}{\pi^2 - \pi'^2}} \qquad 8$$

also

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{\beta + \beta'}{\beta - \beta'} \qquad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\pi + \pi'}{\pi - \pi'} \qquad \frac{\beta - \beta'}{2 \cdot \sqrt{\beta \cdot \beta'}} = \frac{\pi'}{\sqrt{\pi^2 - \pi'^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\pi^2 - 1}} \qquad 9$$

so erhält man mit Hilfe von 4

$$(\beta - \beta') \cdot \pi \cdot \text{Si}\,\varphi = (\beta \cdot \alpha' - \beta' \cdot \alpha) \cdot \text{Si}\,\varphi : e = (\beta \cdot \alpha' - \beta' \cdot \alpha) : E = \beta \cdot \text{Si}\,\psi' - \beta' \cdot \text{Si}\,\psi \qquad 10$$

und durch Quadrieren und Addieren von 7 und 10

$$(\pi^2 - 1) \cdot \text{Si}^2\,\varphi \cdot (\beta - \beta')^2 = 4\beta \cdot \beta' \cdot \text{Si}^2\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi) \quad \text{oder} \quad \text{Si}\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi) = \gamma \cdot \text{Si}\,\varphi \qquad 11$$

Ferner aus 10 : 7 mit Hilfe von 9

$$\pi \cdot \text{Tg}\,\varphi = \frac{\beta \cdot \text{Si}\,\psi' - \beta' \cdot \text{Si}\,\psi}{\beta \cdot \text{Co}\,\psi' - \beta' \cdot \text{Co}\,\psi} = \frac{\pi \cdot (\text{Si}\,\psi' - \text{Si}\,\psi) + \pi'\,(\text{Si}\,\psi' + \text{Si}\,\psi)}{\pi \cdot (\text{Co}\,\psi' - \text{Co}\,\psi) + \pi'\,(\text{Co}\,\psi' + \text{Co}\,\psi)} =$$

$$= \frac{\pi' \cdot \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' + \psi) + \pi \cdot \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi)}{\pi' - \pi \cdot \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' + \psi) \cdot \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi)}$$

oder

$$\text{Tg}\,\frac{\psi' + \psi}{2} = \frac{\pi' \cdot \text{Tg}\,\varphi - \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi)}{\pi' + \pi^2 \cdot \text{Tg}\,\varphi \cdot \text{Tg}\,{}^1/_2\,(\psi' - \psi)} \cdot \pi \qquad 12$$

so dass nach 11 und 12 schliesslich die ψ' und ψ berechnet werden können falls man die π, π' und φ kennt. — Bezeichnet man die Funktion $\alpha - \text{Si}\,\alpha$ durch $f(\alpha)$, so erhält man, je nachdem man 1 durch 2' oder 2'' dividiert, mit Hilfe von 3

$$n = \frac{S' \cdot f(2\varphi) - S \cdot f(\psi - \varphi)}{T' \cdot f(2\varphi) - T \cdot f(\psi - \varphi)} = \frac{S'' \cdot f(2\varphi) - S \cdot f(\psi' - \varphi)}{T'' \cdot f(2\varphi) - T \cdot f(\psi' - \varphi)} \qquad 13$$

und hieraus, wenn man zur Abkürzung die drei Grössen

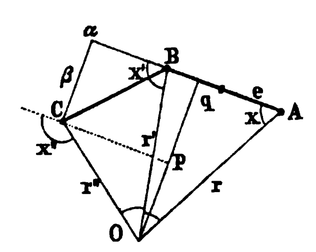
$$P = T' \cdot S - T \cdot S' \qquad Q = T'' \cdot S - T \cdot S'' \qquad R = T'' \cdot S' - T' \cdot S'' \qquad 14$$

zwischen welchen die Relation

$$Q \cdot T' - P \cdot T'' = R \cdot T \qquad 15$$

besteht, einführt,

$$R \cdot f(2\varphi) = Q \cdot f(\psi - \varphi) - P \cdot f(\psi' - \varphi) \qquad 16$$



Bezeichnet man nunmehr die Winkel, welche die r, r', r'', r''' mit unserer bisherigen Abscissenaxe 2e bilden, mit x, x', x'', x''', — die Coordinaten von O mit p und q, — und ist $z = x + x'$, so hat man aus der Figur

$$\frac{r + r'}{r - r'} = \frac{\text{Tg}\,{}^1/_2\,(180 - x' + x)}{\text{Tg}\,{}^1/_2\,(180 - x' - x)} = \frac{\text{Tg}\,{}^1/_2\,z}{\text{Tg}\,{}^1/_2\,(r, r')} \qquad 17$$

so dass z aus den Gegebenen wirklich berechnet werden kann, also, da aus Kombination von $z = x + x'$ und $(r, r') = x' - x$

$$2x = z - (r, r'), \quad 2x' = z + (r, r') \quad \text{und sodann} \quad x'' = (r', r'') + x', \quad x''' = (r', r''') + x' \qquad 18$$

folgen, auch die x. Nachher kann man die Beziehungen

$$2e = r \cdot \text{Co}\,x - r' \cdot \text{Co}\,x' \qquad p = r \cdot \text{Si}\,x \qquad q = r \cdot \text{Co}\,x - e$$

$$\alpha = q - r'' \cdot \text{Co}\,x'', \quad \alpha' = q - r''' \cdot \text{Co}\,x''', \quad \beta = p - r'' \cdot \text{Si}\,x'', \quad \beta' = p - r''' \cdot \text{Si}\,x''' \qquad 19$$

benutzen, — folglich nach 8 auch π, π', γ definitiv berechnen. — Macht man für die Grösse E, welche bei geringer Excentricität wenig von den r verschieden sein wird, eine Annahme, so kann man φ nach 4, — sodann ψ und ψ' nach 11 und 12 berechnen, — und nun zusehen, ob diese Werte der 16 genügen: Ist es nicht der Fall, so macht man für E eine zweite Annahme, — sucht wieder den nach 16 resultierenden Fehler, — wendet die Reguli falsi an, — etc., bis man auch für diese Grössen zu allseitig befriedigenden und somit definitiven Werten gelangt. — Nach 4 und 6 erhält man successive

$$e' = E \cdot Si\,\psi \qquad s = (\alpha - e') : \beta \qquad \theta = Act\,s$$

$$c = \frac{e \cdot \beta}{Si\,\varphi\,(Co\,\varphi - Co\,\psi)} \qquad G = \frac{c}{E \cdot Si\,\theta} \qquad g = G \cdot Co\,\varphi \qquad \mathbf{20}$$

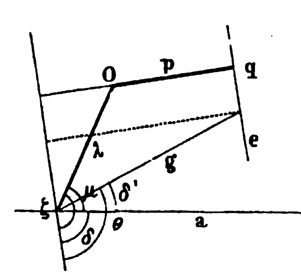
Da ferner (74 : 22) $a^2 + b^2 = E^2 + G^2$ und nach oben $c = a \cdot b$, so kann man nach

$$a + b = \sqrt{E^2 + G^2 + 2c} \qquad a - b = \sqrt{E^2 + G^2 - 2c} \qquad \mathbf{21}$$

a und b, sowie nach

$$Si\,\delta = \frac{b}{E} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - E^2}{a^2 - b^2}} \qquad Si\,\delta' = \frac{b}{G} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - G^2}{a^2 - b^2}} \qquad \mathbf{22}$$

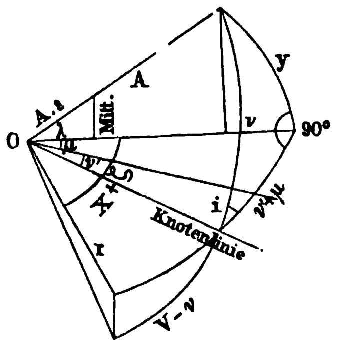
die Winkel δ und δ' berechnen, welche E und G mit a bilden. Bezeichnet endlich λ die Entfernung des Poles O von dem Ellipsencentrum, und sind ζ, μ die Winkel, welche λ mit E und a bildet, während U die Umlaufszeit ist, so hat man (Fig. und 1)



$$\lambda \cdot Co\,\zeta = g \cdot Co\,\theta - q, \quad \lambda \cdot Si\,\zeta = g \cdot Si\,\theta - p$$
$$u = \zeta - \delta, \quad n = [c \cdot f(2\varphi) + S] : T, \quad U = 2c \cdot \pi : n \qquad \mathbf{23}$$

wodurch die scheinbare Bahn vollständig bestimmt ist. — Ist l derjenige Halbmesser der scheinbaren Ellipse, welcher durch O geht und mit a den Winkel μ bildet, l' aber der ihm konjugierte und mit a den Winkel μ' einschliessende Halbmesser, so hat man (74 : 19, 18)

$$\frac{1}{l^2} = \frac{Co^2\,\mu}{a^2} + \frac{Si^2\,\mu}{b^2} \qquad \frac{1}{l'^2} = \frac{Co^2\,\mu'}{a^2} + \frac{Si^2\,\mu'}{b^2} \qquad Tg\,\mu \cdot Tg\,\mu' = -\frac{b^2}{a^2} \qquad \mathbf{24}$$



Nun sind aber offenbar l und l' die Projektionen der Halbaxen A und B der wahren Ellipse, sowie λ die Projektion der Distanz ihres Brennpunktes vom Mittelpunkte und bezeichnen daher ν und ν' die Winkel, welche A und a mit der Knotenlinie der beiden Ebenen bilden, während i der Winkel der letztern ist, so hat man aus dem rechtwinkligen Raumdreiecke

$$Co\,y = Co\,\nu \cdot Se\,(\nu' + \mu)$$
$$Tg\,(\nu' + \mu) = Tg\,\nu \cdot Co\,i \qquad \mathbf{25}$$

$$Tg\,(\nu' + \mu') = Tg\,(\nu + 90^0) \cdot Co\,i = -Ct\,\nu \cdot Co\,i \qquad \mathbf{26}$$

$$A = l \cdot Se\,y = l \cdot Co\,(\nu' + \mu) \cdot Se\,\nu \qquad B = l' \cdot Co\,(\nu' + \mu') \cdot Se\,(\nu + 90^0) \qquad \mathbf{27}$$

$$A^2 - B^2 = A^2 \cdot \varepsilon^2 = \lambda^2 \cdot \mathrm{Se}^2\, y = \lambda^2 \cdot \mathrm{Co}^2 (\nu' + \mu) \cdot \mathrm{Se}^2\, \nu \qquad \mathbf{28}$$

während 25'' und 26 durch Division und Multiplikation

$$\mathrm{Tg}^2\, \nu = -\mathrm{Tg}\,(\nu' + \mu) \cdot \mathrm{Ct}\,(\nu' + \mu') \qquad \mathrm{Co}^2\, i = -\mathrm{Tg}\,(\nu' + \mu) \cdot \mathrm{Tg}\,(\nu' + \mu') \qquad \mathbf{29}$$

ergeben, und aus 28 durch Elimination der Grössen A, B, ν mit Hilfe von 27', 27'' und 29'

$$(l^2 - \lambda^2) \cdot \mathrm{Si}\, 2\,(\nu' + \mu) + l'^2 \cdot \mathrm{Si}\, 2\,(\nu' + \mu') = 0$$

oder

$$\mathrm{Tg}\, 2\,\nu' = -\frac{(l^2 - \lambda^2) \cdot \mathrm{Si}\; 2\,\mu + l'^2 \cdot \mathrm{Si}\; 2\,\mu'}{(l^2 - \lambda^2) \cdot \mathrm{Co}\; 2\,\mu + l'^2 \cdot \mathrm{Co}\; 2\,\mu'} \qquad \mathbf{30}$$

hervorgeht. Nun folgt aus der letzten 24

$$a^2 \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Si}\,\mu' + b^2 \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,\mu' = 0 \qquad \mathbf{31}$$

und mit Hilfe hievon, indem man für l^2 und l'^2 die aus den ersten zwei 24 folgenden Werte substituiert,

$$l^2 \cdot \mathrm{Si}\, 2\,\mu + l'^2 \cdot \mathrm{Si}\, 2\,\mu' = \frac{2\,a^2 b^2 \cdot (a^2 \cdot \mathrm{Si}\,\mu \cdot \mathrm{Si}\,\mu' + b^2 \cdot \mathrm{Co}\,\mu \cdot \mathrm{Co}\,\mu') \cdot \mathrm{Si}\,(\mu + \mu')}{(a^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\mu + b^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\mu) \cdot (a^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,\mu' + b^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,\mu')} = 0$$

$$l^2 \cdot \mathrm{Si}^2\;\mu + l'^2 \cdot \mathrm{Si}^2\;\mu' = a^2 \cdot b^2 \cdot \left[\frac{\mathrm{Tg}^2\,\mu}{a^2 \cdot \mathrm{Tg}^2\,\mu + b^2} + \frac{\mathrm{Tg}^2\,\mu'}{a^2 \cdot \mathrm{Tg}^2\,\mu' + b^2}\right] = b^2 \qquad \mathbf{32}$$

folglich (nach 74 : 22), da goniometrisch $\mathrm{Co}\, 2\,x + 2\, \mathrm{Si}^2\, x = 1$ ist,

$$a^2 + b^2 = l^2 + l'^2 = l^2 \cdot (\mathrm{Co}\, 2\,\mu + 2\, \mathrm{Si}^2\,\mu) + l'^2 \cdot (\mathrm{Co}\, 2\,\mu' + 2\, \mathrm{Si}^2\,\mu') =$$
$$= 2\,b^2 + l^2 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\mu + l'^2 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\mu' \qquad \mathbf{33}$$

Mit Benutzung von 32 und 33 geht aber 30 in

$$\mathrm{Tg}\, 2\,\nu' = \frac{\lambda^2 \cdot \mathrm{Si}\, 2\,\mu}{(a^2 - b^2) - \lambda^2 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\mu} \qquad \mathbf{34}$$

über. Man kann also successive nach 34 und 29 die ν', ν, i, — und sodann nach 27 und 28 auch Axen und Excentricität der wahren Ellipse berechnen. — Bezeichnet endlich V die wahre Anomalie des Begleiters zur Zeit der ersten Beobachtung, so hat man unter Anwendung der frühern Bezeichnungen entsprechend 25''

$$\mathrm{Tg}\,[(x + \zeta) - (\nu' + \mu)] = \mathrm{Tg}\,(V - \nu) \cdot \mathrm{Co}\, i \qquad \mathbf{35}$$

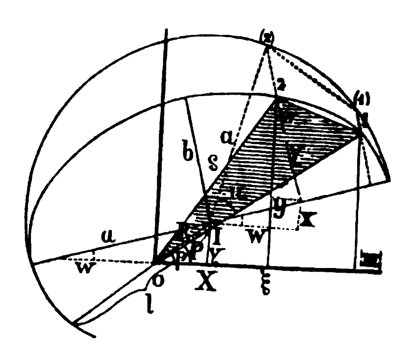
kann also V und daraus (484 : 4, 6, 7) nach

$$\mathrm{Tg}\,\frac{U}{2} = \mathrm{Tg}\,\frac{V}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \qquad t = \frac{c}{n} \cdot (U - \varepsilon \cdot \mathrm{Si}\, U) \qquad \mathbf{36}$$

successive auch noch die excentrische Anomalie und die seit dem Durchgange durch das Perihel verflossene Zeit t, somit diejenige des Periheldurchganges berechnen, womit nun alle Elemente bestimmt sind.

627. Die Methode von Encke. — Vollkommener als die soeben entwickelte Methode von Savary ist allerdings diejenige, welche **Encke** in seiner Abhandlung „Über die Berechnung der Doppelsterne (Berl. Jahrb. 1832, ausgeg. 1830)" wenig später niederlegte, und es ist denn auch diese letztere Methode wirklich lange vorzugsweise in Anwendung gekommen [a].

Zu 627: *a.* Die Aufgabe, welche **Encke** in der erwähnten Abhandlung löste, war aus 4 zu den Zeiten $t_1\, t_2\, t_3\, t_4$ gemessenen Distanzen $\varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3\, \varrho_4$ des beweglichen Sternes und den entsprechenden Positionen $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ gegen eine als Axe der X gewählte Gerade die scheinbare Ellipse zu bestimmen, und



sodann diejenige Ellipse aufzusuchen, von welcher die scheinbare eine Projektion und der Anfangspunkt der Coordinaten die Projektion des Brennpunktes ist. Um diese Doppelaufgabe zu lösen, hat man zunächst

$$\xi = \varrho \cdot \mathrm{Co}\,p \qquad \eta = \varrho \cdot \mathrm{Si}\,p \qquad 1$$

und somit, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten mit 0, die respektiven Örter des Sternes mit 1, 2, 3, 4 und die doppelten Flächen der durch diese Punkte bestimmten Dreiecke oder Vierecke mit den in Klammern gesetzten Nummern der Eckpunkte bezeichnet,

$$\begin{aligned}(012) &= \xi_2 \cdot \eta_2 + (\eta_2 + \eta_1) \cdot (\xi_1 - \xi_2) - \xi_1 \cdot \eta_1 = \eta_2 \cdot \xi_1 - \eta_1 \cdot \xi_2 = \\ &= \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \mathrm{Si}(p_2 - p_1) \quad (013) = \varrho_1 \cdot \varrho_3 \cdot \mathrm{Si}(p_3 - p_1) \quad (014) = \varrho_1 \cdot \varrho_4 \cdot \mathrm{Si}(p_4 - p_1) \\ (023) &= \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \mathrm{Si}(p_3 - p_2) \quad (024) = \varrho_2 \cdot \varrho_4 \cdot \mathrm{Si}(p_4 - p_2) \quad (034) = \varrho_3 \cdot \varrho_4 \cdot \mathrm{Si}(p_4 - p_3) \qquad 2\end{aligned}$$

anderseits aber

$$\begin{aligned}(123) &= (012) + (023) - (013) \qquad (124) = (012) + (024) - (014) \\ (134) &= (013) + (034) - (014) \qquad (234) = (023) + (034) - (024) \qquad 3\end{aligned}$$

und noch

$$(1234) = (123) + (134) = (124) + (234) \qquad 4$$

so dass alle diese Doppelflächen als bekannte Zahlen zu betrachten sind. Bezeichnet man ferner die zwei Punkte verbindende Sehne mit ihren in eine Klammer gesetzten Nummern, so hat man

$$(12)^2 = (\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 \qquad (13)^2 = (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 \quad \text{etc.} \qquad 5$$

Sind a, b die Halbaxen der scheinbaren Bahn, u, x, y die excentrischen Anomalien und Mittelpunktscoordinaten der Positionen, und bezeichnet I den Mittelpunkt, so hat man

$$x = a \cdot \mathrm{Co}\,u \qquad y = b \cdot \mathrm{Si}\,u \qquad 6$$

folglich entsprechend 2

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}\,12) &= a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_2 - u_1) \quad (\mathrm{I}\,13) = a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_3 - u_1) \quad (\mathrm{I}\,14) = a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_4 - u_1) \\ (\mathrm{I}\,23) &= a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_3 - u_2) \quad (\mathrm{I}\,24) = a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_4 - u_2) \quad (\mathrm{I}\,34) = a \cdot b \cdot \mathrm{Si}(u_4 - u_3) \qquad 7\end{aligned}$$

Ferner entsprechend 3, 4, 5

$$\begin{aligned}(123) &= a \cdot b \cdot [\mathrm{Si}(u_2 - u_1) + \mathrm{Si}(u_3 - u_2) - \mathrm{Si}(u_3 - u_1)] = \\ &= 2a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_2) \cdot [\mathrm{Co}\,{}^1/_2(u_3 - u_2) - \mathrm{Co}\,{}^1/_2(u_3 + u_2 - 2u_1)] = \\ &= 4a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_2 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_2) \\ (124) &= 4a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_2 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_2) \\ (134) &= 4a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_3) \\ (234) &= 4a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_2) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_2) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_3) \qquad 8\end{aligned}$$

$$(1234) = 4a \cdot b \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_3 - u_1) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_2) \cdot \mathrm{Si}\,{}^1/_2(u_4 - u_3 + u_2 - u_1) \qquad 9$$

$$\begin{aligned}(12)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2(\mathrm{Co}\,u_2 - \mathrm{Co}\,u_1)^2 + b^2(\mathrm{Si}\,u_2 - \mathrm{Si}\,u_1)^2 = \\ &= 4\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2(u_2 - u_1) \cdot [a^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2(u_2 + u_1) + b^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,{}^1/_2(u_2 + u_1)] \\ (13)^2 &= 4\,\mathrm{Si}^2\,{}^1/_2(u_3 - u_1) \cdot [a^2 \cdot \mathrm{Si}^2\,{}^1/_2(u_3 + u_1) + b^2 \cdot \mathrm{Co}^2\,{}^1/_2(u_3 + u_1)] \qquad 10\end{aligned}$$

etc. Setzt man die bekannten Grössen

$$\sqrt{\frac{(134) \cdot (234)}{(123) \cdot (124)}} = \mathrm{Ct}\,\zeta \qquad \sqrt{\frac{(124) \cdot (234)}{(123) \cdot (134)}} = \mathrm{Ct}\,\zeta_1 \qquad \sqrt{\frac{(124) \cdot (134)}{(123) \cdot (234)}} = \mathrm{Ct}\,\zeta_2 \qquad 11$$

so dass die ζ ebenfalls bekannt sind, so erhält man aus den 8

$$\frac{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_4 - u_3)}{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)} = \text{Ct } \zeta \qquad \frac{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_4 - u_2)}{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1)} = \text{Ct } \zeta_1 \qquad \frac{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_4 - u_1)}{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_3 - u_2)} = \text{Ct } \zeta_2 \qquad \textbf{12}$$

und somit, wenn

$$\tfrac{1}{4}(u_4 + u_3 + u_2 + u_1) = s \qquad \tfrac{1}{4}(u_4 - u_3 - u_2 + u_1) = \alpha$$
$$\tfrac{1}{4}(u_4 - u_3 + u_2 - u_1) = \beta \qquad \tfrac{1}{4}(u_4 + u_3 - u_2 - u_1) = \gamma \qquad \textbf{13}$$

oder

$$\tfrac{1}{2}(u_2 - u_1) = \beta - \alpha \qquad \tfrac{1}{2}(u_3 - u_1) = \gamma - \alpha \qquad \tfrac{1}{2}(u_4 - u_1) = \gamma + \beta$$
$$\tfrac{1}{2}(u_3 - u_2) = \gamma - \beta \qquad \tfrac{1}{2}(u_4 - u_2) = \gamma + \alpha \qquad \tfrac{1}{2}(u_4 - u_3) = \beta + \alpha \qquad \textbf{14}$$

gesetzt wird,

$$\text{Tg}(45^0 + \zeta) = \frac{\text{Ct } \zeta + 1}{\text{Ct } \zeta - 1} = \frac{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_4 - u_3) + \text{Si } \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)}{\text{Si } \tfrac{1}{2}(u_4 - u_3) - \text{Si } \tfrac{1}{2}(u_2 - u_1)} = \frac{\text{Tg } \beta}{\text{Tg } \alpha} \qquad \textbf{15}$$

$$\text{Tg}(45^0 + \zeta_1) = \text{Tg } \gamma : \text{Tg } \alpha \qquad \text{Tg}(45^0 + \zeta_2) = \text{Tg } \gamma : \text{Tg } \beta$$

oder

$$\text{Tg } \zeta = \frac{\text{Si}(\beta - \alpha)}{\text{Si}(\beta + \alpha)} \qquad \text{Tg } \zeta_1 = \frac{\text{Si}(\gamma - \alpha)}{\text{Si}(\gamma + \alpha)} \qquad \text{Tg } \zeta_2 = \frac{\text{Si}(\gamma - \beta)}{\text{Si}(\gamma + \beta)} \qquad \textbf{15'}$$

oder endlich

$$\text{Tg } 2\zeta = \frac{2 \text{ Tg } \zeta}{1 - \text{Tg}^2 \zeta} = \frac{2 \text{ Si}(\beta - \alpha) \cdot \text{Si}(\beta + \alpha)}{\text{Si } 2\alpha \cdot \text{Si } 2\beta}$$

$$\text{Tg } 2\zeta_1 = \frac{2 \text{ Si}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Si}(\gamma + \alpha)}{\text{Si } 2\alpha \cdot \text{Si } 2\gamma} \qquad \text{Tg } 2\zeta_2 = \frac{2 \text{ Si}(\gamma - \beta) \cdot \text{Si}(\gamma + \beta)}{\text{Si } 2\beta \cdot \text{Si } 2\gamma} \qquad \textbf{15''}$$

so dass, wenn Eine der Grössen $\alpha \beta \gamma$ bekannt, nach 15 auch die übrigen beiden und nach 14 alle Differenzen der excentrischen Anomalien gefunden werden können, — ja sogar, da nun nach 9 und 14

$$(1234) = 4 \text{ a} \cdot \text{b} \cdot \text{Si}(\gamma - \alpha) \cdot \text{Si}(\gamma + \alpha) \cdot \text{Si } 2\beta \qquad \textbf{16}$$

wird, auch a·b. — Denkt man sich die Ellipsenpunkte 1, 2 nach (1), (2) auf den Kreis verlegt, so ist, wenn die u in Minuten ausgedrückt sind, die Fläche des durch sie bestimmten Kreisausschnittes gleich $\tfrac{1}{2} a^2 \cdot (u_2 - u_1) \cdot \text{Si } 1'$, die Fläche des Sehnendreieckes aber $\tfrac{1}{2} a^2 \cdot \text{Si}(u_2 - u_1)$, also die Fläche des Kreisabschnittes $\tfrac{1}{2} a^2 \cdot [(u_2 - u_1) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si}(u_2 - u_1)]$, also, da b : a der Cosinus des Projektionswinkels ist, diejenige des elliptischen Abschnittes $\tfrac{1}{2} a \cdot b \cdot [(u_2 - u_1) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si}(u_2 - u_1)]$. Nun ist die in der wirklichen Bahn beschriebene Fläche der Zeit proportional, also auch, da O die Projektion des Brennpunktes ist, die Doppelfläche des durch $\varrho_1 \, \varrho_2$ bestimmten Sectors der scheinbaren Bahn, und man hat daher, wenn k die doppelte Flächengeschwindigkeit in letzterer bezeichnet, mit Benutzung von 14

$$\begin{aligned} k \cdot (t_2 - t_1) &= (012) + a \cdot b \cdot [(u_2 - u_1) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si}(u_2 - u_1)] \\ &= (012) + a \cdot b \cdot [2(\beta - \alpha) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si } 2(\beta - \alpha)] \\ k \cdot (t_3 - t_2) &= (023) + a \cdot b \cdot [2(\gamma - \beta) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si } 2(\gamma - \beta)] \\ k \cdot (t_4 - t_3) &= (034) + a \cdot b \cdot [2(\beta + \alpha) \cdot \text{Si } 1' - \text{Si } 2(\beta + \alpha)] \end{aligned} \qquad \textbf{17}$$

also drei Gleichungen, in welchen ausser k nur noch Eine der drei Grössen $\alpha \beta \gamma$ unbekannt ist, so dass sie zu ihrer Bestimmung mehr als ausreichen. — So bildete **Encke** (l. c.) aus den für den Doppelstern 70 p Ophiuchi vorhandenen Beobachtungen die vier Normalörter

t	p	ϱ
1779,77	0° 0'	4'',40
1803,38	122 32	2,70
1820,20	288 9	4,17
1823,27	296 55	4,85

und hieraus folgen nach 2, 3, 4, 11

(012) = 10,01579	(123) = 30,24770	$\zeta = 81^\circ\ 17'\ 47'',3$
(013) = — 17,43508	(124) = 30,32560	$\zeta_1 = 45\ \ 12\ \ 13,9$
(014) = — 19,02817	(134) = 4,67553	$\zeta_2 = 44\ \ 43\ \ 21,1$
(023) = 2,79683	(234) = 4,59763	$Tg\,(45^\circ + \zeta) = -0,184021$
(024) = 1,28164		$Tg\,(45^\circ + \zeta_1) = -2,448786$
(034) = 3,08244	(1234) = 34,92323	$Tg\,(45^\circ + \zeta_2) = 2,314900$

Bezeichnet man nun den Ausdruck $[2\,x \cdot Si\,1' - Si\,2\,x] : [4\,Si^2\,x \cdot x \cdot Si\,1']$ (für welchen Encke l. c. eine Tafel gab) mit ψ (x), so erhält man aus 17, indem man nach 16 für a·b substituiert und 15 benutzt,

$$k_1 = \frac{(1234) \cdot Tg\,\zeta \cdot Tg\,2\,\zeta \cdot (\beta - \alpha) \cdot Si\,1'}{(t_2 - t_1) \cdot Tg\,2\,\zeta_1 \cdot Si\,2\,\gamma} \cdot \psi(\beta - \alpha) + \frac{(012)}{t_2 - t_1} \qquad \mathbf{18}$$

$$k_2 = \frac{(1234) \cdot Tg\,\zeta_2 \cdot Tg\,2\,\zeta_2 \cdot (\gamma - \beta) \cdot Si\,1'}{(t_3 - t_2) \cdot Tg\,2\,\zeta_1 \cdot Si\,2\,\alpha} \cdot \psi(\gamma - \beta) + \frac{(023)}{t_3 - t_2} \qquad \mathbf{19}$$

$$k_3 = \frac{(1234) \cdot Ct\,\zeta \cdot Tg\,2\,\zeta \cdot (\beta + \alpha) \cdot Si\,1,}{(t_4 - t_3) \cdot Tg\,2\,\zeta_1 \cdot Si\,2\,\gamma} \cdot \psi(\beta + \alpha) + \frac{(034)}{t_4 - t_3} \qquad \mathbf{20}$$

Setzt man nun in erster Annäherung die u gleich den p, d. h. macht man nach 13 eine erste Annahme $\alpha = -28^\circ\,26'$, so erhält man nach 15, 18, 19 successive

$\beta = 36^\circ\,24'$ $\gamma = 89^\circ\,32^1/_2{}'$ $k_1 = 1{,}17481$ $k_2 = 0{,}78930$ $k_1 - k_2 = 0{,}38551$

während eine zweite Annahme $\alpha = -24^\circ\,0'$

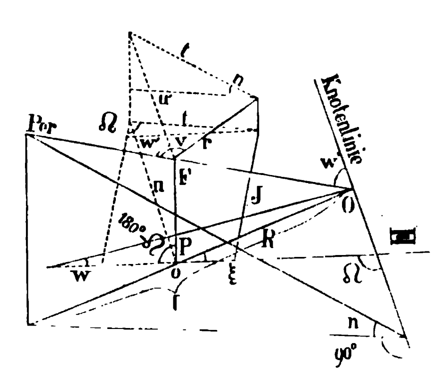
$\beta = 31^\circ\,18'$ $\gamma = 89^\circ\,32^1/_2{}'$ $k_1 = 0{,}91877$ $k_2 = 0{,}96774$ $k_1 - k_2 = -0{,}04897$

ergiebt. Wendet man aber auf diese beiden Annahmen und die für sie resultierenden Fehler $k_1 - k_2$ die Regula falsi an, so erhält man die bessere Annahme $\alpha = -24^\circ\,30'$ und hiefür

$\beta = 31^\circ\,49'$ $\gamma = 89^\circ\,33'$ $k_1 = 0{,}94097$ $k_2 = 0{,}94491$ $k_3 = 1{,}01460$

also eine bereits ganz ordentliche Übereinstimmung. Um letztere zu einer vollständigen zu machen, glaubte Encke die Beobachtungsdaten selbst innerhalb ihrer Fehlergrenze etwas abändern zu sollen, — setzte $t_4 = 1823{,}27085$ und $\varrho_4 = 4{,}746$, — und erhielt nun

(014) = — 18,62013	(234) = 4,55901	Lg k = 9,996494
(024) = 1,25416	(1234) = 34,44909	Lg a · b = 1,066736
(034) = 3,01634	$\zeta = 81^\circ\ 43'\ 6'',8$	$\alpha = -25^\circ\ 40'\ 17'',9$
(124) = 29,89008	$\zeta_1 = 44\ \ 0\ \ 1,5$	$\beta = 32\ \ 47\ \ 54,1$
(134) = 4,20139	$\zeta_2 = 46\ \ 20\ \ 24,0$	$\gamma = 92\ \ 4\ \ 44,0$



Nach dieser Vorbereitung setzte **Encke** seine Rechnung in folgender Weise fort: Bezeichnen X, Y die Coordinaten des Mittelpunktes der Projektion und ist w der Winkel ihrer grossen Axe mit der Axe Ξ, so hat man

$$\begin{aligned} \xi - X &= a \cdot Co\,u \cdot Co\,w - b \cdot Si\,u \cdot Si\,w \\ \eta - Y &= a \cdot Co\,u \cdot Si\,w + b \cdot Si\,u \cdot Co\,w \end{aligned} \qquad \mathbf{21}$$

und somit, wenn

$$\begin{aligned} A &= a \cdot Co\,s \cdot Co\,w - b \cdot Si\,s \cdot Si\,w \\ A' &= a \cdot Co\,s \cdot Si\,w + b \cdot Si\,s \cdot Co\,w \\ B &= a \cdot Si\,s \cdot Co\,w + b \cdot Co\,s \cdot Si\,w \\ B' &= a \cdot Si\,s \cdot Si\,w - b \cdot Co\,s \cdot Co\,w \end{aligned} \qquad \mathbf{22}$$

gesetzt werden, mit Hilfe von 13

$$\begin{aligned}
{}^1/_4\,(\xi_1+\xi_2-\xi_3-\xi_4) &= A\cdot Si\,\alpha\cdot Si\,\beta\cdot Co\,\gamma + B\cdot Co\,\alpha\cdot Co\,\beta\cdot Si\,\gamma\\
{}^1/_4\,(\xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4) &= -A\cdot Co\,\alpha\cdot Si\,\beta\cdot Si\,\gamma - B\cdot Si\,\alpha\cdot Co\,\beta\cdot Co\,\gamma\\
{}^1/_4\,(\eta_1+\eta_2-\eta_3-\eta_4) &= A'\cdot Si\,\alpha\cdot Si\,\beta\cdot Co\,\gamma + B'\cdot Co\,\alpha\cdot Co\,\beta\cdot Si\,\gamma\\
{}^1/_4\,(\eta_1-\eta_2-\eta_3+\eta_4) &= -A'\cdot Co\,\alpha\cdot Si\,\beta\cdot Si\,\gamma - B'\cdot Si\,\alpha\cdot Co\,\beta\cdot Co\,\gamma
\end{aligned} \tag{23}$$

oder, wenn mit Berücksichtigung von 5

$$\begin{aligned}
\xi_1-\xi_3 &= (13)\cdot Co\,C \qquad \xi_2-\xi_4 = (24)\cdot Co\,D \qquad \frac{(13)}{2\cdot Si\,2\beta\cdot Si\,(\gamma-\alpha)} = c\\
\eta_1-\eta_3 &= (13)\cdot Si\,C \qquad \eta_2-\eta_4 = (24)\cdot Si\,D \qquad \frac{(24)}{2\cdot Si\,2\beta\cdot Si\,(\gamma+\alpha)} = d
\end{aligned} \tag{24}$$

gesetzt werden,

$$\begin{aligned}
A &= -c\cdot Co\,C\cdot Co\,\beta + d\cdot Co\,D\cdot Co\,\beta \qquad B = c\cdot Co\,C\cdot Si\,\beta + d\cdot Co\,D\cdot Si\,\beta\\
A' &= -c\cdot Si\,C\cdot Co\,\beta + d\cdot Si\,D\cdot Co\,\beta \qquad B' = c\cdot Si\,C\cdot Si\,\beta + d\cdot Si\,D\cdot Si\,\beta
\end{aligned} \tag{25}$$

Man hat somit mit Hilfe von 22 und 25

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot Si\,(s+w) &= B + A' = d\cdot Si\,(\beta+D) + c\cdot Si\,(\beta-C)\\
(a+b)\cdot Co\,(s+w) &= A - B' = d\cdot Co\,(\beta+D) - c\cdot Co\,(\beta-C)\\
(a-b)\cdot Si\,(s-w) &= B - A' = d\cdot Si\,(\beta-D) + c\cdot Si\,(\beta+C)\\
(a-b)\cdot Co\,(s-w) &= A + B' = d\cdot Co\,(\beta-D) - c\cdot Co\,(\beta+C)
\end{aligned} \tag{26}$$

und analog mit Hilfe der 21

$$\begin{aligned}
R\cdot Co\,P = X &= {}^1/_2\,(\xi_1+\xi_3) + (c\cdot Co\,C\cdot Co\,2\beta - d\cdot Co\,D)\cdot Co\,(\gamma-\alpha)\\
R\cdot Si\,P = Y &= {}^1/_2\,(\eta_1+\eta_3) + (c\cdot Si\,C\cdot Co\,2\beta - d\cdot Si\,D)\cdot Co\,(\gamma-\alpha)
\end{aligned} \tag{27}$$

so dass man mit Hilfe von 24—27 successive C D c d, a b s w und R P finden kann, und zwar in unserm Beispiele

C = 51° 57′ 13″,0	Lg c = 0,494393	Lg a = 0,617892
D = 118 57 10,0	Lg d = 0,648969	Lg b = 0,448845
w = 130 13 50,3	Lg R = 0,206086	P = 336° 35′ 19″,5

erhält. — Bezeichnen a′, b′ die Halbaxen der wahren Ellipse, $a'\cdot e' = a'\cdot Si\,\varphi'$ ihre Excentricität, n die Neigung der beiden Ebenen, Ω und w′ die Winkel der Knotenlinie mit Ξ und a′, und l die Projektion von a′, so hat man

$$\frac{R}{l} = Si\,\varphi' = \frac{1}{a'}\cdot\sqrt{a'^2-b'^2} \qquad \frac{1}{l}\cdot\sqrt{l^2-R^2} = Co\,\varphi' = \frac{b'}{a'} \tag{28}$$

$$a\cdot b\cdot\pi = a'\cdot b'\cdot\pi\cdot Co\,n \qquad \text{oder} \qquad a\cdot b = a'\cdot b'\cdot Co\,n \tag{29}$$

$$-a'\cdot Co\,w' = l\cdot Co\,(\Omega-P) \qquad a'\cdot Si\,w'\cdot Co\,n = l\cdot Si\,(\Omega-P) \tag{30}$$

Ferner ist nach 74:21′

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{a^2}\cdot Co^2\,(P-w) + \frac{1}{b^2}\cdot Si^2\,(P-w) \tag{31}$$

während für den beiden Ellipsen gemeinschaftlichen, in die Knotenlinie fallenden Radius

$$\frac{1}{a'^2}\cdot Co^2\,w' + \frac{1}{b'^2}\cdot Si^2\,w' = \frac{1}{a^2}\cdot Co^2\,(\Omega-w) + \frac{1}{b^2}\cdot Si^2\,(\Omega-w) \tag{32}$$

und für die beiden auf die Knotenlinie senkrechten Radien, von denen der eine die Projektion des andern ist,

$$\frac{1}{a'^2}\cdot Si^2\,w' + \frac{1}{b'^2}\cdot Co^2\,w' = \left[\frac{1}{a^2}\cdot Si^2\,(\Omega-w) + \frac{1}{b^2}\cdot Co^2\,(\Omega-w)\right]\cdot Co^2\,n \tag{33}$$

wird. Nach 31 kann man l berechnen, und hat somit zur Bestimmung der fünf Unbekannten a′, b′ oder φ', n, Ω und w′ oder der Länge $\pi = w' + \Omega$ des Perihels, die fünf Gleichungen 28, 29, 30, 32 und 33, welche jedoch Encke

für die wirkliche Berechnung noch in folgender Weise umgestaltete: Aus 30 folgt durch Quadrieren und Addieren

$$Co^2\, w' + Si^2\, w' \cdot Co^2\, n = l^2 : a'^2 \qquad \mathbf{34}$$

und somit mit Hilfe von 28, wenn man $(32 \cdot Co^2\, n + 33) \cdot a'^2 \cdot b'^2 + 34 \cdot b'^2$ bildet,

$$b'^2 + b'^2 \cdot Co^2\, n = a^2 + b^2 - R^2 \qquad \mathbf{35}$$

Ferner mit Hilfe von 35, 29, 28 und 31

$$b'^4 \cdot Si^4\, n = [a^2 - b^2 - R^2 \cdot Co\, 2\,(P - w)]^2 + R^4 \cdot Si^2\, 2\,(P - w) \qquad \mathbf{36}$$

und durch Multiplikation der beiden 30 einerseits, sowie der 32 und 33 anderseits

$$a'^2 \cdot Si\, 2\, w' \cdot Co\, n = l^2 \cdot Si\, 2\,(P - \Omega)$$

$$(a'^2 - b'^2) \cdot Si\, 2\, w' \cdot Co\, n = (a - b^2) \cdot Si\, 2\,(w - \Omega)$$

oder, wenn man diese Produkte durch einander dividiert, 28' benutzt, und $P - \Omega$ in $(P - w) + (w - \Omega)$ umsetzt,

$$\frac{a^2 - b^2 - R^2 \cdot Co\, 2\,(P - w)}{Co\, 2\,(w - \Omega)} = \frac{R^2 \cdot Si\, 2\,(P - w)}{Si\, 2\,(w - \Omega)} \qquad \mathbf{37}$$

Wenn daher $a^2 - b^2 - R^2 \cdot Co\, 2\,(P - w) = m \cdot Co\, 2\,(w - \Omega)$

gesetzt wird, so muss auch

$$R^2 \cdot Si\, 2\,(P - w) = m \cdot Si\, 2\,(w - \Omega)$$

sein, und hiefür giebt 36

$$b'^4 \cdot Si^4\, n = m^2 \qquad \text{oder} \qquad m = b'^2 \cdot Si^2\, n$$

so dass also

$$a^2 - b^2 - R^2 \cdot Co\, 2\,(P - w) = b'^2 \cdot Si^2\, n \cdot Co\, 2\,(w - \Omega)$$

$$R^2 \cdot Si\, 2\,(P - w) = b'^2 \cdot Si^2\, n \cdot Si\, 2\,(w - \Omega) \qquad \mathbf{38}$$

Man kann hieraus $(w - \Omega)$ oder also Ω, ferner $b'^2 \cdot Si^2\, n = b'^2 - b'^2 \cdot Co^2\, n$ oder also mit Zuzug von 35 auch b' und n berechnen, — sodann nach 29 und 30 successive a' und w' oder π. — Ist k' die doppelte Flächengeschwindigkeit in der wahren Ellipse und U die Umlaufszeit, so hat man

$$k' = k \cdot Se\, n \qquad U = 2\, a' \cdot b' \cdot \pi : k' = 2\, a \cdot b \cdot \pi : k \qquad \mathbf{39}$$

und wenn μ' die mittlere Bewegung in Graden bezeichnet, so verhält sich

$$\mu' : 360^0 = k' : 2\, a' \cdot b' \cdot \pi = k : 2\, a \cdot b \cdot \pi \qquad \mathbf{40}$$

Legt man (s. Fig.) durch den Brennpunkt der wahren Bahn und seine Projektion je eine Parallele zur Knotenlinie, und bezieht einen Punkt (r, v) und seine Projektion (ξ, η) auf diese Parallelen, so erhält man

$$u = u' = r \cdot Co\,(v - w') \qquad t = t' \cdot Co\, n = r \cdot Si\,(v - w') \cdot Co\, n$$

$$\xi = u \cdot Co\, \Omega + t \cdot Si\, \Omega \qquad \eta = u \cdot Si\, \Omega - t \cdot Co\, \Omega$$

und somit

$$\xi = r \cdot Co\, v \cdot (Co\, w' \cdot Co\, \Omega - Si\, w' \cdot Si\, \Omega \cdot Co\, n) +$$
$$+ r \cdot Si\, v \cdot (Si\, w' \cdot Co\, \Omega + Co\, w' \cdot Si\, \Omega \cdot Co\, n)$$
$$\eta = r \cdot Co\, v \cdot (Co\, w' \cdot Si\, \Omega + Si\, w' \cdot Co\, \Omega \cdot Co\, n) +$$
$$+ r \cdot Si\, v \cdot (Si\, w' \cdot Si\, \Omega - Co\, w' \cdot Co\, \Omega \cdot Co\, n)$$

Bezeichnet man die vier Klammern der Reihe nach mit I, II, III, IV, so findet man

$$\xi \cdot IV - \eta \cdot II = r \cdot Co\, v \cdot [I \cdot IV - II \cdot III] = - r \cdot Co\, v \cdot Co\, n$$

$$\xi \cdot III - \eta \cdot I = r \cdot Si\, v \cdot [II \cdot III - I \cdot IV] = r \cdot Si\, v \cdot Co\, n$$

oder, wenn man aus 1 die Werte von ξ und η einführt, — die aus 484 : 3, 4 folgenden Formeln

$$r \cdot Co\, v = a' \cdot (Co\, u' - Si\, \varphi') \qquad r \cdot Si\, v = b' \cdot Si\, u'$$

benutzt, wo u' die excentrische Anomalie in der wahren Ellipse bezeichnet, — ferner

$$b' \cdot \mathrm{Si}\, w' = l' \cdot \mathrm{Si}\,(Q - \Omega) \qquad b' \cdot \mathrm{Co}\, w' \cdot \mathrm{Co}\, n = l' \cdot \mathrm{Co}\,(Q - \Omega) \qquad \mathbf{41}$$

setzt, — und endlich, unter Benutzung von 30, die erste Gleichung mit b', die zweite mit a' multipliziert

$$\mathrm{Co}\, u' = \frac{l'}{a \cdot b} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Co}\,(p - Q) + \frac{R}{l} \qquad \mathrm{Si}\, u' = \frac{l}{a \cdot b} \cdot \varrho \cdot \mathrm{Si}\,(p - Q) \qquad \mathbf{42}$$

Bezeichnet man schliesslich die mittlere Anomalie zur Zeit t mit m und die Durchgangszeit durch das Perihel mit T, so ist

$$m = u' - e' \cdot \mathrm{Si}\, u' = u' - R \cdot \mathrm{Si}\, u' : l \qquad \mathbf{43}$$

$$m = (t - T) \cdot \mu' \qquad \text{oder} \qquad T = t - (m : \mu') \qquad \mathbf{44}$$

so dass nun auch noch die Durchgangszeit durch das Perihel gegeben ist. — Auf diese Weise fand **Encke** in dem früher hier zu Grunde gelegten Beispiele

$\Omega = 122^\circ\, 47'\, 54'',7$	$\mathrm{Lg}\, b' = 0{,}591921$	$\pi = 166^\circ\, 56'\, 44'',5$
$n = 46\;\; 24\;\; 56{,}9$	$\mathrm{Lg}\, a' = 0{,}636332$	$\mu' = 4\;\; 52\;\; 26{,}2$
$\varphi' = 25\;\; 28\;\; 19{,}8$	$\mathrm{Lg}\, k' = 0{,}158010$	$u = 73^a{,}862,\; T = 1806{,}877$

wodurch nun sämtliche Elemente den benutzten Daten entsprechend bestimmt waren. Dass andere Kombinationen der vorhandenen Beobachtungen merklich andere Werte ergaben, berührt uns hier wenig, da es sich zunächst nur um ein Rechnungsbeispiel handelte.

628. Einige andere Methoden, samt Übersicht der gewonnenen Resultate. — Die Folgezeit hat noch eine ganze Reihe von mehr und weniger modifizierten oder wirklich neuen Rechnungsmethoden, sowie verschiedene andere einschlagende Untersuchungen produziert, für welche ich mich jedoch auf einige litterarische Nachweise beschränken muss, denen ich sodann noch eine kleine Tafel von bis jetzt gewonnenen Resultaten anschliesse [a].

Zu 628: *a.* Aus der grossen Anzahl betreffender Publikationen lasse ich den bereits erwähnten noch eine kleine Auswahl folgen, nämlich: „Yvon **Villarceau**, Méthode pour le calcul des orbites des étoiles doubles (Compt. rend. 1852), und: Méthode pour calculer les orbites des étoiles doubles, déduite de considérations géométriques (Conn. d. t. 1877), — **Klinkerfues**, Über eine neue Methode die Bahnen der Doppelsterne zu berechnen. Göttingen 1855 in 4., — **Winnecke**, De stella η Coronæ borealis duplici. Berolini 1856 in 8., — A. de **Gasparis**, Sul calcolo delle orbite delle stelle doppie (Rend. Napoli X von 1871), — T. N. **Thiele**, Castor: Calcul du mouvement relatif et critique des observations de cette étoile double. Kiobenhavn 1879 in 8., — L. **Birkenmajer**, Über die durch die Fortpflanzung des Lichtes hervorgerufenen Ungleichheiten in der Bewegung der physischen Doppelsterne (Wien. Sitz. II von 1886; sehr elegante Entwicklung), — F. **Tisserand**, Sur la force qui produit les mouvements des étoiles doubles (Bull. astron. 1887), — A. **Marth**, On the formulæ for correcting approximate elements of the orbits of binary stars (Monthly Not. 47 von 1887), — Ernst **Grossmann** (Rotenburg in Hannover 1863 geb.; Assist. Göttingen), Untersuchung über systematische Fehler bei Doppelsternbeobachtungen ausgeführt in Verbindung mit einer Bahnbestimmung des Doppelsternes „η Coronæ borealis". Göttingen 1892 in 4., — etc." — An diese

litterarischen Nachweise mag noch folgende Zusammenstellung von bisher erhaltenen Rechnungsresultaten angeschlossen werden:

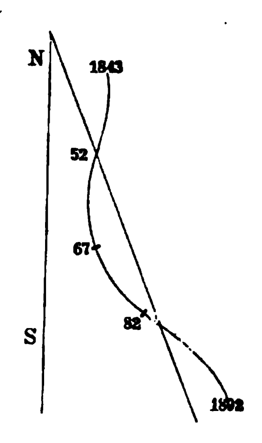
Stern	Periheld. T	Halbe gr. Axe a'	Excentr. e'	Periode u	Berechner
42 Comæ .	1859,9	0'',66	0,480	25ᵃ,7	O. Struve
β Delph. . .	1882,2	0,55	357	26,1	Dubjago
ζ Hercul. .	1864,8	1,28	463	34,4	Doberck
η Coronæ .	1850,8	0,89	267	41,6	—
α Can. maj.	1843,3	2,83	615	49,4	Auwers
μ^2 Hercul. .	1877,1	1,46	0,302	54,3	Doberck
γ Cor. austr.	1882,8	2,40	699	55,6	Schiaparelli
ζ Cancri . .	1870,8	0,89	332	59,5	Doberck
ξ Urs. maj. .	1875,3	2,55	395	60,8	Dunèr
α Centauri .	1875,1	18,45	533	88,5	Doberck
γ Coronæ .	1843,7	0,70	0,350	95,5	—
ξ Scorp. . .	1859,6	1,26	077	95,9	—
w Leonis .	1841,8	0,89	536	110,8	—
ξ Bootis . .	1770,7	4,86	708	127,4	—
η Cassiop. .	1905,0	8,79	630	148,9	L. Struve
γ Virginis .	1836,7	3,97	0,896	185,0	Thiele
τ Ophiuchi .	1821,9	1,40	606	217,9	Doberck
μ^2 Bootis .	1868,5	1,47	597	280,3	—
γ Leonis . .	1741,1	2,00	739	402,6	—
μ Drac. . .	1940,4	3,38	493	648,0	Berberich

Zum Schlusse wird für die Positionen einer Reihe von Doppelsternen und einige andere Betreffnisse auf Tab. Xᶜ verwiesen.

629. Die sog. dunkeln Begleiter. — Schon **Bessel** zeigte, dass gewisse Anomalien in der Eigenbewegung mancher Sterne, wie z. B. des Sirius und des Procyon, zu der Annahme nötigen, es gebe Sterne, welche mindestens mit Einem, für uns unsichtbaren, vielleicht wirklich dunkeln Begleiter zu einem Systeme verbunden seien, — und als sodann C. A. **Peters** den Versuch unternahm, die bei Sirius vorkommenden Ungleichheiten nach den Ideen seines Meisters durch Annahme eines Satelliten wirklich darzustellen, gelang ihm dieser vollständig, — ja sein Rechnungsresultat bestand 1862 die beste Probe, indem A. **Clark** in der von ihm angewiesenen Stellung den Begleiter wirklich auffand [a]. Seither hat sodann A. **Auwers** auch den Bewegungen von Procyon auf ähnliche Weise genügen können, jedoch ist allerdings dessen Begleiter bis jetzt noch nicht am Himmel aufgefunden worden [b]. Ferner haben in der allerneuesten Zeit **Vogel** und **Scheiner** mit Hilfe des Spektroskopes auch bei Algol (604) einen dunkeln Begleiter nachgewiesen,

und es ist wahrscheinlich geworden, dass die sämtlichen Veränderlichen vom Algoltypus binnen kurzem den Doppelsternen dieser Art beigeordnet werden müssen [c].

Zu 629: *a.* Die oben mitgeteilten Ansichten sprach **Bessel** in seiner Abhandlung „Über die Veränderlichkeit der eigenen Bewegungen der Fixsterne (A. N. 514 u. f. von 1844)" aus, und schrieb noch in seinen letzten Tagen an Humboldt: „Ich beharre in dem Glauben, dass Procyon und Sirius wahre Doppelsterne sind, bestehend aus einem sichtbaren und einem unsichtbaren Stern", — ganz im Sinne von Lambert noch beifügend: „Es ist kein Grund vorhanden, das Leuchten für eine wesentliche Eigenschaft der Körper zu halten; dass zahllose Sterne sichtbar sind, beweist offenbar nichts gegen das Dasein ebenso zahlloser unsichtbarer". — Die jährliche Eigenbewegung des Sirius beträgt in $\mathcal{R}$ — 0",525 = — 0ˢ,035 und in D — 1",198; aber sie ist in Wirklichkeit nichts weniger als gleichförmig, sondern befolgt etwa den in beistehender Figur angedeuteten Gang, durch dessen Studium **Peters** zu dem bereits oben angedeuteten Resultate geführt wurde: Nach seiner Habilitationsschrift „Über die eigene Bewegung des Sirius. Königsberg 1851 in 4." sah er sich nämlich veranlasst, anzunehmen, es bilden Sirius und eine dunkle Masse ein System, in welchem sich die beiden Körper in 50 Jahren entsprechend dem Gravitationsgesetze um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegen, und es habe Sirius in der von ihm beschriebenen Ellipse von 0,8 Excentricität etwa 1841,44 dem Schwerpunkte am nächsten gestanden.



— Als 1862 I 31 ein junger Sohn des Optikers Alvan **Clark** in Boston ein eben vollendetes Objektiv von 47^{cm} auf Sirius prüfte, rief er plötzlich: „Vater, der Stern hat einen Begleiter!", — und dieser Begleiter stand, wie sich alsbald zeigte, gerade an der Stelle, wo der Störefried nach Peters zu dieser Zeit stehen sollte, — der letztere war also gefunden und wurde auch seither in Amerika und Europa vielfach beobachtet, so dass **Flammarion** schon in seiner Note „Sirius et son système (L'astronomie 1884)" bei 100 von 1862—83 erhaltene Bestimmungen aufzählen konnte, bei denen der Positionswinkel ziemlich regelmässig von 85° auf 39° abgenommen hatte. — Die umfassenden „Untersuchungen über veränderliche Eigenbewegungen (erste Abth. als Dissertation „Königsberg 1862 in 4.", zweite 1868 als Publ. VII Astr. Ges. erschienen)", welche **Auwers** schon 1860 begonnen und auch nach der eben mitgeteilten Entdeckung teils unabhängig von ihr, teils mit Berücksichtigung derselben, fortgeführt hat, bestätigen im allgemeinen das vorstehend Gesagte in schönster Weise: Wahrscheinlich ist der Begleiter ein Planet; aber seine Phasen werden wir kaum je entdecken, höchstens aus Variationen im Glanze plausibel machen können. Die mittlere Distanz zu 8",45 und die Parallaxe zu 0",193 angenommen, würde der Begleiter etwa 1620 Millionen Meilen von Sirius abstehen; ein Planet unserer Sonne würde aber bei solchem Abstande eine Umlaufszeit von 290ᵃ haben anstatt den circa 49½ᵃ, welche Auwers für den Sirius-Begleiter fand, — also eine etwa 5,85 mal grössere, so dass Sirius $5{,}85^2 \simeq 34$ mal mehr Masse als unsere Sonne be-

sitzen muss, — allerdings mit seinem Begleiter zusammen, welchem auch ein erheblicher Teil gutzuschreiben ist, da aus der starken Deplazierung des Sirius geschlossen werden muss, es falle der Schwerpunkt des Systemes weit ausserhalb desselben. Vgl. auch die unter Beizug neuerer Beobachtung und Einführung einer Siriusparallaxe von 0",38 von **Auwers** gegebenen „Beiträge zur Kenntniss des Siriussystemes (A. N. 3084—85 von 1892)", aus denen z. B. hervorgeht, dass die Umlaufszeit wesentlich vergrössert werden muss. — *b.* Für den Begleiter Procyons erhielt **Auwers** (l. c.) eine Umlaufszeit von nicht ganz 40 Jahren, und wenn auch derselbe bis jetzt nicht am Himmel aufgefunden wurde, da O. **Struve** eine vermeintliche Entdeckung im Jahre 1873 (vgl. seine „Observations of Procyon as a double star" in Monthly Not. 1873/4) später selbst (vgl. seine Note „Über den vermeintlichen Procyonbegleiter" im Bull. Pet. 1876) als irrig erkannte und S. W. **Burnham** sogar mit dem Riesen-Refraktor auf Mount-Hamilton vergeblich nach demselben suchte, so ist an seiner Existenz auch nach der neuern Untersuchung „L. **Struve**, Resultate aus den in Pulkowa angestellten Vergleichungen von Procyon mit benachbarten Sternen. St. Petersburg 1883 in 4." nicht im mindesten zu zweifeln. — *c.* Die schon in 606 und sodann wieder oben angedeutete, gegen Ende 1889 **Vogel** und **Scheiner** gelungene wichtige Entdeckung ging von der Thatsache aus, dass sich aus den spektroskopischen Beobachtungen (vgl. 614) mit Sicherheit ergab, **dass sich Algol vor dem Minimum von der Sonne entfernt und nach demselben ihr wieder nähert**, — dass also Algol eine Bahnbewegung besitzt, deren Umlaufszeit mit der Periode des Lichtwechsels übereinstimmt, — somit **ein dunkler Begleiter** vorhanden sein muss, welcher mit Algol sich um einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt bewegt. Aus der für Algol erhaltenen Bahngeschwindigkeit von 5,7 Meilen pro Sekunde gelang es nun, in Verbindung mit den bekannten Elementen seines Lichtwechsels eine Berechnung vorzunehmen, welche provisorisch für

den Durchmesser des Hauptsternes . . .	230000	Meilen
- - - dunkeln Begleiters .	180000	-
die Entfernung der Mittelpunkte	700000	-
- Bahngeschwindigkeit des Begleiters .	12	-

und für die Massen der beiden Körper $^4/_9$ und $^2/_9$ der Sonnenmasse ergab. Ihre Entfernung voneinander ist so gering, dass es auch zehnmal stärkern Instrumenten als unsern Riesenrefraktoren nicht gelingen dürfte, dieselben zu trennen, selbst wenn der Begleiter hell wäre. Die Schwierigkeit, welche dieser Theorie die periodische Veränderlichkeit der Lichtperiode bereitet, würde nach **Chandler** (Astr. Journ. 255 von 1892), gleichzeitig mit gewissen Anomalien in der Position, durch die Annahme beseitigt, dass sich das Algol-System in etwa 130ᵃ um einen ausser ihm liegenden Schwerpunkt bewege.

630. Die Pleyaden. — Über die bereits den Alten bekannten Sterngruppen ist schon früher (295) gesprochen und ebenso (296) Einiges über die ersten Entdeckungen mit dem Fernrohr mitgeteilt worden, wobei beide Male namentlich auch von den **Pleyaden** die Rede war. Es bleibt jedoch nachzutragen, dass schon in den beiden vorhergehenden Jahrhunderten mehrfach Karten- und Specialkataloge dieses merkwürdigen Gebildes publiziert wurden, — dass

in der ersten Hälfte des gegenwärtigen Jahrhunderts **Bessel** eine Musterarbeit über dasselbe lieferte, — dass noch seither mehrere Astronomen sich einlässlich mit demselben beschäftigten, — ja dass es in der neuern Zeit gelang, auch auf photographischem Wege gute Bilder von diesem Sternhaufen zu erhalten [a].

Zu 630: *a.* Schon **Galilei** hatte 1610 seiner bereits (296) erwähnten Note über die Pleyaden eine 36 Sterne zählende, allerdings noch ziemlich rohe Karte der „Pleiadum constellatio" beigegeben, während **Hooke** sich begnügte, auf pag. 241 seiner „Micrographia or philosophical description of minute bodies. London 1665 in fol." ohne Angabe bestimmter Details von 78 Sternen zu sprechen, welche er mit einem 12-füssigen Fernrohr in den Pleyaden gezählt habe. Eine bessere Karte gaben erst **Cassini** und **Maraldi** (Mém. Par. 1708) bei Anlass der 1708 VIII 10 und X 30 eingetretenen Bedeckungen dieser Gruppe durch den Mond, und etwas genaue Positionsbestimmungen zugehörender Sterne wurden erst von **Bradley** und dann namentlich von **Jeaurat** (vgl. dessen Note „Position de 64 étoiles des Pléïades" in Mém. Par. 1779) gemacht. Noch ehe sodann 1822 Pietro **Caturegli** (Bologna 1772 — ebenda 1833; Prof. phys. et astr. und Dir. Obs. Bologna) in Bd. 2 seiner Ephemeriden einen „Catalogus XXXVI stellarum Plejadum" publiziert hatte, nämlich 1820, begann **Bessel** seine fundamentalen „Beobachtungen verschiedener Sterne der Plejaden", welche er bis 1841 fortführte und sodann, nachdem er schon 1839 und 1841 (A. N. 387 und 430) kürzere Notizen über seine Arbeit gegeben hatte, seinen „Astronomischen Untersuchungen (I 209—38)" einverleibte: Gestützt auf zahlreiche Beobachtungen, welche er mit Hilfe von **Busch**, **Plantamour** und **Schlüter** teils am Meridiankreise, teils mit dem Heliometer ausgeführt hatte, gab er einen Katalog von 53 Sternen, der noch für spätere Zeiten, auch abgesehen von seiner bereits (395) erwähnten Benutzung, von grossem Werte sein dürfte. In demselben Jahre 1841 publizierte ferner **Rümker** ein „Verzeichniss der Plejaden (A. N. 432)", während dagegen eine bald darauf von Jul. **Schmidt** in Bonn begonnene, bereits etwa 200 Sterne enthaltende Karte, an der ich mich von Bern aus auch etwas beteiligte, meines Wissens unvollendet im Portefeuille blieb. Seither hat W. **Tempel** eine schöne Karte der Pleyaden entworfen, welche 653 Sterne enthält und seinen „Osservazioni astronomiche diverse fatte nella specola di Milano (Pubbl. Mil. V von 1874)" beigegeben ist, und Ch. **Wolf** eine ebensolche von 571 Sternen, auf welche sich seine „Description du groupe des Pléjades et mesures micrométriques des principales étoiles qui le composent (Compt. rend. 1875, und: Annal. de l'Obs. de Paris XIV von 1877)" bezieht. — Während sich die Vorgenannten jahrelang mit dieser Gruppe beschäftigten, gelang es 1865 **Rutherfurd** in wenigen Minuten, ein so scharfes photographisches Bild derselben zu erhalten, dass die von **Gould** (vgl. Mem. Nat. Acad. IV von 1870) darauf vorgenommenen Abmessungen den Vergleich mit den Bessel'schen Zahlen aushielten, — und 1885 hatten die beiden **Henry** ebensolche Erfolge, — ja es haben bereits die Vergleichungen dieser Aufnahmen mit den frühern Karten in Beziehung auf die bei Maja, Merope, etc. zeitweise gesehenen Nebel, und dergleichen, manche interessante Resultate ergeben, auf die ich jedoch hier nicht wohl im Detail eintreten kann. — Vgl. auch „Eduard **Lindemann** (Nischnij-Nowgorod 1842 geb.; Obs. und Bibl. Pulkowa), Helligkeitsmessungen der Bessel'schen Pleyadensterne. St. Petersburg 1844 in 4., — W. L. **Elkin**, Determination of the relative positions of the

principal stars in the group of the Pleiades (Trans. of Yale Obs. I 1 von 1887), — Harold **Jacoby**, The Rutherford photographic measures of the group of the Pleiades. New-York 1892 in 8., — etc."

631. Die Sternhaufen im Perseus und Hercules. — Neben den Pleyaden hat wohl der Sternhaufen am Schwertgriff des Perseus am frühesten die Aufmerksamkeit auf sich gezogen, und auch in neuester Zeit hat er als eines der schönsten Himmelsobjekte Veranlassung zu mehreren Noten und Monographien gegeben [a]. — Während besagte Gruppe sich unter günstigen Verhältnissen schon für ganz scharfe Augen als solche repräsentiert, erscheint dagegen der 1714 von **Halley** aufgefundene Sternhaufen im Herkules dem freien Auge wie ein kleiner Nebel, und erst bei Anwendung eines Fernrohrs lösen sich, je nach seiner Mächtigkeit, Einzelne oder auch Hunderte und Tausende von Sternen ab, doch immerhin so, dass die Mitte, selbst für die stärksten optischen Mittel der Gegenwart, undurchdringlich bleibt [b].

Zu 631: *a.* Der im Perseus zwischen χ und h Bayer stehende Sternhaufen war unzweifelhaft schon **Ptolemäus** bekannt, da er im Almagest (éd. Halma II 41) die χ entsprechende Stelle mit den Worten „Le groupe nébuleux qui est à l'extrémité de la main droite" beschreibt, — und, wenn ihn auch **Galilei** nicht ausdrücklich nennt, so ist doch anzunehmen, dass er von den Ersten, welche das Fernrohr zur Betrachtung des Sternhimmels gebrauchten, bemerkt wurde. Er hält etwa $4^1/_2{}^\circ$ im Durchmesser, bildet für schwächere Fernröhren eines der schönsten Objekte, und ist in neuerer Zeit zuerst durch **Lamont** einlässlicher studiert worden, indem er in den Jahren 1836 und 1837 die gegenseitigen Lagen von etwa 100 Sternen der mittlern Partie bestimmte und seiner lange Jahre nachher publizierten Note „Sternhaufen im Degengriffe des Perseus (Annal. Obs. München 17 von 1869)" drei betreffende Tafeln beigeben konnte. Für spätere Arbeiten verweise ich auf die Abhandlungen: „A. **Krüger**, Der Sternhaufen h Persei. Helsingfors 1865 in 4. (auch in Finska Förnhandl. VIII von 1866; Kat. von 43 Sternen), — O. A. L. **Pihl**, Micrometric examination of the stellar cluster in Perseus. Christiania 1869 in 4. (Kat. von 85 Sternen samt Karte), — H. C. **Vogel**, Der Sternhaufen χ Persei, beobachtet am 8-zölligen Refraktor der Leipziger Sternwarte in den Jahren 1867—70. Leipzig 1878 in 8., — etc." Eine photographische Aufnahme soll **Lohse** 1884 besorgt haben. — *b.* Der globulare, etwa 8′ scheinbaren Durchmesser besitzende und nach W. **Herschel**, der ihn 1783 zuerst teilweise auflöste, bei 14000 Sterne zählende Haufen im Herkules entzog sich früher beinahe der Darstellung, so schätzbar einige Versuche, wie z. B. derjenige von L. **Trouvelot** (vgl. Ann. of Harvard Coll. 1877), waren; dagegen sind seit 1887, wo es den Gebrüdern **Henry** und Is. **Roberts** fast gleichzeitig gelang, denselben zu photographieren, bedeutende Fortschritte erzielt worden, wie dies namentlich die Abhandlung „J. **Scheiner**, Der grosse Sternhaufen im Hercules. Berlin 1892 in 4." zeigt, der sogar ein Katalog von 833 Sternen beigegeben werden konnte.

632. Einige andere Sternhaufen. — Ausser den bereits erwähnten drei Sternhaufen finden sich im Grossen Hund, im Krebs, im Sobieski'schen Schilde, etc., noch eine ganze Menge solcher Gebilde vor. Ich muss mich jedoch hier auf einige wenige betreffende Notizen und litterarische Nachweise beschränken [a].

Zu 632: *a.* Der Sternhaufen unterhalb Sirius, der aus 8 Sternen 6. bis 7. Grösse besteht, ist wohl derjenige, auf welchen **Aristoteles** in seiner „Meteorologia (lib. I, cap. 6)" anspielte; er wurde von **Lacaille** in seiner Abhandlung „Sur les étoiles nébuleuses du ciel austral (Mém. Par. 1755)" beschrieben. — Der weniger dichte, aber ziemlich ausgedehnte Sternhaufen im Krebse, welchen **Ptolemäus** im Almagest (éd. Halma II 55) als „amas nébuleux appelé la crèche (præsepe, Krippe)" anführt, bildet den Vorwurf der Abhandlungen „**Lemonnier**, Catalogue des étoiles de la nébuleuse de l'écrevisse (Mém. Par. 1789), — B. A. **Gould**, Reduction of photographic observations of the Præsepe (Mem. Nat. Acad. IV von 1870), — und: As. **Hall**, Catalogue of 151 stars in Præsepe. Washington 1870 in 4.", — welchen sich demnächst durch W. **Schur** eine neue und umfangreiche Publikation anschliessen wird, indem derselbe gegenwärtig teils die früher von **Winnecke** in Bonn, teils die von ihm selbst in Göttingen erhaltenen zahlreichen heliometrischen Messungen bearbeitet. — Der Sternhaufen im Sobieski'schen Schilde, in welchem **Lamont** 1836—39 eine grössere Anzahl von Messungen vornahm, die er unter Beifügung von drei Tafeln mit circa 150 Sternen in Band 12 der „Observationes in specula Monachiensi" publizierte, wurde auch in „F. **Helmert**, Der Sternhaufen im Sternbilde des Sobieski'schen Schildes (Publ. Obs. Hamburg I von 1874)" besprochen. — In einem Sternhaufen in der Nähe von k Crucis zählte H. C. **Russell** nach seiner Note „The colored cluster about k Crucis (Monthly Not. 33 von 1872)" mit dem grossen Teleskope von Sidney auf einem Raume, der nicht $^1/_{100}$ der Mondscheibe hält, bei 130 Sterne 7. bis 15. Grösse, die grossenteils entschiedene Farben (gelb, blau, rot, grün) zeigten. — Für einige andere Sternhaufen vergleiche die Abhandlungen „N. **Pogson**, Remarkable changes in the cluster 80 Messier (Monthly Not. 21 von 1860), — F. **Abbot**, On the cluster χ Crucis (Monthly Not. 23 von 1862), — Hermann **Schultz** (Södermannland 1823 — Stockholm 1890; Prof. astr. und Dir. Obs. Upsala), Der Sternhaufen 20 Vulpeculæ (A. N. 1898 von 1872), und: Mikrometrische Bestimmung einiger teleskopischen Sternhaufen. Stockholm 1886 in 8., — W. **Valentiner**, Mikrometrische Ausmessung der Sternhaufen G. C. 4410 und G. C. 1166 (Mannh. Beob. III von 1879), — Bruno **Peter**, Monographie der Sternhaufen G. C. 4460 und G. C. 1440, sowie einer Sterngruppe bei 0 Piscium. Leipzig 1889 in 4., — Reinhold **Hahn**, Mikrometrische Vermessung des Sternhaufens Σ 762, ausgeführt am zwölffüssigen Aequatoreal der Leipziger Sternwarte. Leipzig 1891 in 8., — etc." — Vergleiche auch Tab. X[d].

633. Der Nebel in der Andromeda. — Der Entdeckung des Andromeda-Nebels durch **Marius** ist schon früher (296) gedacht worden, so dass hier nur die seither in betreff desselben gemachten Arbeiten nachzutragen und die verschiedenen Ansichten mitzuteilen sind, welche im Laufe der Zeit über seine Natur ausgesprochen

wurden, ohne dass man bis jetzt zu einem ganz definitiven Endresultate gelangen konnte [a].

Zu 633: *a.* Als **Boulliau**, nachdem man die Entdeckung von **Marius** so ziemlich wieder vergessen hatte, neuerdings auf den Andromeda-Nebel aufmerksam wurde und denselben sowohl in seinen bereits (603) erwähnten „Monita", als in seiner ziemlich gleichzeitigen Note „On the nebula in the Andromeda, and of the wondrous star in the Whale (Ph. Tr. 1667)" besprach, lag es für ihn nahe, den Nebel mit der gerade damals durch ihn mit so schönem Erfolge studierten Mira in Parallele zu setzen, und auch G. **Kirch** unterstützte nachmals diese Ansicht, während dagegen allerdings etwas später **Mairan** (vgl. pag. 259 von dessen „Traité" in 229) statt dessen eine Analogie zwischen Nebel und Zodiakallicht erkennen wollte, dafür aber keine Zustimmung fand. — Glücklicherweise wurde über der die Natur des Nebels betreffenden Diskussion seine Beobachtung nicht versäumt, und es entstanden nicht nur einzelne mehr beschreibende Arbeiten, unter welchen namentlich die drei Abhandlungen „**Messier**, Observation et dessin de la nébuleuse de la ceinture d'Andromeda et de deux petites nébuleuses voisines (Mém. Par. 1807), — John **Herschel**, Observation of the nebula in the girdle of Andromeda (Mem. Astr. Soc. II von 1826), — G. P. **Bond**, An account of the nebula in Andromeda (Mem. Amer. Acad. 1848)" anzuführen sind, sondern es wurden auch von **Flamsteed** hinweg bis auf die neuere Zeit wiederholt Positionsbestimmungen gemacht. Aus letztern wollte man früher schliessen, dass der Nebel eine sehr merkliche Eigenbewegung habe; es hat aber **Schönfeld** (vgl. Mannh. Beob. II) gefunden, dass die neuern Beobachtungen dies nicht bestätigen, — und entsprechend haben sich auch am Nebel selbst keine sichern Veränderungen konstatieren lassen. — Die grosse, namentlich bei Anlass einer durch E. **Hartwig** (vgl. 601) im Herbst 1885 auf dem Nebel entdeckten Nova wieder lebhaft diskutierte, aber noch heute offene Frage ist die, ob der schon von dem ältern **Herschel** und dann wieder durch Lord **Rosse** als „der Lösbarkeit verdächtig" bezeichnete Andromeda-Nebel wirklich lösbar sei, oder ob die auf ihm gezählten, nach **Bond** bei 1500 zählenden Einzelsterne sich nur für uns auf denselben projizieren. Auch Spektroskopie und Photographie lassen uns hier vorläufig im Stiche, indem sich dieselben zu widersprechen scheinen: Die erstere giebt nämlich ein kontinuierliches Spektrum, also ist der Nebel ein ferner Sternhaufen, — die zweite aber hat 1888 Is. **Roberts** ein ganz vortreffliches Bild verschafft, welches vollständig mit den hypothetischen Bildern der Nebulartheorie übereinstimmt, indem es mehrere Ringe zeigt, nach welchen sich die Materie um einen centralen Kern geordnet hat.

634. Der Nebel im Orion. — Dass spätestens **Cysat** auch im Orion einen Nebel auffand, und sodann etwas später **Huygens** denselben gründlich studierte, ist schon früher (296) erwähnt worden. Dagegen bleibt hier beizufügen, dass dasselbe Objekt auch seither vielfach beobachtet und dargestellt wurde, und namentlich die neuere, in dieser Richtung mit John **Herschel** beginnende Zeit sich die Aufgabe stellte, dasselbe durch getreue Abbildungen zur Anschauung zu bringen [a]. Ob das mit dem Nebel scheinbar verbundene Sterntrapez wirklich zu demselben gehört oder eigentlich selbst-

ständig ist, — ob in dem Nebel Verschiebungen und Veränderungen vor sich gehen, — und dergleichen Fragen mehr, wird erst eine spätere Zeit beantworten können [b].

Zu 634: *a.* Während **Cysat** 1619 nur beiläufig auf den Nebel im Orion hinwies, erwarb sich **Huygens**, der sich von 1656 hinweg mit ihm befasste, nicht nur das Verdienst, denselben in seinem „Systema Saturnium. Hagæ 1659 in 4." eingehend zu beschreiben und sogar bildlich darzustellen, sondern er unterschied auch bereits in dem Nebel verschiedene Regionen und notierte 12 sich auf denselben oder dessen nächste Umgebung projizierende Sterne, — darunter drei einander nahe, welche er 1684 durch einen vierten zu dem sog. „Trapez" ergänzte. Seine betreffenden Studien wurden sodann in der Folgezeit vielfach weiter geführt, so dass bereits eine grosse Speciallitteratur vorhanden ist, von welcher hier nur folgende kleine Auswahl Aufnahme finden kann: „**Legentil**, Remarques sur les étoiles nébuleuses (Mém. Par. 1759), — **Messier**, Nébuleuse d'Orion (Mém. Par. 1771), — **Leféburе**, Observations sur les nébuleuses d'Orion (Journ. Rozier 1783; seine von 1779 datierende Zeichnung hat d'Arrest in A. N. 1678 von 1868 als sehr wichtig bezeichnet, so dass man bedauern muss, nicht einmal seinen Vornamen zu kennen, sondern nur zu wissen, dass er „Prêtre à l'Oratoire et Professeur de Physique au Collège de Lyon" war), — H. **Schröter**, Aphroditographische Fragmente. Helmstedt 1796 in 4., — John **Herschel**, Results of astron. observations made 1834—38 at the Cape of good hope. London 1847 in 4. (enthält, wie schon oben angedeutet, so ziemlich die erste naturgetreue Abbildung des Orion-Nebels), — **Lassell**, Observations of the nebula of Orion made at Valletta with a 20-foot Equatoreal (Mem. Astr. Soc. 23 von 1854), — Otto **Struve** et M. **Liapounow**, Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Kasan et à Poulkowa. St-Pétersbourg 1862 in 4., — G. **Bond**, Observations upon the great nebula of Orion (Ann. Harv. Coll. 5 von 1867), — A. **Secchi**, Sulla nebulosa di Orione (Atti Linc. 21 von 1868), — Lord **Rosse** (Oxmantown), Account of the observations on the great nebula in Orion (Ph. Tr. 1868; mit zwei Prachttafeln, auf welchen eine Bogenminute $^3/_8$ eines Zolles beschlägt), — H. **d'Arrest**, Undersögelsen over de nebulose stjerner. Kjobenhavn 1872 in 4., — etc.", und endlich „Edward **Holden** (St. Louis in Missouri 1846 geb.; Dir. Obs. Washburn und Lick), Monograph of the central parts of the nebula in Orion. Washington 1882 in 4.", ein Werk, auf welches für allen weitern sachlichen und litterarischen Detail verwiesen werden kann. — *b.* In Beziehung auf das Trapez bleibt zu erwähnen, dass schon **Hooke** in seiner mehrerwähnten „Micrographia" von 5 Sternen sprach, — dass sodann W. **Struve** 1826 und J. **Herschel** wirklich je noch einen etwas ausserhalb stehenden Stern auffanden, — dass diese 6 Sterne, wie schon O. **Struve** und M. **Liapounow** vermuteten, und seither As. **Hall** durch Messungen ziemlich sicher konstatiert zu haben glaubt, ein physisches System zu bilden scheinen, — dass man dagegen von einigen andern kleinen Sternen, welche zuweilen bemerkt worden sein wollten, nicht recht weiss, ob sie veränderlich sind oder ob Täuschungen vorliegen. — Endlich ist in Beziehung auf den Nebel selbst beizufügen, dass zuweilen vermeint wurde, auf Grund von Vergleichungen älterer und neuerer Aufnahmen, gewisse Verschiebungen und Veränderungen konstatieren zu können, jedoch ganz sichere Schlüsse dieser Art wohl erst einer spätern Zeit möglich werden dürften. — Für die bisherigen Ergebnisse der Photographie und Spektroskopie wird auf 638 und 639 verwiesen.

635. Einige andere Nebel. — Die neuere Zeit hat den zwei unter den vorhergehenden Nummern besprochenen Nebeln noch eine ganze Menge solcher Gebilde der verschiedensten Art beigefügt [a], — ja auch ziemlich sicher einige veränderliche Nebel und einige Doppel-Nebel aufgefunden [b].

Zu 635: *a.* Für Katalogisierung und Klassifizierung der Nebel auf die folgende Nummer verweisend, mögen hier vorläufig einige Beispiele solcher Neu-Entdeckungen folgen: Im Jahre 1665 entdeckte ein mit Hevel befreundeter Liebhaber der Astronomie, Namens Abraham **Ihle**, bei Anlass einer Saturnsbeobachtung einen grossen, gewissermassen mehrteiligen Nebel im Schützen, auf welchen sich eine ganze Menge kleiner Sterne projiziert, — 1677 folgte ihm E. **Halley**, indem er auf St. Helena während seiner Revision des Südhimmels im Centaur einen sich durch fast regelmässige Abrundung auszeichnenden Nebel auffand, der seither so ziemlich aufgelöst werden konnte, — und 1681 entdeckte G. **Kirch** einen Nebel im Antinous. Im Jahre 1751 studierte **Lacaille** während seinem Aufenthalte am Kap die zwar schon früher den portugiesischen und holländischen Seefahrern auffälligen und von ihnen als **Kap-Wolken** bezeichneten, später zu Ehren des Weltumseglers **Magellan** mit dessen Namen belegten zwei reichen Gruppen von Nebeln, Sternhaufen und einzelnen Sternen, welche am südlichsten Himmel in einer sonst auffällig sternarmen Gegend stehen, und gab von denselben in seiner Abhandlung „Sur les étoiles nébuleuses du ciel austral (Mém. Par. 1755)" eine erste wissenschaftliche Beschreibung, die dann allerdings seither durch J. **Herschel** in seinen „Results (634)", unter Beigabe von Abbildungen, weit überholt worden ist. Im Jahre 1773 fand **Messier** (vgl. 636) am Ohr des nördlichen Jagdhundes einen ihm rundlich erscheinenden Nebel, welcher sich seither in dem Riesenteleskop von Lord **Rosse** (vgl. dessen „Observations of some of the nebulæ" in den Ph. Tr. 1844—50) als ein höchst merkwürdiges Gebilde von spiraliger Struktur entpuppte, — ferner ungefähr um dieselbe Zeit einen eigentümlichen Nebelstreifen zwischen Schütze und Sobieski'schem Schild, welchem J. **Herschel** um seiner Form willen den Namen „Omega-Nebel" beilegte und bei welchem **Holden** (Am. Journ. of Sc. 1876) bereits eine Verschiebung des einen Armes gegen die umliegenden Sterne konstatiert zu haben glaubt. Im Jahre 1779 bemerkte A. **Darquier** einen kleinen Nebel in der Leyer, in welchem später W. **Herschel** einen etwas elliptischen Nebelring erkannte, — und gegen Ende des Jahrhunderts entdeckte Friedrich **v. Hahn** (Neuhaus in Holstein 1741 — Remplin 1805; mecklenburgischer Erblandmarschall) einen Nebel bei μ Hydræ von ganz planetarischem Aussehen. Etc., etc. — *b.* Da man leider noch keinen sichern Mass-Stab für die jeweilige Durchsichtigkeit der Luft hat, so ist es sehr schwierig, kleine Schwankungen in der Helligkeit der Nebel zu konstatieren; aber dennoch ist es höchst wahrscheinlich, dass einzelne Nebel periodisch veränderlich, also wohl werdende Sterne sind: So wurde der von W. **Herschel** 1785 in der Nähe von Algol aufgefundene und auch 1831 von seinem Sohne gesehene Nebel von Lord **Rosse** in den Jahren 1854 und 1864, sowie von **d'Arrest** 1863, vergeblich aufgesucht, während ihn **Bigourdan** zu Anfang 1891 wieder mehrmals beobachten konnte, — so wurde ein 1852 von **Hind** mit einem 11-füssigen Fernrohr im Stier aufgefundener schwacher Nebel von **d'Arrest** 1856 selbst bei Mondschein schon mit einem 6-füssigen Fernrohr gesehen, dagegen 1861 sogar mit einem 16-füssigen Fernrohr nicht ge-

funden, — etc. — Während ferner W. **Herschel** der Gedanke an physische Doppelnebel noch zu ferne lag, sprach ihn schon sein Sohn unzweideutig aus, und seither fand **d'Arrest** über ein Hundert Doppelnebel auf und bei mehreren derselben, so namentlich bei einem durch **Lassell** in Mem. Astr. Soc. XXIII auf Tab. II als Nro. 9 abgebildeten, deutliche Spuren von relativer Bewegung, — ja man wird vielleicht in folgenden Jahrhunderten die Bahnen von Doppelnebeln ebenso berechnen wie jetzt diejenigen von Doppelsternen.

636. Die Katalogisierung der Sternhaufen und Nebel. — Während in früherer Zeit die Sternhaufen und Nebel nur beiläufig notiert, auch die verschiedensten Gestaltungen kritiklos zusammengeworfen wurden, unternahmen später Verschiedene, systematisch nach solchen zu suchen, und es sind namentlich **Lacaille** und **Messier** als diejenigen zu bezeichnen, welche zuerst mit Erfolg grössere Arbeiten dieser Art unternahmen [a]. — Als sich jedoch **Wilh. Herschel** auf dieses Gebiet warf, überflügelte er bald alle seine Vorgänger, indem er binnen wenigen Jahren Tausende von Sternhaufen und Nebeln auffand, katalogisierte, klassifizierte und beschrieb, und da später sein Sohn **John Herschel** nicht nur diese Arbeiten fortsetzte, sondern bei seinem wesentlich zu diesem Zwecke gemachten mehrjährigen Aufenthalt am Kap auch noch den Südhimmel einbezog, so entstand schliesslich der von letzterm ausgegebene, nicht weniger als 5079 Objekte nach Position und Hauptcharakter aufführende „Catalogue of Nebulæ and Clusters of Stars (Ph. Tr. 1864)", der für alle Zeiten grosse Wichtigkeit behalten wird [b]. — Dass über dieser kolossalen Arbeit der beiden Herschel die während und nach ihrer Zeit von andern Astronomen ausgeführten, viele Ergänzungen und Berichtigungen enthaltenden Untersuchungen nicht vergessen werden dürfen, ist wohl selbstverständlich [c].

Zu 636: *a.* Ich erwähne zunächst die vier Vorarbeiten: „**Halley**, Account of several Nebulæ or lucid spots like clouds, lately discovered among the fix'd stars by help of the telescope (Ph. Tr. 1716; zählt nur 6 Nebel auf), — W. **Derham**, Observations of the appearances among the fix'd stars, called nebulous stars (Ph. Tr. 1733; er wirft die „Nebulosæ" des Ptolemäus ziemlich kritiklos mit den eigentlichen „Acervi et nebulæ" zusammen), — **Loys** de Cheseaux, Catalogue de Nébuleuses (durch Réaumur 1746 der Pariser Akademie vorgelegt, in Mém. Par. 1746 durch Maraldi auf pag. 55 erwähnt, aber nicht abgedruckt und seither leider verloren; da er 20 Objekte umfasst haben soll, so war er für jene Zeit sehr bedeutend, aber meine, mit Hilfe von Prof. Henri Dufour in Lausanne und Bibl. Charles Henry in Paris ausgeführten Nachforschungen blieben resultatlos), — und: **Legentil**, Remarques sur les étoiles nébuleuses (vgl. 634)". — Diesen Vorarbeiten liess sodann **Lacaille** seine schon oben (635) erwähnte wichtige Arbeit „Sur les étoiles nébuleuses du ciel austral" folgen, in welcher er 42 zwischen 24 und 74° südlicher Deklination gelegene „Nébuleuses" aufzählte, — von jeder die Position und eine kurze Beschreibung

gab, — und bei denselben drei Klassen unterschied, welche er folgendermassen definierte: „**La première** n'est autre chose qu'un espace blancheâtre mal terminé, plus ou moins lumineux et d'une figure souvent fort irrégulière: ces taches ressemblent assez ordinairement à des noyaux de comètes faibles et sans queue. **La seconde** est celle des étoiles qui ne sont nébuleuses qu'en apparence et à la vue simple, mais qu'on voit à la lunette comme un amas d'étoiles distinctes, quoique fort proches les unes aux autres. **La troisième** est celle des étoiles qui sont réellement accompagnées ou entourées de taches blanches ou de nébuleuses de la première espèce", dabei andeutend, dass die Gebilde dritter Klasse eigentlich zur ersten gehören und die Sterne sich nur für uns auf dieselben projizieren dürften. Die **Kap-Wolken** (635) betrachtete er nicht als Teile der Milchstrasse, sondern als Nebel, — während er die unter dem Namen der **Kohlensäcke** (sacs à charbon, coal-sacks) bekannten dunkeln Flecken „par la vivacité de la blancheur de la voie lactée qui l'entoure de tous côtés" erklärte. — Nicht minder verdienstlich war der von Ch. **Messier**, der oft Not hatte, einen schwachen Kometen von einem Nebel zu unterscheiden, zunächst zur leichtern Orientierung angelegte, bereits 103 Nummern umfassende „Catalogue des nébuleuses et des amas d'étoiles que l'on découvre parmi les étoiles fixes sur l'horizon de Paris (Mém. Par. 1771 und Conn. d. t. 1784)", wenn er auch in Beziehung auf die Positionen etwas mangelhaft ausgefallen war. — *b.* W. **Herschel** veröffentlichte schon 1786 in den Ph. Tr. „A Catalogue of one thousand new nebulæ and clusters of stars", ja liess demselben 1789 ein zweites Tausend und 1802 noch einmal 500 folgen, dabei die Objekte in acht Klassen sondernd, nämlich: I. Helle Nebel (288); II. Lichtschwache Nebel (907); III. Sehr schwache Nebel (978); IV. Planetarische Nebel und Nebelsterne (78); V. Sehr ausgedehnte Nebel (52); VI. Dicht gedrängte Sternhaufen (42); VII. Weniger dichte Sternhaufen (67); VIII. Grob zerstreute Sternhaufen (88), — eine Einteilung, die zum Katalogisieren ganz bequem, aber allerdings nichts weniger als systematisch war, und auch später durch eine zweckmässigere in die sechs Klassen: „I. Clusters of stars; II. Resolvable nebulæ; III. Nebulæ, properly so called; IV. Planetary nebulæ; V. Stellar nebulæ; VI. Nebulous stars" ersetzt wurde. Er notierte auch den Ort der Nebel, überliess es dagegen seiner Schwester **Karoline**, die Positionen auf die Epoche 1800 zu reduzieren, und da deren Arbeit ungedruckt blieb, so begnügte man sich meist, die von **Bode** (Berl. Jahrb. 1790, 1794 und 1807) bearbeiteten Kataloge zu benutzen, bis **Auwers** 1862 in Bd. 34 der Königsberger Beobachtungen ein auf 1830 reduziertes Verzeichnis lieferte. — Nach dem Tode des Vaters nahm John **Herschel**, dem Tante **Karoline** ihren soeben erwähnten Katalog zur Verfügung stellte, die Katalogisierungsarbeiten wieder so energisch zur Hand, dass er schon in seinen „Observations of nebulæ and clusters made at Slough 1825—33. London 1833 in 4." volle 2307 von ihm aufgefundene Objekte verzeichnen konnte, und nach seiner Rückkehr vom Kap bearbeitete er sodann den oben erwähnten Generalkatalog, von welchem seither John Louis Emil **Dreyer**, der schon 1878 in den Dubliner Transactions „A supplement to Sir John Herschel's General Catalogue of nebulæ and clusters of stars" publiziert hatte, unter dem Titel „A New General Catalogue of nebula and clusters of stars, being the Catalogue of the late Sir John Herschel, revised, corrected and enlarged (Mem. Astr. Soc. 49 von 1888)" eine neue, volle 7840 Nummern aufweisende Ausgabe veranstaltete. In der allerletzten Zeit hat **Bigourdan** begonnen, die Positionen aller in Paris sichtbaren Nebel

und Sternhaufen (etwa 6380) neu zu bestimmen, und es ist bereits ein erster Abschnitt seiner Arbeit erschienen. — *c.* Den bereits im vorhergehenden enthaltenen litterarischen Angaben füge ich noch bei: „Jam. **Dunlop,** A Catalogue of nebulæ and clusters of stars in the southern hemisphere (Ph. Tr. 1828), — **Laugier**, Nouveau catalogue de nébuleuses (Compt. rend. 1853), — **d'Arrest,** Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Leipzig 1856 in 4., und: Siderum nebulosorun observationes havnienses. Havniæ 1867 in 4., — **Secchi,** Observations d'étoiles doubles et nébuleuses (A. N. 1018 von 1856), — **Schönfeld**, Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen (Beob. Mannheim 1862—75), — G. **Bond,** A list of new nebulæ seen at the Observatory of Harvard College 1847—63 (Proc. Amer. Acad. 1863), — H. C. **Vogel**, Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen am Equatoreal der Leipziger Sternwarte. Leipzig 1867 in 8. (vgl. auch A. N. 1667 von 1867), — W. **Lassell,** A Catalogue of new nebulæ discovered at Malta in 1863—65 (Mem. Astr. Soc. 36 von 1867), — E. **Stephan**, Positions moyennes pour 1870 de nébuleuses nouvelles découvertes et observées à l'Observatoire de Marseille (A. N. 1810 von 1870 u. f.; Compt. rend. 1871 u. f.), — H. **Schultz,** Micrometrical observations of 500 nebulæ (Acta Soc. Ups. 9 von 1875), — Baron Wasili Pawlowitz **d'Engelhardt** (Russland 1828 geb.; Besitzer einer Sternwarte in Dresden), Observations astronomiques I—II. Dresde 1886—90 in 4., — etc.“, — und verweise für weiteres auf „E. **Holden**, Index Catalogue of books and memoirs relating to nebulæ and clusters. Washington 1877 in 8.“

637. Die Ausstreuung der Sternhaufen und Nebel. — Als Friedr. **May** im Jahre 1850 die Ausstreuung der Sternhaufen und Nebel einlässlich studierte, erhielt er das bemerkenswerte Resultat, dass die damals bekannten 650 Sternhaufen ihrer grossen Mehrzahl nach in der Milchstrasse oder deren nächster Umgebung liegen, während gegenteils die damals katalogisierten 3400 Nebel ziemlich sporadisch über den ganzen Himmel verteilt erscheinen, ja gegen die Pole der Milchstrasse hin fast häufiger als in ihrer Nähe gefunden werden [a]. Die seitherigen ähnlichen Untersuchungen haben dieses Resultat im allgemeinen bestätigt und überdies noch manche interessante Einzelnheiten ergeben [b].

Zu 637: *a.* Die betreffende Note von **May** findet sich unter dem Titel „Die Himmelsnebel“ im Jahrgange 1850 der Berner Mitteilungen. — *b.* Entsprechende Untersuchungen finden sich z. B. in den Noten „Cleveland **Abbe** (New-York 1838 geb.; Meteorolog des Signal Service Washington), On the distribution of the nebulæ in space (Monthly Not. 1866), — R. A. **Proctor,** Distribution of the nebulæ (Monthly Not. 1869), und: The rich nebular regions in Virgo and Coma Berenices (Monthly Not. 1872), — **Waters,** On the distribution of resolvable and irresolvable nebulæ (Monthly Not. 1873), — etc.“ — Von Einzelnheiten entnehme ich der zweiten Note von **Proctor,** dass er in dem Sternbilde der Jungfrau circa 9 mal, und in der Coma circa 5 mal so viele Nebel fand, als nach dem allgemeinen Durchschnitte auf diese Regionen fallen würden. Ferner erwähne ich, dass **Proctor** fand, es seien die Sterne nicht gleichförmig verteilt, sondern sie stehen gewissermassen in Haufen beisammen, welche durch sternarme Räume getrennt werden, und dass gerade in diesen letztern die

meisten Nebel vorkommen, — was übrigens schon W. **Herschel** bemerkt haben muss, da von ihm erzählt wird, er habe bei seiner Exploration des Himmels, sobald einer sehr sternreichen Region eine arme zu folgen schien, seiner Schwester zugerufen: „Bereite dich zum Schreiben, es nähert sich eine Region der Nebel!"

638. Die Ergebnisse der Photographie. — Die Photographie hat schon in ihren ersten Anfängen, wie bereits wiederholt zu betonen war, der Astronomie grosse Dienste geleistet und ist seit ihrer weitern Entwicklung derselben sogar unentbehrlich geworden, da die Auffangsplatte der Neuzeit bedeutend empfindlicher als die Netzhaut des menschlichen Auges geworden ist. Schon die bisherigen Ergebnisse sind unschätzbar und welche Bedeutung solche rein objektive und dennoch scharfe, ohne grossen Zeit- und Kosten-Aufwand beliebig oft zu wiederholende und leicht zu vervielfältigende Darstellungen gerade auch für das Studium der Sternhaufen und Nebel, speciell ihrer allfälligen Transformationen, binnen wenigen Jahrzehnten erhalten werden, lässt sich ahnen, wenn auch kaum noch ganz übersehen [a].

Zu 638: *a.* Da schon früher bei den verschiedensten Gelegenheiten (236, 531, 594, etc.) der grosse Nutzen der Himmelsphotographie mit Beispielen belegt worden ist und noch im gegenwärtigen Abschnitte (630, 633) verschiedene Proben der bisherigen Leistungen gegeben wurden, so bleibt dem oben gesagten wenig beizufügen. Doch ist einerseits zu 634 nachzutragen, dass auch vom Orion-Nebel gelungene photographische Bilder erhalten worden sind, und z. B. die von **Holden** in seinen „Monograph" aufgenommene Reproduktion einer 1882 durch Henry **Draper** gemachten Aufnahme ein wundervolles Gesamtbild dieses schönen Objektes giebt; wenn einzelner Detail noch nicht die wünschbare Schärfe zeigt, so hängt dies mutmasslich grossenteils mit der noch volle 137^m betragenden Expositionszeit zusammen, und dass seither A. **Common** ein noch schöneres Bild erhielt, dürfte wohl zunächst Folge davon sein, dass er zu seiner Erstellung nur den vierten Teil jener Zeit bedurfte. Da ferner anderseits im vorhergehenden zufällig auf diesem Gebiete fast nur Leistungen französischer, englischer und amerikanischer Astronomen erwähnt wurden, so erfordert es die historische Gerechtigkeit, anzuführen, dass auch die Deutschen nicht zurückgeblieben sind, und z. B. die Note „O. **Lohse**, Über Stellarphotographie (A. N. 2737 von 1886)" beweist, dass das astrophysikalische Observatorium in Potsdam mit allen Anstalten dieser Art konkurrieren kann.

639. Die Ergebnisse der Spektroskopie. — Würde die Spektroskopie der Astronomie auch keinen andern Dienst erwiesen haben als dass sie zeigte, dass die Sternhaufen und die wirklich aufgelösten Nebel ausnahmslos ein kontinuierliches Spektrum liefern, und dass es dagegen einzelne Nebel, wie z. B. den grossen Nebel im Orion, giebt, welche ein Spektrum mit hellen Linien erzeugen,

wie solches heisser Gasmasse zukömmt, — dass sie uns also ein Kriterium gab, um zwischen fernen Sternhaufen und eigentlichen Nebeln zu unterscheiden, — so hätte sie Anspruch darauf, ihren wichtigsten Hilfsmitteln beigezählt zu werden; aber sie wird ohne Zweifel auch da, wie wir es auf andern Gebieten der Astronomie bereits gesehen haben, in der Folgezeit noch viel mehr leisten, — könnte aber allerdings auch irre führen, wenn vergessen werden sollte, dass gar viele, unter gewissen Bedingungen richtige Sätze, sich nicht ohne weiteres auf ganz unbekannte Verhältnisse übertragen lassen [a].

Zu 639: *a.* Da bereits in dem frühern (vgl. 147, 528, 532, 598, 614, 629, etc.) die Spektroskopie und ihre verschiedenen Anwendungen behandelt worden sind, so beschränke ich mich hier darauf, zur Ergänzung der betreffenden Litteratur noch folgende Publikationen namhaft zu machen: „W. **Huggins**, On the spectra of some of the fixed stars and nebulæ (Ph. Tr. 1864 bis 1868), ferner: Spectralanalysis of the heavenly bodies. London 1866 in 8. (franz. von Moigno, Paris 1866; deutsch von Klinkerfues, Leipzig 1868), und: On the spectrum of the great nebula in Orion (Proc. 1865 und 1872), etc., — A. **Secchi**, Le scoperte spettroscopiche in ordine alla ricerca della natura dei corpi celesti (Atti Linc. 1865), und: Sulla variabilità della nebulosa di Orione e il suo spettro (Bullett. 1865), etc., — H. C. **Vogel**, Resultate spectralanalytischer Beobachtungen in Bothkamp (A. N. 1864 von 1871), und: Spectralanalytische Beobachtungen (Beob. Bothkamp 1872—73), etc., — H. **d'Arrest**, Undersogelser over de nebulose stjerner i henseende til deres spektralanalytiske egenskaber. Kjobenhavn 1872 in 4., — Th. **Bredichin**, Spectre des nébuleuses (Mem. Spettr. 1875), und: Spectre des nébuleuses planétaires (Annal. Moscou 1877), — C. **Fiévez**, Recherches sur l'intensité relative des raies spectrales de l'hydrogène et de l'azote, en rapport avec la constitution des nébuleuses (Bull. Brux. 1880), — etc."

640. Die Ansichten über die Natur der Sternhaufen und Nebel. — Als nach Erfindung des Fernrohrs neben Sternhaufen auch nebelartige Gebilde gesehen wurden und es später gelang, einzelne dieser letztern aufzulösen, so lag der Gedanke nahe, dass es auch bei den übrigen der Fall sein würde, wenn ihre Distanz geringer oder die raumdurchdringende Kraft unserer Fernröhren grösser wäre, und wirklich bekannten sich die meisten der frühern Astronomen zu dieser Ansicht, während sich nur wenige dahin aussprachen, dass man zwischen fernen Sternhaufen und wirklichen Nebeln zu unterscheiden, ja in letztern sich erst bildende Weltkörper zu vermuten habe. Diese zweite Ansicht hat nun in der neuesten Zeit durch die mitgeteilten Ergebnisse der Spektralanalyse eine so kräftige Stütze erhalten, dass sie kaum mehr angefochten werden kann, und es wurden uns dadurch, im Gegensatze zur frühern Zeit, die Nebel näher gerückt als die Sternhaufen, von

deren Hausordnung und Weltstellung wir uns noch absolut keine Vorstellung machen können. Vielleicht dass auch da der Menschheit später einmal ein Licht aufgesteckt werden wird, aber wohl nur, um ihr zugleich neue Rätsel vorzulegen, bis sie am Ende nach für uns unzählbaren Jahrtausenden die ihr vom Schöpfer zugeteilte Rolle ausgespielt hat und mitsamt der Erde dem Endschicksale alles Erschaffenen, dem Tode oder der Auflösung, verfällt, um einer neuen Schöpfung Platz zu machen.

Einige Zusätze und Berichtigungen.

89 (zu 6): Das Werk von **Oresme**, der etwa 1323 in oder bei Caen geboren wurde, ist zunächst darum von Interesse, weil es das erste in französischer Sprache ist und die gebrauchten Ausdrücke von der spätern Zeit adoptiert wurden; originell zu sein beanspruchte dasselbe auch nicht, da sein vollständiger Titel lauten soll: „Le traicté de la sphère translate de latin en francois par Maistre Nicole Oresme".

90 (zu 7): An dem Kampfe zu Gunsten freier Forschung beteiligten sich namentlich auch Fr. **Bacon** und R. **Descartes** mit ihren Werken „Novum organon scientiarum. London 1620 in 4., — und: Discours de la méthode pour bien conduire sa raison. Leyde 1637 in 4." — Der Litteratur füge ich überdies noch bei „P. **Apian**, Cosmographicus liber. Landishuti 1524 in 4. (viele spätere Ausgaben und Übersetzungen durch R. Gemma u. a.)", und die durch Konr. **Gessners** Schüler, Kaspar **Wolf** (Zürich 1532 — ebenda 1601; Arzt und Prof. phys. Zürich; vgl. Biogr. I), aus dessen Nachlass herausgegebenen „Physicarum meditationum libri V. Tiguri 1586 in fol."

91 (zu 9): Der Litteratur füge ich bei: „Libert Froidmont oder **Fromondus** (Hackôr an der Maas 1587 — Löwen 1653; Prof. philos. Löwen), Coenæ saturnaliticæ. Lovaniæ 1615 in 4. (Akad. Reden, welche eine popul. Astronomie von Coppern. Standpunkte aus bilden, während der Verfasser nach dem Verbote von 1616 schwach genug war, seine Überzeugung zu verleugnen)", sowie die zwei Schriften von Adrian II **Metius** „Onderwysinghe van de Sterrekonst. Amsterdam 1621, 2 Vol. in 4., und: Opera omnia astronomica. Amsterdam 1633, 4 Vol. in 4."

92 (zu 10): Für die Geschichte der ältern Akademien vgl. „J. B. **Duhamel**, Regiæ scientiarum academiæ historia. Paris 1701 in 4., — Andreas Elias **Büchner** (Erfurt 1701 — Halle 1769; Prof. med. Erfurt und Halle), Historia academiæ naturæ curiosorum. Halæ 1754 in 4., — Thomas **Birch** (London 1705 — ebenda 1766; Sekret. Roy. Soc.), History of the Royal Society of London. London 1756—57, 4 Vol. in 4., — J. **Bertrand**, L'académie des sciences. Paris 1869 in 8., — etc."

93 (zu 11): Der Litteratur füge ich bei: „Joh. **Bernoulli**, Opera. Lausannæ 1742, 4 Vol. in 4., und: Commercium philosophicum et mathematicum (mit Leibnitz). Lausannæ 1745, 2 Vol. in 4., — Jak. **Bernoulli**, Opera. Genevæ 1744, 2 Vol. in 4., — L. **Euler**, Opuscula varii argumenti. Berolini 1746 bis 1751, 3 Vol. in 4.; ferner: Opuscula analytica. Petropoli 1783—85, 2 Vol. in 4.; ferner: Opera minora collecta. Petropoli 1849, 2 Vol. in 8.; und: Opera postuma mathematica et physica A. 1844 detecta. Petropoli 1862, 2 Vol. in 4., — Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du 18e siècle. Pétersbourg 1843—45, 2 Vol. in 8." Letztere, welche für die Bernoulli und Euler von hohem Interesse ist, wurde von Eulers Urenkeln Paul Heinrich und Nikolaus II **Fuss** (zwei Söhne von Nikolaus in 55, von welchen der erstere 1797 geboren wurde und 1855 als Sekretär der Petersb. Akad. starb, der zweite von 1810 bis 1866 ebenfalls in Petersburg lebte und Prof. math. war; ein dritter, 1806 geborner Sohn, Georg Albert, starb 1854 als Dir. Obs. Wilna und war Vater von Viktor in 459), welche auch dessen Opera von 1849 und 1862 herausgaben, zum Drucke besorgt.

94 (zu 15): Der Litteratur füge ich bei: „Joh. Georg **Prändel** (München 1759 — ebenda 1816; Prof. math. München), Algebra nebst ihrer litterarischen Geschichte. München 1795 in 8., — S. **Lhuilier**, Anleitung zur Elementar-Algebra. Tübingen 1799—1801, 2 Bde. in 8., und: Eléments raisonnés d'algèbre. Genève 1804, 2 Vol. in 8., — Joh. Karl **Tobisch** (Maseritz in Böhmen 1793 — Breslau 1855; Prof. math. Breslau), Beiträge zur Vergleichung der Algebra im 16. Jahrhundert mit der in unsern Tagen. Breslau 1846 in 4., — Johannes **Orelli** (Mettmenstetten 1822 — Zürich 1885; Prof. math. Frauenfeld, Basel, Zürich), Algebra. Zürich 1856 in 8. (3. A. 1877), — Karl **Fink**, Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementar-Mathematik. Tübingen 1890 in 8., — Matthäus **Sterner**, Geschichte der Rechenkunst. München (1891) in 8., — etc." — Ferner trage ich nach, dass **Nesselmann** 1880 zu Königsberg starb, und August **Eisenlohr** (1832 geb.) Prof. egyptol. Heidelberg ist. — Endlich verweise ich anhangsweise für die zunächst durch **Fermat** inaugurierte Zahlentheorie auf „**Legendre**, Essai sur la théorie des nombres. Paris 1798 in 4. (3 éd. 1830), — **Gauss**, Disquisitiones arithmeticæ. Lipsiæ 1801 in 8. (franz. durch Poulet-Delisle, Paris 1807), — **Jacobi**, Canon arithmeticus. Berolini 1839 in 4., — **Dirichlet**, Vorlesungen über die Zahlentheorie. Herausgeg. von R. **Dedekind**. Braunschweig 1863 in 8. (3. A. 1879), — etc." Von den gegenwärtigen Bearbeitern dieser Specialität erwähne ich z. B. den ebengenannten Richard **Dedekind** (Braunschweig 1831 geb.; Prof. math. Zürich und Braunschweig) und Arnold **Meyer** (Andelfingen 1844 geb.; Prof. math. Zürich).

95 (zu 20): Setzt man allgemeiner, wie es schon von **Euler** in seiner „Introductio" geschah,

$$A : B = a_1 : [b_1 + a_2 : (b_2 + \ldots)] \qquad 6$$

so ergiebt sich bei entsprechendem Verfahren die Rekursion

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{A_{n-1} \cdot b_n + A_{n-2} \cdot a_n}{B_{n-1} \cdot b_n + B_{n-2} \cdot a_n} \qquad 7$$

und sodann

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_1 \cdot a_2 \ldots\ldots a_n}{B_n \cdot B_{n-1}} \qquad 8$$

woraus, wenn die a durch 1 und die b durch q ersetzt werden, die 3 und 5 hervorgehen.

96 (zu 25): Noch erwähne ich „Michel **Taylor** (Appleby in Westmoreland 1756 — London 1789; Rechner beim Naut. Alm.), Tables of Logarithms of all numbers from 1 to 101000, and of the Sines and Tangents to every second of the quadrant. London 1792 in 4., — A. **Gernerth**, Bemerkungen über ältere und neuere mathematische Tafeln. Wien 1863 in 8., — A. **Steinhauser**, Hilfstafeln zur Berechnung 20-stelliger Logarithmen. Wien 1880 in 8., — und: Tables des Logarithmes à huit décimales. Paris 1891 in fol. (Decimalth.; 10 Interval)". — Ferner ergänze ich, dass Frédéric **Burnier** (Morges 1818 — Lausanne 1879) Ingenieur und Artillerie-Oberst war, — und dass Harry **Gravelius** (Frankfurt a./M. 1861 geb.) Privatgelehrter ist.

97 (zu 26): Vgl. auch „Léon **Lalanne** (Paris 1811 — ebenda 1892; Dir. Ecole d. p. et ch.), Instruction sur les règles à calcul. Paris 1851 in 12." — Ist

$$m = \alpha \cdot 100 + \gamma \qquad n = \beta \cdot 100 + \gamma \qquad f \cdot \gamma = \delta \cdot 100 + \varepsilon$$

so **ist** auch

$$f \cdot m = (f \cdot \alpha + \delta) \cdot 100 + \varepsilon \qquad f \cdot n = (f \cdot \beta + \delta) \cdot 100 + \varepsilon$$

d. h. die Gleichvielfachen zweier Decimalzahlen, deren zwei letzte Stellen übereinstimmen, haben ebenfalls die zwei letzten Stellen gleich, — ein Satz, auf welchem die Crelle-Bremiker'schen Rechentafeln beruhen.

98 (zu 37): Vgl. auch „Rudolf **Weth** (Basel 1866 geb.), Zur Entwicklungsgeschichte des Functionsbegriffes. Basel 1891 in 8."

99 (zu 41): Vgl. auch „**Newton**, Method of Fluxions and infinite Series. Ed. J. Colson. London 1736 in 4. (franz. durch Buffon, Paris 1740), — **Minding**, Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin 1836 in 8., — Rudolf **Lipschitz** (Königsberg 1832 geb.; Prof. math. Bonn), Lehrbuch der Analysis. Bonn 1877—80, 2 Bde. in 8., — etc."

100 (zu 46): Ich füge noch folgende Formeln bei:

$$\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \sqrt{\mathrm{Co}^2\varphi - a^2}} = \frac{1}{a} \cdot \mathrm{Asi}\,\frac{a \cdot \mathrm{Si}\,\varphi}{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot \sqrt{1 - a^2}} \qquad \mathbf{25}$$

$$\int \frac{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot d\varphi}{\sqrt{\mathrm{Co}^2\varphi - a^2}} = \mathrm{Asi}\,\frac{\mathrm{Si}\,\varphi}{\sqrt{1 - a^2}} \qquad \mathbf{26}$$

$$\int \frac{\mathrm{Co}\,\varphi \cdot d\varphi}{(\mathrm{Co}^2\varphi - a^2)^{3/2}} = \frac{\mathrm{Si}\,\varphi}{(1 - a^2) \cdot \sqrt{\mathrm{Co}^2\varphi - a^2}} \qquad \mathbf{27}$$

welche sich ebenfalls sehr leicht durch differenzieren prüfen lassen.

101 (zu 47): Schon die Dan. **Bernoulli, Euler, Lagrange,** etc. hatten angestrebt, irgend eine Function einer Variabeln durch eine nach den Sinus oder Cosinus ihrer Vielfachen fortlaufende Reihe darzustellen; aber erst **Fourier** gelang es, diese Aufgabe (vgl. seine „Theorie" in 149) in allgemeiner und praktischer Weise zu lösen. Vgl. auch „A. **Sachse**, Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Functionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen. Göttingen 1879 in 8."

102 (zu 48): Vgl. auch „**Clairaut**, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre (Mém. Par. 1740)". — Aloys **Mayr** starb München 1890.

103 (zu 53): Ich füge bei „P. J. E. **Finck**, Géométrie élementaire basée sur la

théorie des infiniment-petits (2 éd. Strasbourg 1841 in 8.), — und: Rud. **Staudigl**, Lehrbuch der neuern Geometrie. Wien 1870 in 8."

104 (zu 54): Joh. III **Bernoulli** brauchte (Berl. Jahrb. 1783, pag. 81) statt Radius vector den Namen „Speiche". — Heinrich **Kühn** (Königsberg 1690 — Danzig 1769; Prof. math. Danzig) ist wegen seinen „Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis (Comment. Petrop. 1756)" als Vorläufer von „Jean-Robert **Argand** (Genf 1768 — Paris 1822?; Buchhalter in Paris; vgl. Notiz 360 und 399), Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. Paris 1806 in 8. (2 éd. durch Hoüel 1874; engl. durch A. S. Hardy, New-York 1881), rühmlichst zu erwähnen.

105 (zu 65): Bezeichnen x und y die Segmente der Seite a, so hat man mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes

$$x^2 - y^2 = b^2 - c^2 \quad \text{also} \quad x - y = (b^2 - c^2) : (x + y) = (b^2 - c^2) : a \qquad 9$$

d. h. den schon **Ptolemäus** (vgl. Almagest Halma I 422) bekannten Satz, nach welchem man aus den drei Seiten eines Dreiecks die Segmente einer derselben, also auch diejenigen des Gegenwinkels und damit diesen selbst berechnen kann.

106 (zu 71): Die Geometer des 17. Jahrhunderts beschäftigten sich sehr lebhaft mit Rektifikation und Quadratur der verschiedenen Kurven, und es schufen namentlich zu deren Gunsten, nahe gleichzeitig und unabhängig voneinander, **Cavalieri** seine „Geometria indivisibilibus continuorum. Bologna 1635 in 4. (2. A. 1653)" und **Roberval** seinen, allerdings erst posthum in den „Ouvrages de mathématiques de M. de Roberval. Paris 1693 in 4." publizierten „Traité des indivisibles", — zwei Werke, welche bereits generelle Methoden zu geben suchten und als wichtige Vorläufer der Infinitesimalrechnung zu betrachten sind.

107 (zu 80): Bezeichnen a, b, l der Reihe nach Radius des rollenden Kreises (der Rota), Abstand seines Centrums von dem beschreibenden Punkte, und Länge des von letzterm während einer vollen Umwälzung durchlaufenen Weges, so entsprechen sich

$$b' < b'' = a \quad < b'''$$

und

$$8\,b' < l' < l'' = 8\,a < l''' < 8\,b'''$$

Man hat daher im Vergleich mit der gemeinen Cykloide (Trochoide) die

$$\left.\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{dritte}\end{matrix}\right\} \text{Kurve als} \left\{\begin{matrix}\text{verlängert}\\ \text{verkürzt}\end{matrix}\right\} \text{oder als} \left\{\begin{matrix}\text{verkürzt}\\ \text{verlängert}\end{matrix}\right\}$$

zu bezeichnen, je nachdem man hiefür die Radien b' und b''', oder den Radius b'' = a ins Auge fasst. Anfänglich war die Wahl ziemlich gleichgiltig; aber nachdem sich **Joh. Bernoulli** (vgl. Opera I 335) für erstern Modus entschieden und **Euler** (vgl. Introductio II 298) dessen Wahl sanktioniert hatte, so thaten die spätern Geometer wohl daran, diesen Meistern zu folgen, — ja ich halte es für einen, höchstens Verwirrung veranlassenden Missgriff einiger Neuerer, den zweiten Modus einführen zu wollen, und würde nicht einmal gerne zu der ursprünglich von **Roberval** gebrauchten, anstatt von der Länge der erzeugten Linie direkt von dem erzeugenden Kreise ausgehenden Bezeichnung

$$\text{Trochoides rotæ} \left\{\begin{matrix}\text{prolatæ}\\ \text{contractæ}\end{matrix}\right\}$$

zurückkehren, aus welcher diejenige Bernoullis durch Weglassen des Wortes „rota" entstanden sein dürfte, obschon ich principiell derselben den Vorzug einräume.

108 (zu 88): Um aus den Winkeln A, B, C die Seite a zu erhalten, entnahm **Regiomontan** zunächst denselben Dreiecken, welche er bei der umgekehrten Aufgabe benutzt hatte, nach 87 : 1^v, dass Co (180° — B) = Co D F · Si F und Co C = Co E F · Si F, also ihm jetzt das Verhältnis Si (90° — D F) : Si (90° — E F) bekannt sei; er konnte also, da ihm (90° — E F) — (90 — D F) = A ebenfalls gegeben war, wieder nach dem Ptolemäischen Lehrsatze auch E F und D F selbst finden, sodann nach 87 : 1'' die B F und C F berechnen und aus ihrer Differenz a erhalten.

109 (zu 90): **Neper** teilte seine Analogien auf pag. 57 der „Constructio (vgl. 23)" mit, jedoch leider ohne den Weg anzugeben, der ihn zu denselben geführt hatte.

110 (zu 94): Vgl. „Ferdinand **Joachimsthal** (Goldberg in Schlesien 1818 — Breslau 1861; Prof. math. Halle und Breslau), Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Linien und Flächen doppelter Krümmung. Herausgeg. durch Liersemann. Leipzig 1872 in 8. (2. A. 1881)". — Luigi **Cremona** (Pavia 1830 geb.) ist Prof. math. Rom.

111 (zu 101): Die Berechtigung der Miller'schen Hypothese über den Verfertiger der unter dem Namen „Tabula Peutingeriana" bekannten Strassenkarte des römischen Reiches wird vielfach angezweifelt; dagegen scheint ziemlich sicher zu sein, dass die sie enthaltenden 12 Pergamenttafeln durch Konrad Pickel oder **Celtes** (Wipfelde bei Würzburg 1459 — Wien 1508; Prof. eloqu. Wien) in einem Kloster zu Tegernsee aufgefunden und von ihm an **Peutinger** überlassen wurden, sodann nach dessen Tod momentan wieder verloren gingen, seit 1714 aber sich in der kaiserl. Bibliothek zu Wien befinden.

112 (zu 106): Die Plattkarten scheinen spätestens durch **Heinrich** den Seefahrer (1394—1460; Sohn Johannes des Ersten von Portugal) in den Gebrauch eingeführt worden zu sein. — Der Litteratur füge ich bei: „K. B. **Mollweide**, G. Schmidt's Projectionsart der Halbkugelfläche (Mon. Corr. 12 von 1805; enthält die erste Idee der später von Babinet als „homalographische" kultivierten Projektion), — O. **Bonnet** (vgl. 489 : b; starb Paris 1892), Sur la théorie mathématique des cartes géographiques (Liouville 17 von 1852), — und: Adolf Erich **Nordenskjöld** (Helsingfors 1832 geb.; Prof. mineral. Stockholm), Facsimile-Atlas to the early history of cartography. Stockholm 1889 in 4." — Mathieu **Fiorini** (Felizzano 1827 geb.) ist Prof. geod. Bologna, — Heinrich Friedrich **Gretschel** (Priestitz bei Bautzen 1830 geb.) Prof. math. Freiberg.

113 (zu 107): Der Litteratur sind beizufügen: **Galilei**, Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica e i movimenti locali. Leida 1638 in 4. (auch Bologna 1655), — Dan. **Bernoulli**, Hydrodynamica. Argentorati 1738 in 4., — **Euler**, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum Rostochii 1765 in 4. (auch Gryphiswaldiæ 1790), — Johann Albert **Eytelwein** (Frankfurt 1764 — Berlin 1848; Oberbaurat und Akad. Berlin), Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. Berlin 1801 in 8. (3. A. Leipzig 1842), ferner: Handbuch der Statik fester Körper. Berlin 1808, 3 Bde. in 8., und: Handbuch der Hydrostatik. Berlin

1826 in 8., — Gustave-Gaspard **Coriolis** (Paris 1792 — ebenda 1843; Ingénieur und Akad. Paris), Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines. Paris 1829 in 4. (2 éd. 1844), — Sophie **v. Kowalevsky** (Moskau 1853 — Stockholm 1891; Prof. math. Stockholm), Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (von Par. Akad. 1888 gekrönt und in Sav. étr. 30 aufgenommen), — und: E. **Budde**, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Berlin 1890—91, 2 Bde. in 8." — Michel **Jullien** (Lyon 1827 geb.; Jesuit) ist zu Lyon stationiert, — Joseph **Finger** (1841 geb.) Prof. mech. Wien. — Für **Dühring** vgl. seine höchst interessante, aber allerdings etwas wohl stark gepfefferte Schrift „Sache, Leben und Feinde. Karlsruhe 1882 in 8."

114 (zu 111): Die von **Galilei** (vgl. „Discorsi" pag. 236 u. f.) für die Wurfbewegung im leeren Raume aufgestellten Grundgesetze wurden bald darauf durch **Toricelli** (vgl. dessen Abhandlung „De motu projectorum" in „Opera geometrica. Firenze 1644 in 4.") noch erweitert, und auch **Mersenne**, der sich neben Akustik und Optik (vgl. 129 und 139) vielfach mit Mechanik beschäftigte, stellte ungefähr gleichzeitig (vgl. seine „Ballistica et Acontosmologia. Parisiis 1644 in 4.") betreffende Studien an, obschon seine Hauptbedeutung nicht auf diesem Gebiete lag, sondern in seiner ausgedehnten Korrespondenz, welche damals das Fehlen von Journalen weniger fühlbar machte.

115 (zu 114): Schon **Laplace** (Méc. cél. V 255) hob das Verdienst von **Segner** um die Lehre von den Hauptaxen hervor, jedoch leider ohne dessen „Specimen" zu citieren, was erst durch **Rosenberger** (Gesch. d. Phys. II 345) nachgeholt wurde. Merkwürdig und charakteristisch für **Segner** ist, dass er selbst (wenigstens in seinen „Astronomischen Vorlesungen" von 1776, pag. 609) bei Anlass der Hauptaxen nur **Euler** nennt und seine eigene betreffende Arbeit gar nicht erwähnt.

116 (zu 116): Aus der umfangreichen Litteratur hebe ich noch hervor: „**Euler**, De attractione corporum sphæroidico-ellipticorum (Comm. Petr. 1747), — **Gauss**, Theoria attractionis corporum sphæroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata (Comm. Gott. 1813, Opera V), — **Chasles** (vgl. Bertrand in Rev. scient. 1892), Mémoires sur l'attraction des ellipsoides (Journ. éc. pol. 25 von 1837, Liouville 5 von 1840, Mém. sav. étr. 9 von 1846, u. a.), — etc."

117 (zu 117): Vgl. auch „J. K. **Fischer**, Physikalisches Wörterbuch. Göttingen 1798—1805, 7 Bde. in 8. (Suppl. 1823—27), — Jöns Jacob **Berzelius**, Ars berättelser om framstegen i fysik och kemi. Stockholm 1821—48 in 8. (deutsch von Gmelin, Wöhler, etc., Tübingen 1822 u. f.), — Kurd **Lasswitz**, Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton. Hamburg 1890, 2 Bde. in 8., — E. **Gerland**, Geschichte der Physik. Leipzig 1892 in 8., — etc." — Herm. **Kopp** starb Heidelberg 1892.

118 (zu 121): Vgl. auch „P. T. **Walker**, Details of the pendulum operations and of their reduction (Survey of India V von 1879), — R. **v. Sterneck**, Der neue Pendelapparat des k. k. mil. geogr. Institutes. Wien 1887 in 8., — etc."

119 (zu 124): Auch **Huygens** erwarb sich grosse Verdienste um die Luftpumpe; so z. B. führte er gegen Ende 1661 den sog. Teller ein.

120 (zu 127): Bei Ableitung seiner Formel nahm **Laplace** (vgl. Méc. cél. IV 289 f.) an, dass der nach Ramond unter der Breite $45^0 = 50^d$ zu 18336^m

angenommene Faktor zur Schwere reciprok sei und daher mit der Schwere etwas variiere. Er hatte nun (Méc. cél. II 151) gefunden, dass, wenn g_φ die Schwere unter der Breite φ bezeichne,

$$g_\varphi = g_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \mathrm{Si}^2 \varphi) \quad \text{also} \quad g_{45} = g_0 (1 + {}^1\!/_2\, \alpha) \quad \text{wo} \quad \alpha = 4208 : 739502 \qquad 8$$

zu setzen sei. Bezeichnet man somit den gesuchten Faktor mit f, so hat man $f : f_{45} = g_{45} : g$, oder

$$f = f_{45} \cdot (1 + {}^1\!/_2\, \alpha \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\varphi) = 18336 \cdot (1 + 0{,}002845 \cdot \mathrm{Co}\, 2\,\varphi) \qquad 9$$

Vernachlässigt man r gegen a, so zieht sich sein Faktor F in den Halleyschen Faktor zusammen.

121 (zu 128): Es scheint, dass schon **Leibnitz** nahe daran war, ein Aneroidbarometer zu erfinden (vgl. Hellmann in Met. Zeitschr. 1891, pag. 158). — Welche Berechtigung der Angabe zukömmt, es habe Eduard **Schinz** (Zürich 1812 — Dirschau 1855; Ingenieur) um 1845 die luftleere Metallbüchse eingeführt, habe ich noch nicht ermitteln können. — Adolf **Sprung** (Kleinow in Brandenburg 1848 geb.) ist jetzt Direktor des meteorol. und magnet. Observat. zu Potsdam.

122 (zu 131): Vgl. „Alex. **Beck**, Über einige neue Anwendungen ebener Spiegel (Z. f. Instr. 1887; vgl. auch A. N. 3102 von 1892)“.

123 (zu 132): Vgl. „E. **Wiedemann**, Zur Geschichte der Brennspiegel (Pogg. Ann. N. F. 39 von 1890). **Alhazen** soll eigentlich „Ibn al Haitam“ geheissen haben. — Formel 4 ist in $l = {}^1\!/_8\, q^2 : p$ zu korrigieren und die entsprechende Seitenabweichung $s = {}^1\!/_8\, q^3 : p^2$ beizufügen.

124 (zu 153): Der Litteratur füge ich bei: Athanasius **Kircher** (Geysa bei Fulda 1601 — Rom 1680; Jesuit; Prof. math. in Würzburg und am Collegio romano), Magnes sive de arte magnetica opus tripartitum. Romæ 1654 in fol., — J. **Michel** and J. **Canton**, Treatise on artificial magnets. London 1750 in 8. (franz. durch P. Rivoire, Paris 1752), — J. **Klaproth**, Lettre à M. Humboldt. Sur l'invention de la boussole. Paris 1834 in 8., — Carlo **Matteucci** (Forli 1811 — Livorno 1868; Telegraphendirektor, Unterrichtsminister, etc.), Cours spécial sur l'induction, le magnétisme, le diamagnétisme, etc. Paris 1854 in 8., — A. **Beer**, Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik. Herausgeg. durch Plücker. Braunschweig 1865 in 8., — etc.“

125 (zu 157): Der Litteratur füge ich noch bei: „**Lichtenberg**, Super nova methodo motum ac naturam fluidi electrici investigandi (Comm. Gott. 1777/8; darin seine Staubfiguren), — Cl. **Maxwell**, The electric researches of Henry Cavendish written between 1771 and 1781. Cambridge 1879 in 8., — E. **Mascart** et J. **Joubert**, Leçons sur l'électricité et le magnétisme. Paris 1882—86, 2 Vol. in 8., — G. S. **Ohm**, Gesammelte Abhandlungen. Herausgeg. von E. Lommel. Leipzig 1892 in 8., — etc.“ — Andreas **v. Ettingshausen** (Heidelberg 1798 — Wien 1878) war Prof. math. et phys. Wien.

126 (zu 162): Bei **Euklid** erscheinen die Namen Horizont (von ὁρίζειν = begrenzen), Meridian (μεσημβρινὸς κύκλος = circulus meridianus) und Equinoctial (ἰσημερινὸς κύκλος), welche seine Vorgänger noch nicht brauchten; dagegen bezeichnet er (wie noch Ptolemäus) die Ekliptik als den gegen den Equinoktial schiefen Kreis des Zodiakus, und den Scheitelpunkt als Pol des Horizontes.

127 (zu 163): In der alten Zeit wurde fast ausschliesslich von Ost (Orient, Ostro) aus gezählt, und es dürfte damit der Ausdruck „orientieren", sowie unsre Bezeichnung des Osterfestes zusammenhängen.

128 (zu 188): Der von **Piccolomini** gemachte Vorschlag für die Bezeichnung der Sterne wurde wenig beachtet, entsprechend dem von **Terquem** bei einer andern Gelegenheit aufgestellten Satze: „La chance d'adoption d'une proposition est en raison inverse de la quantité de bon sens qu'elle renferme".

129 (zu 191): Hier hätte auch an den um 320 v. Chr. in Marseille lebenden Griechen **Pytheas** (vgl. die ihm und seinen Reisen nach dem Norden gewidmeten Schriften von Bougainville, Lelewel, Bessell, etc.) erinnert werden sollen, da sich aus einer von ihm in Marseille zur Zeit des Sommersolstitiums an einem Gnomone gemessenen Sonnenhöhe für die Schiefe der Ekliptik der gar nicht üble Wert von 23° 49' ergiebt.

130 (zu 204): **Hipparch** wählte als Epoche den Anfang des ersten Jahres der Regierung von Nabonassar, der (vgl. 315) auf 747 II 26 v. Chr. fiel, — bestimmte für sie den mittlern Ort der Sonne zu 330° 45', — und konnte sodann wirklich eine **erste** Sonnenephemeride erstellen.

131 (zu 225): Die Benutzung des elektrischen Telegraphen zum erhalten der für eine Prognose nötigen Daten wurde schon 1850 durch den Arzt Joseph **Wittmann** in Mainz empfohlen, aber erst von 1855 hinweg durch **Leverrier** zur Ausführung gebracht. Ebenso betonte schon 1816 (vgl. Gilbert 55, pag. 166) **Brandes** die Wünschbarkeit synoptischer Karten, aber erstellt wurden solche erst von 1862 hinweg durch **Marié-Davy**. — Der Litteratur füge ich bei: „O. **Eisenlohr**, Untersuchungen über die Zuverlässigkeit der gebräuchlichen Wetterregeln. Carlsruhe 1847 in 8., — Robert Henry **Scott** (Dublin 1833 geb.; Dir. met. office London), Weather charts and storm warnings. London 1876 in 8. (franz. durch Zurcher et Margolle, Paris 1879), — und: Heinrich **Wettstein** (Fällanden 1831 geb.; Seminardir. Küsnacht), Die Strömungen des Festen, Flüssigen und Gasförmigen. Zürich 1880 in 8."

132 (zu 226): Von dem in Europa berüchtigten **Maifrost** (durchschnittlich V 11—13: Mamertus, Pancratius, Servatius) soll sich in Amerika keine Spur finden, und überhaupt scheint die Wärmeausgleichung häufiger von Ort zu Ort als, wie man früher glaubte, von Zeit zu Zeit (auf kalten Winter heisser Sommer) vor sich zu gehen. — Der Litteratur sind beizufügen: „Tob. **Mayer**, De variationibus thermometri accuratius definiendis (Opera I; Ausgangspunkt der Arbeiten von Kirwan, Dove, etc.), — und: **Pouillet**, Mémoire sur la chaleur solaire, sur les pouvoirs rayonnants et absorbants de l'atmosphère et sur la température de l'espace (Compt. rend. 1838)".

133 (zu 227): Nach **Hann** ergeben sich bis jetzt (nach Reduktion auf das Meer) 687,8 und 806,0^{mm} als Extreme des beobachteten Barometerstandes. — Vgl. „James P. **Espy** (Westmoreland County 1785 — Cincinnati 1860; Prof. Franklin-Inst., dann am War-Dep. und in Amerika als „Father of the present Signal Service" betrachtet), Philosophy of Storms. London 1843 in 8."

134 (zu 228): Vgl. „**Mariotte**, Traité du mouvement des eaux. Paris 1686 in 4.", wo von spätestens 1676 begonnenen Regenmessungen in Dijon die Rede ist, welche für diesen Ort die mittlere jährliche Regenmenge von 17 Zoll ergeben haben.

135 (zu 237): Die Strahlensysteme bei Tycho wurden schon von **Langren** bemerkt und auch von **Hevel** als „radii albicantes" eingetragen.

136 (zu 251): Man hat sich jetzt so ziemlich darüber geeinigt, dass die Corona aus einer durchschnittlich 3—4′ breiten, in etwa 25° von beiden Polen etwas anschwellenden, gegen den Sonnenequator hin aber wieder abfallenden, glänzenden und ziemlich scharf abgegrenzten Schichte besteht, von der einzelne Strahlbündel auszulaufen scheinen, — und sodann noch aus einer, an Intensität nach aussen rasch abnehmenden Hülle ohne scharfe Begrenzung.

137 (zu 258): Die Angaben über die ersten Anhänger von Aristarchs Lehre, unter denen sich auch der grosse **Apollonius** befunden haben soll, sind zu unsicher, um ernstlich in Betracht gezogen zu werden; dagegen mag über die wegen ihrer Grundlagen interessante Sandrechnung von **Archimedes** noch einiger Detail folgen: Er nahm an, dass ein Mohnkorn mit 10^4 Sandkörner gleichwertig, und sein Durchmesser m in der Breite eines Fingers 40 mal enthalten sei, — dass auf ein Stadium 10^4 Finger kommen, — dass der Durchmesser d der Erde nicht 10^6 Stadien $= m \cdot 40 \cdot 10^4 \cdot 10^6 = 4 \cdot 10^{11} \cdot m$ betrage, — dass der Abstand a der Erde von der Sonne höchstens gleich $10^4 \cdot d = 4 \cdot 10^{15} \cdot m$ angenommen werden dürfe, — und dass endlich a dem geometrischen Mittel zwischen d und dem Durchmesser D der Fixsternsphäre gleich sein möchte, woraus $D = a^2 : d = 4 \cdot 10^{19} \cdot m$ folge. Bezeichnet daher x die Anzahl der in der Fixsternsphäre Platz findenden Sandkörner, und bedenkt man, dass sich Kugeln wie die dritten Potenzen ihrer Durchmesser verhalten, so besteht die Proportion

$$x : 10^4 = D^3 : m^3 \quad \text{oder es ist} \quad x = 4^3 \cdot 10^{61} < 1000 \cdot 10^{60}$$

wie dies in 258 angegeben wurde.

138 (zu 286): Vgl. „J. **Schmidt**, Über die Farbe von α Bootis nebst Bemerkungen über Farbenschätzungen (A. N. 999 von 1856), — und: J. J. **See**, History of the color of Sirius (Sid. Mess. = Astr. and Astrophys. 1892)".

139 (zu 298): Vgl. „Ulrich **Stutz** (Pfäffikon 1826 geb.; Lehrer in Zürich), Über die Schöpfungsgeschichte nach Geologie und Bibel. Zürich 1867 in 8., — Ludwig **Zehnder** (Zürich 1854 geb.; Doc. phys. Freiburg i./B.), Über die Entwicklung des Weltalls und den ewigen Kreislauf der Natur (Kosmos 1885), — und: Eugen **Dutoit** (Moudon 1837 geb.; Arzt in Bern), Schöpfung und Entwicklung nach Bibel und Naturwissenschaft. Basel 1892 in 8." — Das Wort „Ewigkeit" gehört zu den vielen Feigenblättern, mit welchen wir unsere Unwissenheit zu verdecken suchen.

140 (zu 310): **Laplace** setzte seine Ansichten über die Wahl der neuen Aera und des Ausgangsmeridianes in der „Exposition du système du monde (éd. An. VIII pag. 19)" auseinander. — Für den republikanischen Kalender verweise ich auf Verz. 18, wo derjenige für Jahr II oder 1793/4 weitläufig beschrieben ist.

141 (zu 314): Da nach 311 den Jahren

1503, 31, 59, 87; **16**15, 43, 71, 99; **17**27, 55, 83; **18**11, 39, 67, 95; **19**23

je s = 0 entspricht, so hat man von einer Jahrszahl nur die nächst kleinere dieser Zahlen abzuziehen, um s und sodann aus dem Täfelchen den julianischen Sonntagsbuchstaben zu erhalten. So z. B. ergiebt sich für

1891 auf diese Weise s = 1891 — 1867 = 24, folglich ist f der julianische Sonntagsbuchstabe, nach Tab. XI[a] somit XII 8 jul. = XII 20 ein Sonntag, d der gregorianische Sonntagsbuchstabe, etc.

142 (zu 316): Auch **Paul** von Middelburg (Middelburg 1445 — Fossombrone 1534; Prof. math. Padua, dann Bischof Fossombrone) befasste sich mit der Osterrechnung, bestimmte die Mondphasen für die ersten 3000 Jahre unserer Zeitrechnung und schrieb (vgl. Riccioli Alm. Introd. 42) 1513 an Leo X. „De recta Paschatis celebratione“.

143 (zu 320): Vgl. auch „M. **Mästlin**, Chronologicæ theses et tabulæ breves. Tubingæ 1641 in 4., — Joh. Friedrich **Utzinger** (Zürich 1645? — ebenda 1708; Insp. Alumn. Zürich), Dissertatio de calendario. Tiguri 1700 in 4., — Joh. Georg **Frank** (Rodalben in Baden 1705 — Hohenstedt 1784; Superint. Hohenstedt), Novum systema chronologiæ fundamentalis. Gottingæ 1778 in fol., — und: H. **Grotefend**, Zeitrechnung des deutschen Mittelalters und der Neuzeit. Hannover 1891—93, 2 Bde. in 8.“ — Robert **Schram** (Lemberg 1850 geb.) ist Leiter des k. k. Gradmessungsbureau in Wien.

144 (zu 321): Es ist auch an eine Art Quecksilberwaage zu erinnern, welche **Hevel** (vgl. Mach. coel. I 197) zur Berichtigung seiner Quadranten gebrauchte. — **Breusing** starb Bremen 1892, — **Löwenherz** Berlin 1892.

145 (zu 332): **Bauernfeind** giebt (Vermessungskunde“, 3. A. pag. 162) ohne Belege an, es habe **Prätorius** den Messtisch schon 1590 erfunden, — und in **Jordan** („Vermessungskunde“ 2. A. pag. 654) liest man anstatt einer historischen Angabe die abschätzige Bemerkung: „Wir wünschen dem Messtisch ein baldiges Eingehen zur wohlverdienten Ruhe bei der Canalwaage und dem Astrolabium“, der jedoch nur diejenigen Topographen beistimmen dürften, welche nicht zeichnen können.

146 (zu 358): Vgl. auch „Anton **Abetti** (Gorizza in Dalmatien 1846 geb.; Obs. Padua), Sulla determinazione del tempo coll' osservazione dei passaggi delle stelle pel verticale della polare (Mem. Spettr. 1880), — und: Eug. **Block**, Hilfstafeln zur Berechnung der Polarisazimute zunächst mit Rücksicht auf die Zeitbestimmung im Verticale des Polarsternes. St. Petersburg 1885 in 4.“

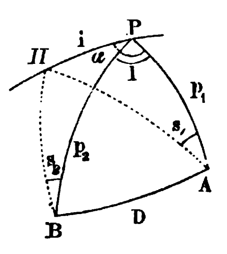
147 (zu 365): Joh. Jakob **Fäsi** (Zürich 1664 — ebenda 1722; Privatastronom Zürich; vgl. Biogr. I) fand 1715 aus dem Schatten der Kante eines vertikal gestellten Parallelepipeds die Polhöhe von Zürich gleich 47° 13′, also (wohl zunächst aus dem angeführten Grunde) etwa um 10′ zu klein.

148 (zu 368): Wenn sich die Distanz d zweier Knoten der Logleine zu einer Seemeile ebenso verhält wie die Dauer t einer Beobachtung zu einer Stunde, so giebt die Anzahl n der während der Zeit t abgelaufenen Knoten die Anzahl der während einer Stunde vom Schiffe zurückgelegten Seemeilen oder die sog. **Geschwindigkeit** des Schiffes. Für t wird meistens $^1/_2{}^m$ gewählt, so dass $d = {}^1/_{120}$ einer Seemeile (früher 5000′ E. = 1524^m, jetzt 6076′ E. = 1852^m) betragen muss; jedoch kommen auch $^1/_4{}^m$ und 1^m vor.

149 (zu 377): Der 1801/2 von **Repsold**, und zwar mutmasslich auf Veranlassung von **Horner**, gebaute Meridiankreis hatte nur circa 4′ Durchmesser, wurde auch nicht um 1809 durch einen neuen ersetzt, sondern erst 1816/8 für Göttingen umgearbeitet und mit einer neuen Teilung versehen. Vgl. Berl.

Jahrb. auf 1806 (pag. 170) und 1813 (pag. 187), sowie meine Notiz 179 (Zürch. Viert. 1869, pag. 335, 339 und 350).

150 (zu 383): Unter der Annahme „dass die Polschwankungen durch eine konische Bewegung der momentanen Erdaxe um eine Hauptträgheitsaxe hervorgerufen werden", kann man mit „Mart. **Brendel**, Über den Einfluss von Polschwankungen auf die geographische Lage der Erdorte (A. N. 3124 von 1892)" wie folgt vorgehen: Bezeichnet P die Lage des Nordpoles zur Zeit t, Π diejenige zur Zeit τ, und sind p_1, p_2, l Poldistanzen und Längendifferenz zweier Orte A und B zu ersterer Zeit, $\triangle p_1$, $\triangle p_2$, $\triangle l$ aber deren Veränderungen beim Übergange von P in die durch α und i bestimmte neue Lage Π, so hat man aus Dreieck P A Π



$$\mathrm{Co}\,(p_1 + \triangle p_1) = \mathrm{Co}\,p_1 \cdot \mathrm{Co}\,i + \mathrm{Si}\,p_1 \cdot \mathrm{Si}\,i \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad \mathrm{Si}\,s_1 : \mathrm{Si}\,\alpha = \mathrm{Si}\,i : \mathrm{Si}\,(p_1 + \triangle p_1)$$

oder, da i, s_1 und $\triangle p_1$ als kleine Grössen betrachtet werden dürfen,

$$\triangle p_1 = -i \cdot \mathrm{Co}\,\alpha \qquad s_1 = i \cdot \mathrm{Si}\,\alpha : \mathrm{Si}\,p_1 \qquad \mathbf{1}$$

ferner entsprechend aus Dreieck P B Π

$$\triangle p_2 = -i \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - l) \qquad s_2 = i \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - l) : \mathrm{Si}\,p_2 \qquad \mathbf{2}$$

und endlich (da D als konstant anzusehen) aus Dreieck P A B nach 92 : 3

$$\triangle l = s_1 \cdot \mathrm{Co}\,p_1 - s_2 \cdot \mathrm{Co}\,p_2 = i\,[\mathrm{Ct}\,p_1 \cdot \mathrm{Si}\,\alpha - \mathrm{Ct}\,p_2 \cdot \mathrm{Si}\,(\alpha - l)] \qquad \mathbf{3}$$

oder, wenn

$$A = \mathrm{Ct}\,p_1 - \mathrm{Ct}\,p_2 \cdot \mathrm{Co}\,l \qquad B = \mathrm{Ct}\,p_2 \cdot \mathrm{Si}\,l \qquad \mathrm{Tg}\,\beta = A : B \qquad \mathbf{4}$$

eingeführt werden,

$$\triangle l = i \cdot [A \cdot \mathrm{Si}\,\alpha + B \cdot \mathrm{Co}\,\alpha] = i \cdot B \cdot \mathrm{Co}\,(\alpha - \beta) \cdot \mathrm{Se}\,\beta \qquad \mathbf{5}$$

Aus 1 und 2 folgt, dass für $l = 180^\circ$ die $\triangle p$ bei gleicher Grösse verschiedenes Zeichen erhalten werden, und es ist denn auch ein solcher Gegensatz zwischen Berlin und Honolulu ($l = 173^\circ$) durch die an letzterm Orte von Ad. **Marcuse** ausgeführten Bestimmungen (vgl. „Th. Albrecht, Resultate der Beobachtungen in Honolulu. Berlin 1892 in 4.") definitiv erwiesen, der Betrag $2\,i \risingdotseq 0'',57$ und die Länge der Periode etwa gleich 386^d gefunden worden. Vgl. auch über diese, in neuerer Zeit wohl zuerst 1888 durch **Küstner** (vgl. dessen Schrift in 369) wirklich erwiesene Anomalie auch „Ant. **d'Abbadie**, La fluctuation des latitudes terrestres (Bull. astr. 1892)", — und „S. C. **Chandler**, On the variation of latitude (Astr. Journ. 248—277, wo sich ferner betreffende Noten von Newcomb und Gould finden)".

151 (zu 386): Die Art des Gebrauches des etwas komplizierten und überdies eine fortwährende Orientierung erfordernden Astrolabiums von **Ptolemäus** geht wohl am besten aus folgendem, von ihm selbst (Alm. VII 2) gegebenen Beispiele hervor: „Am 9. Pharmouthi des 2. Jahres von Antonin (also 139 II 23; vgl. 315) nahe beim Untergange der Sonne, als die letzten Teile des Stieres im Meridiane waren, d. h. $5^1/_2$ Equinoktialstunden nach Mittag, beobachteten wir in Alexandrien die scheinbare Distanz des Mondes von der Sonne, welche damals im 3. Grad der Fische stand, und fanden sie $92^1/_8{}^0$. Eine halbe Stunde später, als die Sonne untergegangen war und das erste Viertel der Zwillinge im Meridiane stand, wurde

Regulus, während der erste Breitenkreis auf den Mond eingestellt blieb, am zweiten gesehen, als er in einer Distanz von $57\frac{1}{6}{}^{0}$ vom ersten gegen Osten stand. Folglich war Regulus um 32° 30' vom Sommersolstitium entfernt".

152 (zu 411): Vgl. auch „Th. **Albrecht**, Über die Bestimmung von Längendifferenzen mit Hülfe des elektrischen Telegraphen. Leipzig 1869 in 4., und: Über den Genauigkeitsgrad telegraphischer Längenbestimmungen (A. N. 2132 von 1877 und 2265 von 1879)".

153 (zu 426): Die Idee, einen Teil des Erdumfanges als Längeneinheit zu wählen, ist schon in dem Werke „Gabriel **Mouton**, Observationes diametrorum Solis et Lunæ apparentium. Lugduni 1670 in 4." enthalten, indem dieser Autor die Minute des Meridiangrades als „Milliaria" zur Längeneinheit wählen und decimal in „Centuria, Decuria, Virga, Virgula, Decima, Centesima, Millesima" einteilen wollte.

154 (zu 429): Nachdem schon J. **Bienaymé** (vgl. Journ. Liouv. 1852) einige Grundlagen für solche Untersuchungen geschaffen, leisteten ziemlich gleichzeitig und unabhängig voneinander **Andrae** (Kopenhagen 1893 gest.; in A. N. 1117 von 1857) und **Helmert** (Z. f. M. u. Ph. 1868) den Nachweis, dass die gleichen Fehler besitzenden Bestimmungen der Lage eines Dreieckpunktes denselben in einer Ellipse umgeben, und somit die dem mittlern Fehler entsprechende dieser Ellipsen, die sog. **Fehlerellipse**, geeignet ist, die Genauigkeit der Operation bildlich darzustellen. Vgl. auch die in 52 erwähnten Schriften von **Helmert** und **Koppe**, die „Vermessungskunde" von **Jordan** (II 222 f.), die Abhandlung „E. **Czuber**, Zur Theorie der Fehlerellipse (Wien. Sitz. 82 von 1882)", — etc.

155 (zu 437): Da **Plutarch** in seiner um 100 n. Chr. verfassten Schrift „De facie in orbe Lunæ", unmittelbar nach Anführung der Aristarch'schen $\frac{1}{18}$ bis $\frac{1}{20}$ und ohne eine andere Autorität zu nennen, für die Distanz Erde-Mond 56 Erdradien giebt, so hat die Annahme, es rühre auch diese von **Aristarch** her und es habe somit dieser seine Rechnungen revidiert, allerdings eine gewisse Berechtigung.

156 (zu 450): Vgl. für die Revision von **Newcomb** die „Astronomical Papers (II 259—406; ausgeg. 1891), speciell den Schlusswert (auf pag. 402)".

157 (zu 451): Nach „A. **Auwers**, Die Sonnenparallaxe nach den Heliometer-Beobachtungen der deutschen Venus-Expeditionen von 1874 und 1882 (A. N. 3066 von 1891)" ergiebt sich aus 751 Messungen das Schlussresultat $\pi = 8'',880 \pm 0'',032$, welches wirklich mit meinem provisorischen Mittelwerte vortrefflich zusammenstimmt.

158 (zu 510): John Meier oder Johannes **Meyer** (Meilen bei Zürich 1839 — Washington 1887) lebte erst als Kaufmann und Mechaniker in der Heimat, dann als Ass. Naut. Alm. Office in Washington, wo er sich den Ruf eines „Capital Computer" erwarb.

159 (zu 534): Bei Aufführung der Litteratur habe ich leider vergessen, auf die bemerkenswerte „Theorie der Sonne" hinzuweisen, welche C. **Braun** in seine „Kosmogonie (vgl. 298)" aufgenommen hat. Ich muss mich damit trösten, dass mich Pater Braun in jener Theorie (pag. 122) ebenfalls zu nennen vergass, obgleich er mir schon 1887 II 17 in allerdings etwas

überschwänglicher Weise schrieb, es habe „kaum je ein Astronom gelebt, welcher so solide und gründliche Studien über die Sonne gemacht“ habe wie ich.

160 (zu 540): Vgl. auch „**Terby**, Aréographie ou Etude comparative des observations faites sur l'aspect physique de la planète Mars depuis Fontana jusqu'à nos jours (Mém. cour. Brux. 39 von 1875)“.

161 (zu 552): Aus „E. E. **Barnard**, Discovery and observations of a fifth satellite to Jupiter (Astr. Journ. 275 von 1892)“ geht hervor, dass derselbe 1892 IX 7 mit dem 36-Zöller des Lick-Observatory in der Nähe Jupiters ein Sternchen von etwa 13. Grösse auffand, das sich an folgenden Tagen als ein inneres Möndchen von Jupiter mit circa $11^h\ 50^m$ Umlaufszeit entpuppte.

162 (zu 556): Vgl. auch „**Laplace**, Sur la théorie de l'anneau de Saturne (Mém. Par. 1787), und „De la figure de l'anneau de Saturne (Méc. cél. II 155 und V 288)“, — sowie „S. v. **Kowalevsky**, Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe (A. N. 2643 von 1884)“.

163 (zu 559): In „E. **Liais**, L'espace céleste et la nature tropicale. Paris (1866) in 8.“ findet sich pag. 478—96 ein „Chap. XVIII. La découverte de Neptune“, das in unqualifizierbarer Weise **Leverrier** so ziemlich jegliches Verdienst um die Entdeckung Neptuns abspricht; dabei ist es charakteristisch, dass **Babinet** diesem Machwerk zu Gevatter stand, und der ruhelose Antagonist der neuern Weltanschauung, August **Tischner**, nichts besseres zu thun wusste, als besagtes Kapitel neuerlich noch einmal abdrucken zu lassen.

164 (zu den Tafeln): In I ist die fünftletzte Überschrift durch **sm** zu ersetzen, — in VII^a die Polhöhe von Pruntrut auf **47° 25'** zu erhöhen, — und in VIII^c bei Juli 5 die $10^s,6$ in **16,0** umzuwandeln. — Zu etwelcher Ergänzung von VIII^d füge ich bei, dass sich in den Jahren 1889—92 die mittlern Relativzahlen

$$R = 6,3 \qquad 7,1 \qquad 35,5 \qquad 73,0$$

und für Mailand als Jahresmittel der täglichen Variationen die Werte

$$v = 6',04 \qquad 6',55 \qquad 7',77 \qquad 8',91$$

ergaben. — Zur historischen Tafel endlich, welche offenbar die Nummer XII tragen sollte, ist anzumerken, dass sich die Jahrzahl 1734 auf ein kleines Beobachtungslokal in Göttingen bezieht, welches Segner angewiesen worden sein soll, während die durch die Arbeiten von Tob. **Mayer** so berühmt gewordene kleine Sternwarte erst von 1751 datierte, — ferner dass in Strassburg, wo schon seit 1830 eine Art Observatorium bestand, erst 1877 der Grundstein zu der jetzigen Sternwarte gelegt wurde.

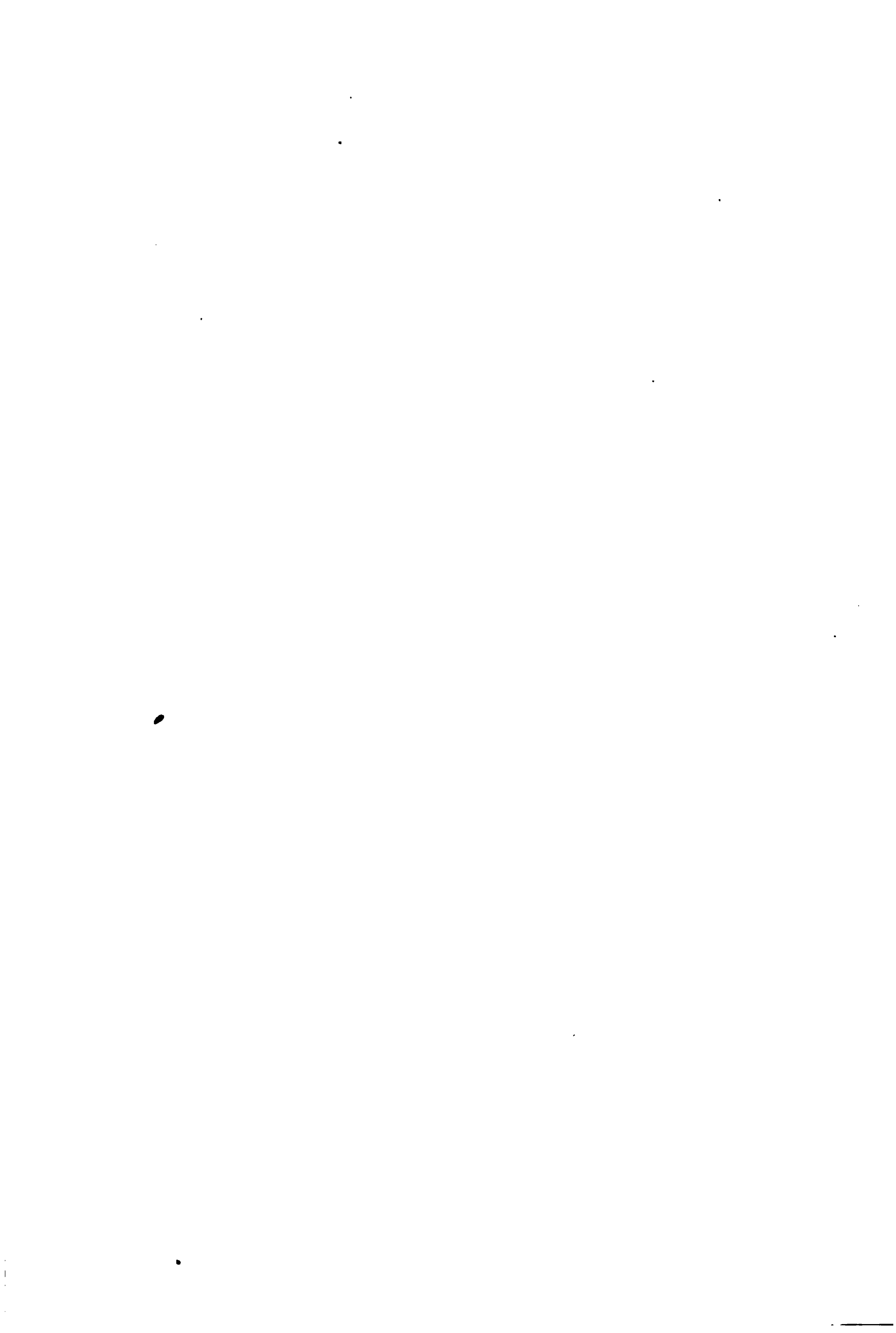
Generalregister.

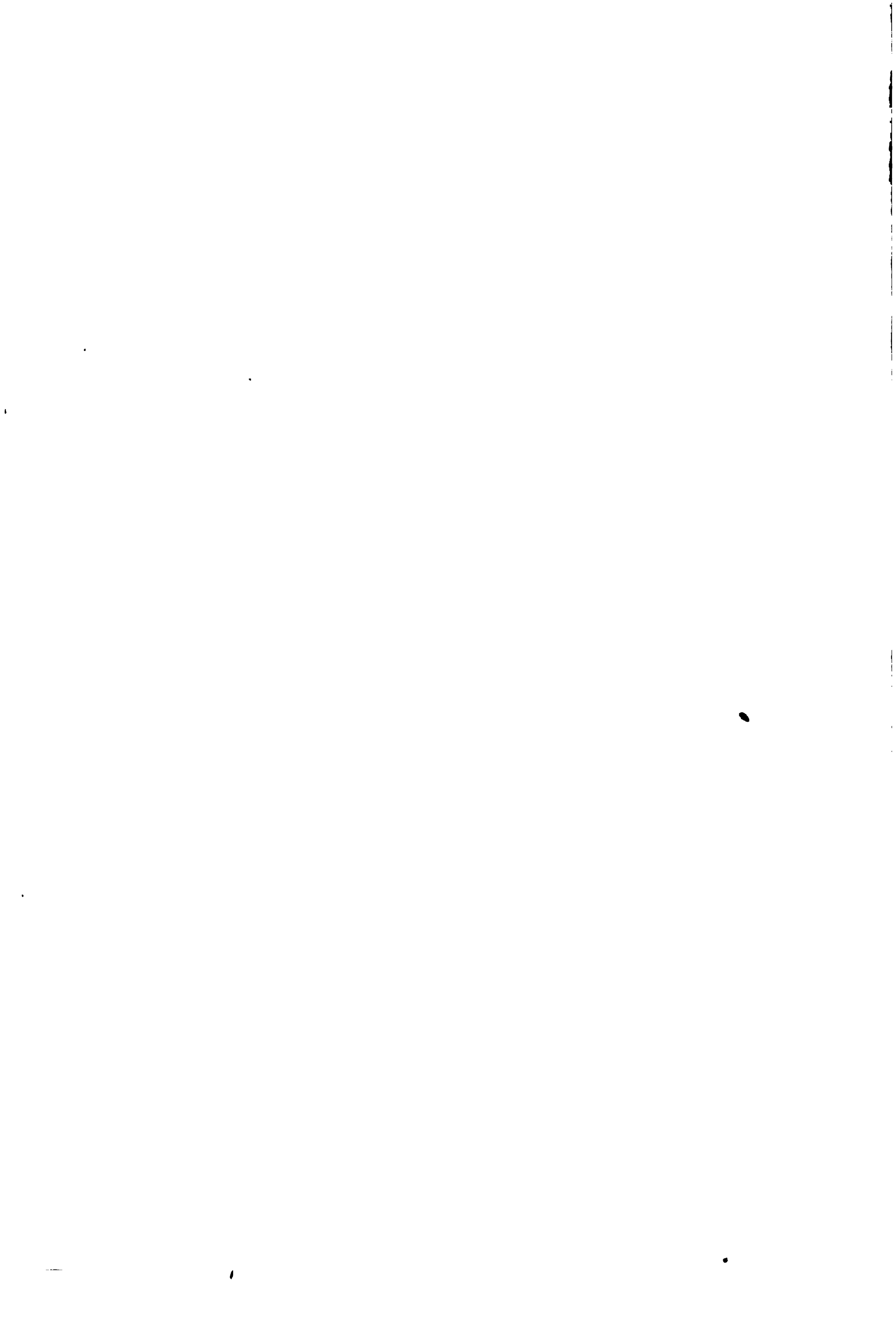
(Die Nummern beziehen sich auf die Sätze und nicht auf die Seiten und zwar die fetten auf biographische Angaben; ein vorgesetztes z verweist auf die Zusätze.)

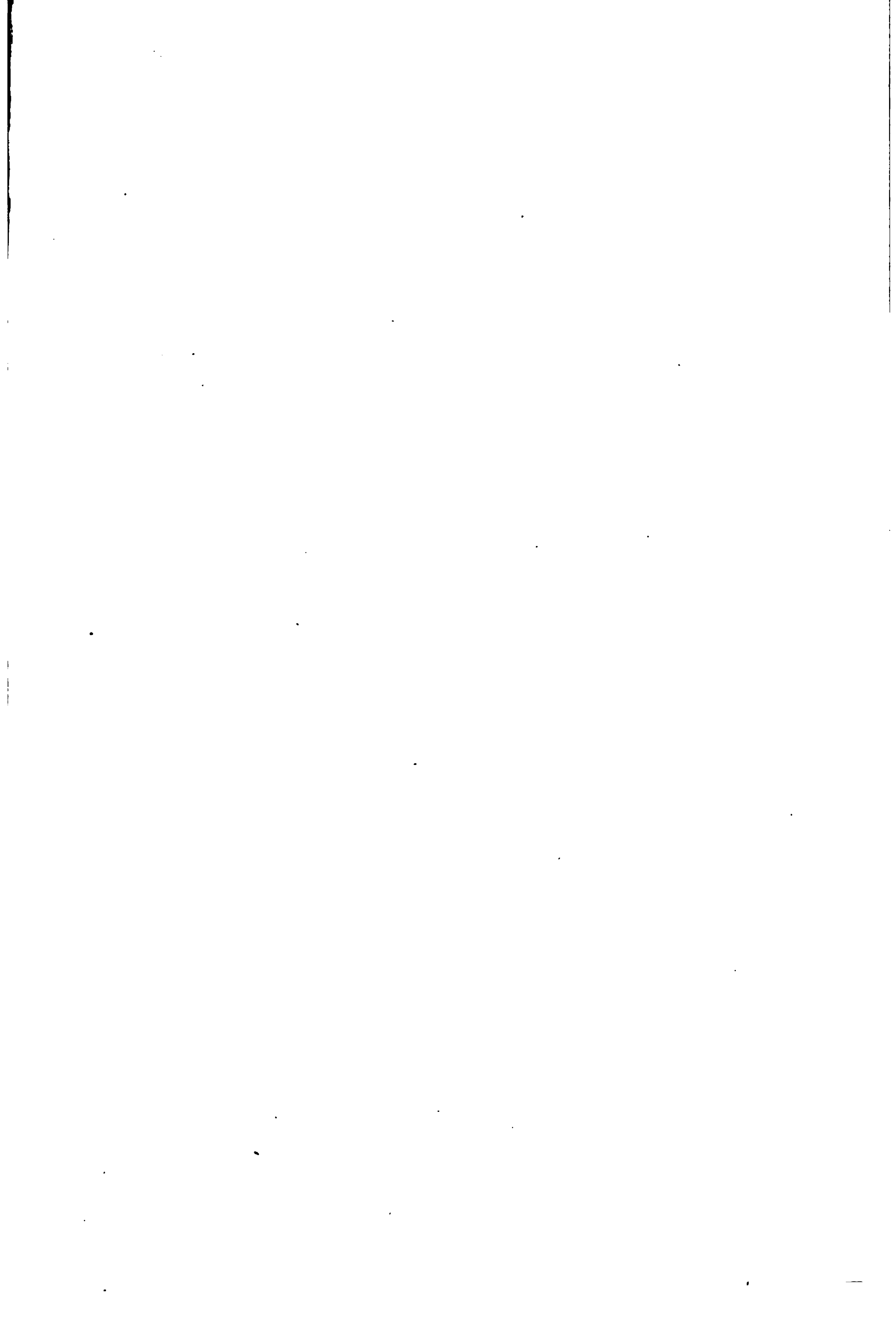
Die Zusätze finden sich je am Schlusse der vier Halbbände und zwar die Nummern

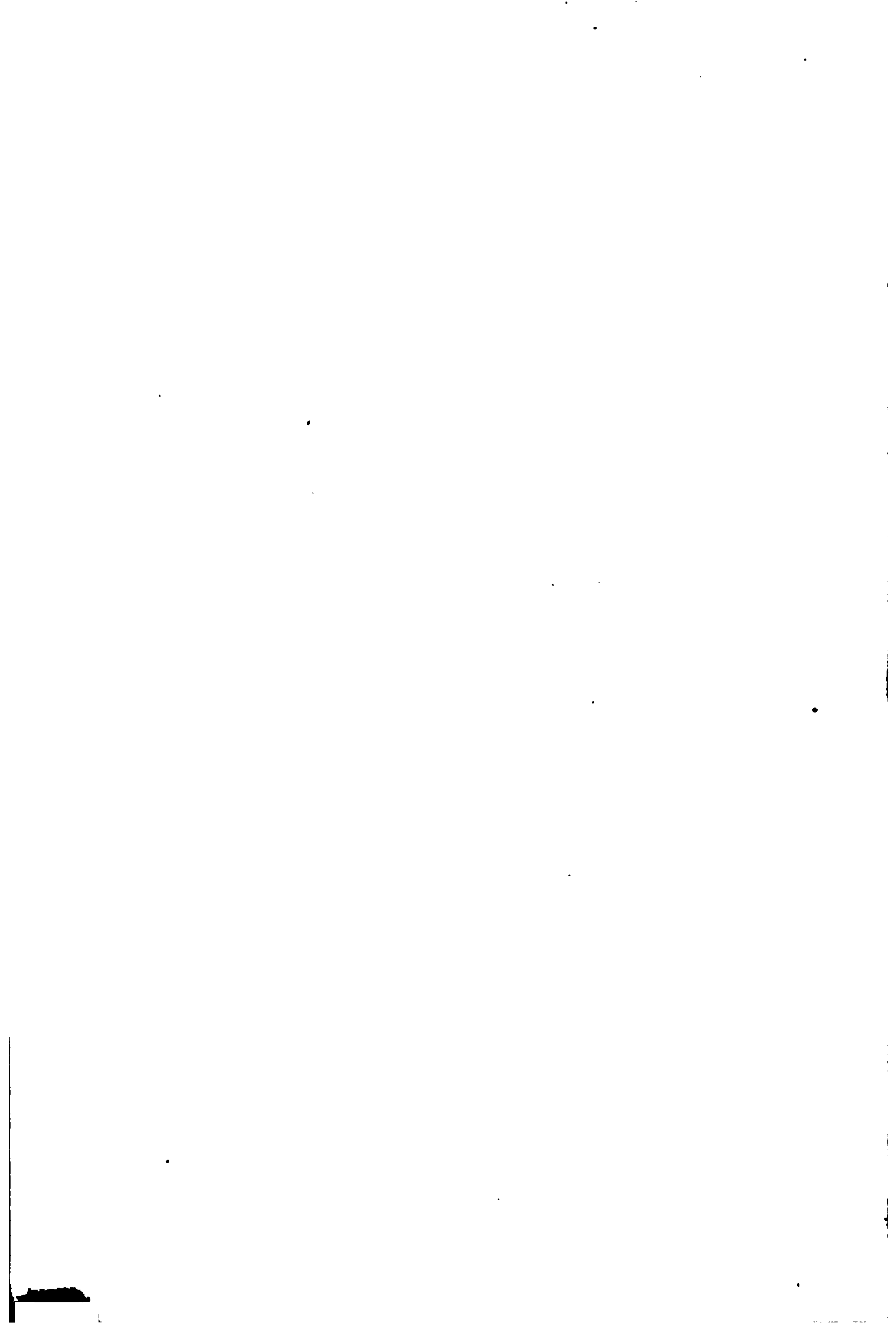
1— 25	am Schlusse von	I.
26— 35	- - -	II.
36— 88	- - -	III.
89—164	- - -	IV.

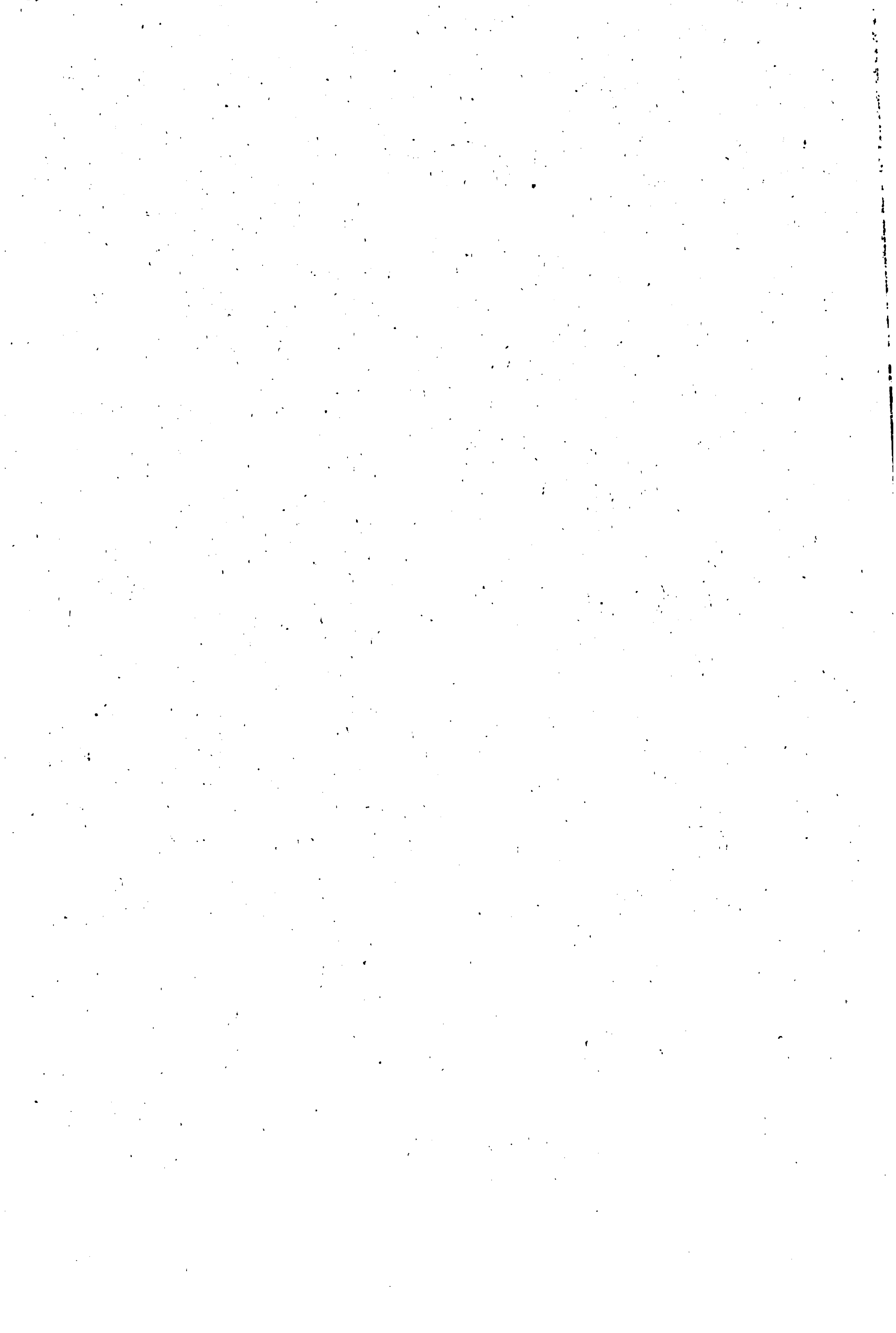


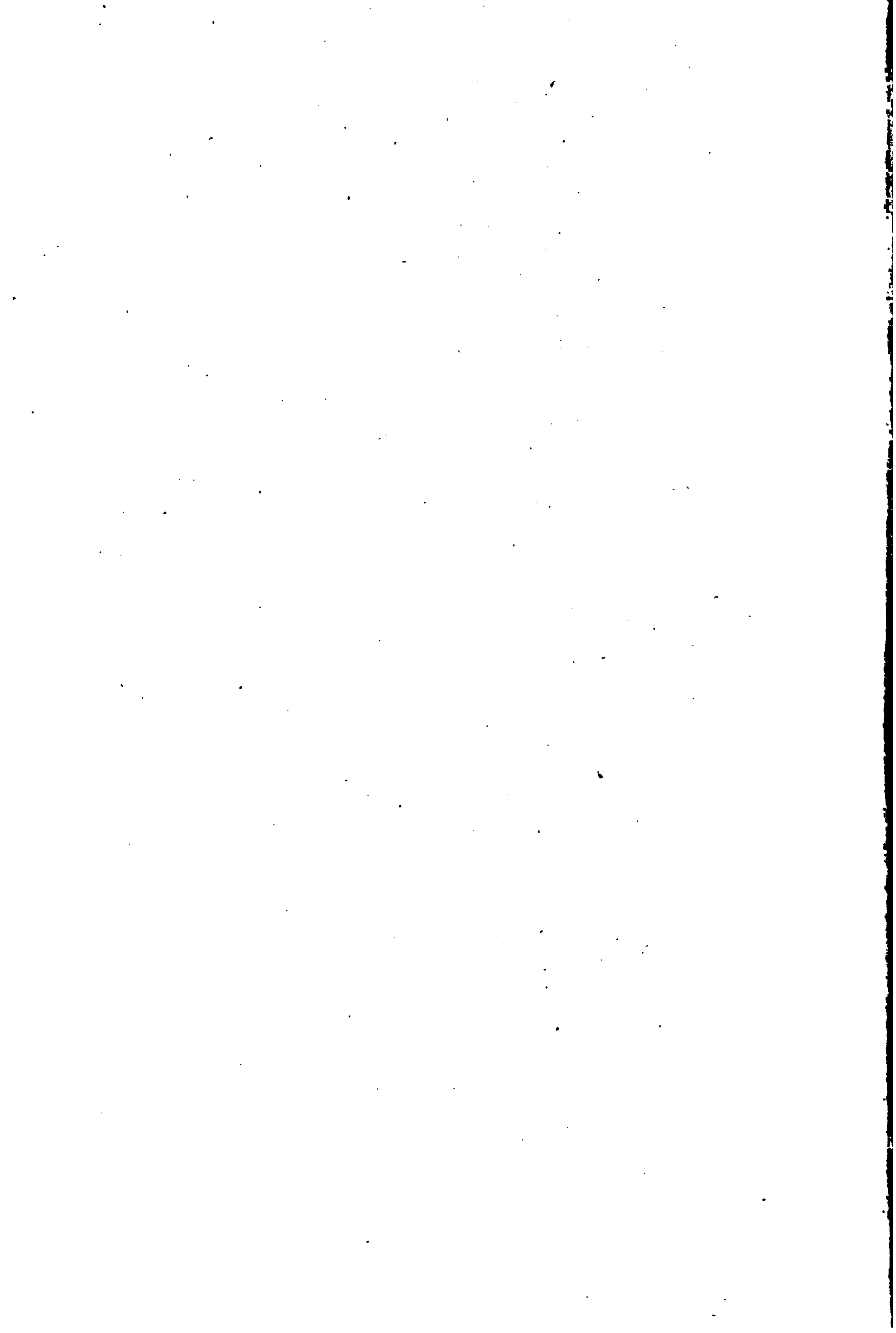


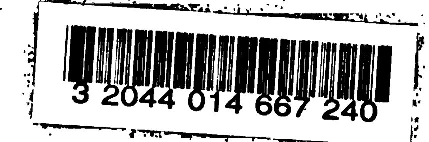











3 2044 014 667 240